یک روش محاسبه برای پاسخ دینامیکی سیستم ها

منصور نیکخواه بهرامی
دانشکده فنی

چکیده

پیچیدگی روزافزون سیستمها وپیشرفتهای اخیرکامپیوترهای رقمی سبب توسعه روشهای تحلیلی جدید مخصوصا " روشهای عددی درتمام زمینه های مهندسی شده است. ولی موفقیت تمام این تحلیلها تا اندازه زیادی بستگی به روشهای عددی به کار گرفته شده برای حل سیستم معادلات همزمان دارد. به همین دلیل در سالهای اخیر تحقیقاتی در زمینه بهینه کردن روش حل (آلگوریتم) سیستم معادلات انجام گرفته است.

در این مقاله ابتدا یک آلگوریتم موثربرای حل معادلات همزمان معادله

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \qquad (۱)$$

که در مسائل ارتعاشات اغلب دستگاهها با آن برخورد می‌کنیم ارائه شده است. که در آن K,C,M به ترتیب ماتریسهای جرمی، میرایی، سختی سیستم و R بردار نیروهای خارجی وارد بردستگاه و $\ddot{U},\dot{U},U$ به ترتیب بردارهای تغییر مکان، سرعت و شتاب است. سپس به‌عنوان مثال یک برنامه کامپیوتری برای تعیین پاسخ یک سیستم سه درجه آزادی نوشته شده است.

روشهای انتگرالگیری مستقیم *

در روش انتگرالگیری مستقیم (Direct Integration Method)، معادلات (۱) با روش عددی مرحله به مرحله انتگرالگیری می‌شود. کلمه "مستقیم "به‌این مفهوم اطلاق می‌شود که قبل‌از انتگرالگیری هیچ نوع‌تبدیلی (Transformation) انجام نمی‌گیرد. در واقع انتگرالگیری مستقیم براساس دوایده پایه گذاری‌شده است: اول اینکه‌معادله ماتریسی (۱) به‌جای اینکه در هر لحظه t برآورد شودتنهادر فواصل معینی Δt برآورد می‌شود. دوم‌اینکه معادله تغییرات شتاب، سرعت وتغییر مکان، درهر فاصله زمانی Δt، فرض شده‌اند. البته باید اشاره شود که این معادله تغییرات است که دقت، پایداری وزمان روش حل خاصی را تعیین می‌کند.

حال فرض کنیم که بردارهای تغییر مکان، سرعت و شتاب در لحظه $t=0$ معلوم هستند وبه وسیله $\ddot{U}^{o},\dot{U}^{o},U^{o}$ نمایش داده شده‌اندو حل‌معادله (۱) درفاصله زمانی o تا T مورد نظر است. برای حل معادله، ابتدا زمان مورد نظر T به تعداد n فاصله‌زمانی‌مساوی Δt تقسیم می‌شود (یعنی $\Delta t=T/n$). روش انتگرالگیری که به‌کار گرفته می‌شود جوابهای تقریبی را در زمانهای $T,\ldots,t+\Delta t,t,\ldots,2\Delta t,\Delta t,o$ تعیین می‌کند. چون الگوریتم مسئله جوابهای مورد نظر در هر زمان را از جوابهای فرض شده در زمان قبلی محاسبه می‌کند، بنابراین‌با فرض‌جوابهای معلوم در زمانهای $t,\ldots,2\Delta t,\Delta t,o$ و اینکه جواب در $t+\Delta t$ خواسته شده است شروع می‌کنیم. محاسباتی که برای‌به‌دست آوردن جواب‌درزمان $(t+\Delta t)$ انجام می‌گیردهمانندمحاسباتی است که برای زمان Δt بعدی لازم است. به‌این ترتیب یک الگوریتم کلی که‌بتوان برای محاسبه جوابها در تمام فواصل زمانی به‌کار گرفت تعیین می‌شود. در زیر روش انتگرالگیری مستقیم نیومارک (New mark) که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است شرح داده خواهد شد.

---

* Bathe, Klans-J., "Finite Elements Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc. 1982.

روش نیومارک

در این روش فرضهای زیر به کار رفته‌اند :

$$\dot{U}^{t+\Delta t}=\dot{U}^{t}+[(1-\delta)\ddot{U}^{t}+\delta\ddot{U}^{t+\Delta t}]\,\Delta t \qquad (۲)$$

$$U^{t+\Delta t}=U^{t}+\dot{U}^{t}(\Delta t)+[(\tfrac{1}{2}-\alpha)\ddot{U}^{t}+\alpha\ddot{U}^{t+\Delta t}]\,(\Delta t)^{2} \qquad (۳)$$

در آن α، δ پارامترهایی هستند که برای دقت انتگرالگیری و پایداری حل‌مسئله می‌توان به‌دست‌آورد . نیومارک ابتداروش شتاب‌متوسط را پیشنهاد نمود ، که در آن $\delta=1/2$ و $\alpha=1/4$ است (شکل ۱) .

علاوه برمعادلات (۲) و (۳) ، برای حل تغییر‌مکانها ، سرعتها وشتابها در لحظه $t+\Delta t$ معادلات (۱) نیز در لحظه $t+\Delta t$ باید برآورد شوند . یعنی :

$$M\ddot{U}^{t+\Delta t}+C\dot{U}^{t+\Delta t}+KU^{t+\Delta t}=R^{t+\Delta t} \qquad (۴)$$

با حل معادله (۳) برای $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ برحسب $U^{t+\Delta t}$ وجایگزینی آن درمعادله (۲) ، روابطی برای $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ و $\dot{U}^{t+\Delta t}$ برحسب مجهولات $U^{t+\Delta t}$ به دست می‌آید . با جایگزینی این مقادیر به‌دست آمده در معادله (۴) می‌توان $U^{t+\Delta t}$ ، را محاسبه نمود . بعداز این مرحله با استفاده‌از معادلات (۲) و (۳) می‌تـــوان $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ و $\dot{U}^{t+\Delta t}$ را نیز محاسبه کرد .
الگوریتم این روش در زیر نشان داده شده است .

الگوریتم روش نیومارک

محاسبات اولیه :

۱ ـ ماتریس سختی K ، ماتریس جرم M وماتریس میرایی C را تشکیل دهید .

۲ ـ مقادیر اولیه U^{o}، $\dot{U}^{o}$ ، $\ddot{U}^{o}$ را انتخاب‌کنید .

۳ ـ فاصله‌زمانی Δt، پارامترهای α و δ راانتخاب کنید وثابتهای انتگرالگیری را محاسبه کنید .

$$\delta > 0.5, \qquad \alpha > 0.25(0.5+\delta)^{2}$$

$$a_{o}=\frac{1}{\alpha(\Delta t)^{2}},\quad a_{1}=\frac{\delta}{\alpha(\Delta t)},\quad a_{2}=\frac{1}{\alpha(\Delta t)},\quad a_{3}=\frac{1}{2\alpha}-1,$$

$$a_{4}=\frac{\delta}{\alpha}-1,\quad a_{5}=\frac{(\Delta t)}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha}-2\right),\quad a_{6}=(\Delta t)(1-\delta),\quad a_{7}=\delta(\Delta t)$$

۴ ـ ماتریس سختی موثر $\hat{K}$ را تشکیل‌دهید :

$$\hat{K}=K+a_{o}M+a_{1}C$$

محاسبات برای هر فاصله زمانی :

۱ ـ بارهای‌موثر رادر زمان $t+\Delta t$ محاسبه‌کنید :

$$\hat{R}^{t+\Delta t}=R^{t+\Delta t}+M(a_{o}U^{t}+a_{2}\dot{U}^{t}+a_{3}\ddot{U}^{t})+C(a_{1}U^{t}+a_{4}\dot{U}^{t}+a_{5}\ddot{U}^{t})$$

۲ ـ تغییر مکانها را در زمان $t+\Delta t$ محاسبه کنید :

$$\hat{K}U^{t+\Delta t}=\hat{R}^{t+\Delta t}$$

۳ ـ شتابها وسرعتهارا در لحظه $t+\Delta t$ محاسبـــه کنید :

$$\ddot{U}^{t+\Delta t}=a_{o}(U^{t+\Delta t}-U^{t})-a_{2}\dot{U}^{t}-a_{3}\ddot{U}^{t}$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t}=\dot{U}^{t}+a_{6}\ddot{U}^{t}+a_{7}\ddot{U}^{t+\Delta t}$$

برنامه کامپیوتر

برای درک بهتر کاربرد این‌روش، پاسخ یک سیستم سه درجه آزادی باداده های فرضی‌زیر توسط‌کامپیوترمحاسبه وترسیم شده است . برنامه به زبان فرترن نوشته شده و توسط کامپیوتر IBM دانشگاه تهران اجرا شده است .

داده ها عبارتند از:

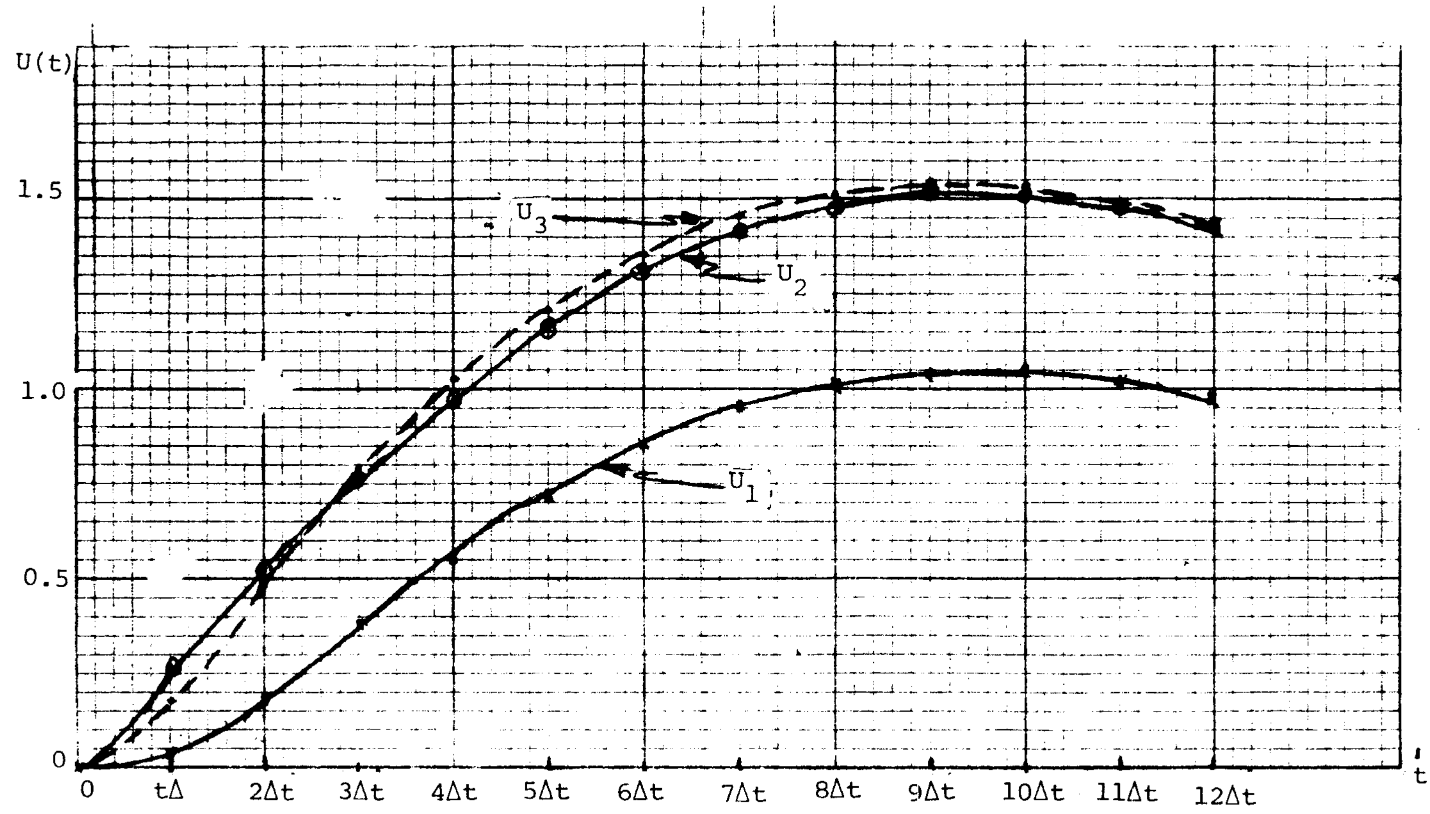
$m_1=1,\quad m_2=2,\quad m_3=3,\quad k_1=2,\quad k_2=4,\quad k_3=4,\quad k_4=2$

$C_1=2,\quad C_2=4,\quad C_3=4,\quad C_4=2,\quad R_1=0,\quad R_2=1,\quad R_3=2$

$$U^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dot{U}^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ddot{U}^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

نتیجه:

از آنجائیکه امروزه وجودکامپیوترهای عظیم تحلیل مسائل پیچیده رادرزمینه های مختلف پیش کشیده به‌موازات آن تحقیقات وسیعی‌نیز در زمینه تهیه آلگوریتم های مناسب انجام می‌پذیردتا این تحلیل هارا امکان پذیر نماید. اهمیت این موضوع را می‌توان در کتاب‌های درسی‌وحتی ایجاد مراکز تحقیقات در دانشگاههای معتبر مشاهده نمود آنچه در این مقاله ارائه شده یکی‌از روش های تهیه پاسخ دینامیکی سیستم های ارتعاشی است‌که درمورد یک دستگاه‌ارتعاشی با سه‌درجه‌آزادی بکارگرفته شده‌است‌باین‌امید که‌زمینه‌فکری و تحقیقاتی در مورد روشهای تحلیلی به‌کمک کامپیوتر فراهم گردد.



شکل ۲