بهترین فاصله بین ایستگاه ها در یک خط راه‌آهن

نوشته : هاشم مهرآذین
دانشیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده

درمقاله زیرایجاد یک خط‌آهن بین‌شهری، حومه‌ویا شهری بررسی شده وسعی شده است‌که باتوجه به مشخصات وامکانات فنی لکوموتیوهایعنی شتاب وسرعت حداکثر، تعداد بهینه ایستگاهها برای یک طول مشخص خط‌آهن و یک توزیع ترافیک مفروض معین گردد.

معیارتعیین فاصله بهینه فقط زمان کل صرف شده‌برای تمام مسافران یعنی‌حاصل جمع تعداد مسافران هر ایستگاه درزمان سفر هر یک از آنها است. پس از بررسی نظری مسئله، تعدادی مثال برای‌موارد متفاوت وبا توجه به سرعت و زمان توقف متداول قطارها در ایستگاههای کشورهای صنعتی داده شده است.

لازم به‌تذکراست که این بررسی فقط جنبه کاملا "نظری دارد ودر عمل باید پارامترهای بسیار دیگری از جمله توپوگرافی منطقهٔ مورد عبور خط‌آهن، توسعه اقتصادی موجود و پیش بینی شده در این منطقه، تراکم جمعیت وپیش بینی های مربوط به افزایش آن، در آمد سرانه افراد این منطقه، زیر بناهای موجود یا پیش بینی شده برای سایر وسایل حمل و نقل، مخارج و قیود مربوط به بهره برداری و نیز برنامه های آبادانی منطقه‌ای و جرانیها را در حل چنین مسائلی در نظر گرفت.

با این همه چنین مطالعاتی می‌توانند عوامل موثری برای هدایت مهندسین راه و ترابری و شهرسازی برای بررسی های همه جانبه‌تری در طرح واجرای برنامه های آبادانی وتوسعه منطقه ای باشند.

۱ ــ مقدمه:

می‌خواهیم در منطقه‌ای خط‌آهنی به طول L ایجاد کنیم ودر طول این خط‌آهن تعدادی ایستگاه احداث نمائیم به‌طوری که کل‌جمعیت منطقه‌عبورکه‌آن رابا P نشان‌می‌دهیم طبق قانون معینی در اطراف هریک از ایستگاه ها توزیع شده باشد. وزمان کل سفربرای‌تمام مسافران‌برای‌رسیدن به انتهای خط که آنراایستگاه‌مرکزی‌می‌نامیم کمینه‌باشد. برای این منظور ایستگاهها را با شماره های، ۱، ۲، n+1 مشخص می‌کنیم به طوری که ایستگاه شماره ۱ ابتدای خط و ایستگاه شماره n + ۱ انتهای آن یعنی ایستگاه مرکزی باشد. به علاوه فرض‌می‌کنیم که تمام رفت و آمدهای قطارها از یکی از ایستگاهها ۱ تا n شروع شده و به‌ایستگاه مرکزی‌ختم شوند ودر جهت عکس از ایستگاه مرکزی شروع شده‌و به‌ایستگاههای شماره‌n تا ۱پایان یابند به عبارت دیگرفرض می‌کنیم که تعداد مسافرت ها از ایستگاههای۱ تا n بین خودشان ناچیز و قابل اغماض اند.

باید متذکر شد که در اغلب موارد چه در خطوط آهن بین شهری وچه‌در خطوط حومه وضع این گونه است و که تقریبا "مقصد تمام مسافران در ایستگاه مرکزی شهر است. در مورد خطوط متروی شهری هم می‌توان به جای یک ایستگاه مرکزی یک قطعه خط مرکزی مرکب از چند ایستگاه را در نظر گرفت. ولی‌ماهیت مسئله‌تااولین‌ایستگاه‌مرکزی‌مانندحالت‌های قبلی است. زیرا به‌جای‌این که همه مسافران در ایستگاه شماره n +۱ پیاده‌شوند درایستگاههای‌شماره n+۱ تا n+K که‌در آن k تعدادایستگاههای‌قطعه‌مرکزی‌است‌پیاده‌می‌شوندولی طرح مسئله‌برای‌ایستگاههای۱ تا n درست مثل حالت‌خطوط راه‌آهن حومه و بین شهری است. این مسئله در جهت عکس می‌تواند در بهره‌برداری‌از خطوط موجود نیز مطرح گردد و آن هنگامی

است که می‌خواهیم بهترین طول مسیر ممکن برای مبداومقصد حرکت قطارهاوتعداد ایستگاههائی را که ایـن قطـار ها باید با توجه به فواصل بین ایستگاهها و ترافیک هریک در آنها متوقف شوند معین کنیم.

در طرح این مسئله ابتداسعی شده است که مسئله‌در کلیترین حالت یعنی حالتی که هم فواصل ایستگاهها و هم توزیع جمعیت نامساوی است وهریک‌تابعی‌از فاصله ایستگاهها با ایستگاه مرکزی است‌بررسی شوند وسپس مثالهائی درموارد متفاوت و کم و بیش‌در ارتباط با واقعیت ذکر شده‌اند.

۲ ــ پارامترهای مسئله

پارامترهای‌متفاوتی‌که‌دراینجا‌به‌کاررفته‌اند‌چنین‌اند:

γ: شتاب سرعتگیری وترمزگیری که ثابت وبا یکدیگر برابر فرض شده‌اند.

V: سرعت حداکثر قطارها که مستقل ازنیمرخ طولـی راه فرض شده است.

v: سرعت پیاده‌روی که میانگین آن ۴/۵ کیلومتر در ساعت فرض شده است.

$t_{m,i}$: زمان میانگین دسترسی به ایستگاه شماره i برای مسافران ناحیه مربوطه.

t_a: زمان‌توقف‌قطارها‌درهرایستگاه‌که‌ثابت‌فرض‌شده‌است.

t_{ij}: زمان پیمایش مسیر در قطار بین‌ایستگاههای i و j

P_i: جمعیت ناحیه اطراف ایستگاه i.

$y_i = \frac{P_i}{P}$: نسبت درصدجمعیت اسکان یافته در اطراف ایستگاه iکه در حالت کلی تابع i است.

λP_i: ترافیک مربوط‌به ایستگاه iدر یک جهت‌که در آن λ نسبت درصدافرادی است که از راه آهن استفاده می‌کنند وبرای تمام‌ایستگاهها یکسان فرض شده است.

x_i: فاصله بین‌ایستگاه‌شماره i و شماره $i + 1$ که در حالت کلی تابع i فرض شده است.

$D_{m,i}$: فاصله میانگین‌پیاده‌روی برای دسترسی به‌ایستگاه شماره i.

T: زمان کل برای مجموعه مسافران.

$\frac{V}{\gamma}$: زمان لازم برای رسیدن به سرعت Vیا زمـــان ترمزگیری قطارها.

$\frac{V^2}{2\gamma}$: فاصله افزایش سرعت یاترمزگیری.

به علاوه در تمام حالات روابط‌زیر برقرارند:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = L \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i = P \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

۳ ــ حالت کلی:

قبل ازهرچیزباید‌توجه کرد که این مسئله را مستقل از فاصله زمانی‌قطار ها یعنی تعداد آنها در ساعت یادر روزو سایر مسائل مربوط‌به بهره‌برداری مطالعه می‌کنیم. به سخن دیگر زمان‌انتظار مسافران درایستگاههارا به حساب نمی‌آوریم و فقط‌به دنبال‌حداقل زمان دسترسی وزمان پیمایش مسیردر قطار برای تمام مسافران می‌گردیم. دراین صورت زمان لازم برای رفتن‌از ناحیه i به ناحیه j از رابطه‌زیربه‌دست می‌آید:

$$t_{ij} = t_{m,i} + 2\frac{t_a}{2} + (j-i-1)t_a + 2(j-i)\frac{V}{\gamma} + \frac{x_i + x_{i+1} + \dots + x_{j-1}}{V} - (j-i)\frac{V}{\gamma}$$

که در آن نخستین $\frac{V}{\gamma}$ از طرف چپ‌زمان افزایش سرعـــت یا ترمزگیری‌را نشان می‌دهد و دومین $\frac{V}{\gamma}$ نسبت $\frac{V^2}{2\gamma}$ را به $\frac{V}{2}$ نشـان می‌دهـد. زیرا روی فواصـــل سرعتگیری و ترمزگیری میانگین سرعت $\frac{V}{2}$ است. رابطه‌بالارا به‌صورت ساده تر زیر نیز می‌توان نوشت:

$$t_{ij} = t_{m,i} + (j-i)\left(t_a + \frac{V}{\gamma}\right) + \frac{1}{V}\sum_{k=i}^{j-1} x_k$$

بنابراین‌زمان‌لازم‌برای رسیدن از ایستگاه شماره i به ایستگاه مرکزی برابر است با:

$$t_{i,n+1} = t_{m,i} + (n+1-i)\left(t_a + \frac{V}{\gamma}\right) + \frac{1}{V}\sum_{k=i}^{n} x_k$$

و زمان کل برای تمام مسافران از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \lambda P_i t_{m,i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda P_i (n+1-i)\left(t_a + \frac{V}{\gamma}\right) + \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n} \lambda P_i \sum_{k=i}^{n} x_k$$

اگر به‌منظور ساده‌تر کردن رابطه بالا

$$t_a + \frac{V}{\gamma} = K \quad , \quad P_i = P y_i$$

فرض شوند. نتیجه می‌گیریم:

$$T = \lambda P \sum_{i=1}^{n} y_i t_{m,i} + \lambda P K \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) y_i + \frac{\lambda P}{V}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} x_k\right) y_i$$

۴ ــ حالتی که زمان های دسترسی به ایستگاهها برابرند

اگر فرض کنیم که‌زمان میانگین‌دسترسی به ایستگاهها

برای تمام آنها برابر است وآن را با t_m نشان دهیم رابطه بالاشکل ساده تر زیر را پیدا می‌کند :

$$T=\lambda P t_m + \lambda P K \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) y_i + \frac{\lambda P}{V}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} x_k\right) y_i$$

این وضع وقتی پیش می‌آید که توزیع جمعیت در اطراف تمام ایستگاهها یکسان باشد.

۱ ـ ۴ ـ حالتی که تمام فواصل ایستگاهها با هم برابرند:

به منظور ساده تر کردن مسئله، ابتدا حالتی را در نظرمی‌گیریم که درآن نه‌تنهازمان دسترسی به ایستگاههابرای همه آنها برابر است بلکه فواصل ایستگاهها هم باهم مساوی وبرابر با $x_i=\frac{L}{n}$ هستند در این صورت

$$T=\lambda P t_m + \lambda P\left(K+\frac{L}{Vn}\right)\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i$$

برای‌دوتوزیع متفاوت‌جمعیت‌یعنی $y_i=\frac{1}{n}$ ، $y_i=\frac{2i}{n(n+1)}$ به نتایج زیرمی‌رسیم :

$$T=\lambda P t_m + \frac{\lambda P}{2}(n+1)\left(K+\frac{L}{nV}\right)$$

$$T=\lambda P t_m + \frac{\lambda P}{3}(n+2)\left(K+\frac{L}{nV}\right)$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر T را تابع پیوسته ای از n فرض کنیم برای $n \geqslant 1$

در توزیع اول

$$\frac{dT}{dn}=\frac{\lambda P}{2}\left(K-\frac{L}{V}\frac{1}{n^2}\right) \qquad \frac{d^2T}{dn^2}=\frac{PL}{Vn^3}>0$$

ودر توزیع دوم

$$\frac{dT}{dn}=\frac{\lambda P}{3}\left(K-\frac{2L}{V}\frac{1}{n^2}\right) \qquad \frac{d^2T}{dn^2}=\frac{4PL}{Vn^3}>0$$

کههر یک به ترتیب برای مقادیر

$$n=\sqrt{\frac{L}{KV}} \quad \text{و} \quad n=\sqrt{\frac{2L}{KV}}$$

می‌نیمم می‌شوند البته به شرط‌این که شرایط $L \geqslant KV$ و $2L \geqslant KV$ در مورد آنها برقرار باشد که معمولا چنین است.

برای اینکه برداشت‌دقیق‌تری‌درموردتاثیر هر یک از پارامترها روی تعداد بهینه ایستگاهها داشته باشیم به جای K مقدار آن را می‌گذاریم که پیدا می‌کنیم :

$$n=\sqrt{\frac{\gamma L}{V^2+\gamma t_a V}}$$

که وقتی V نسبتا" بزرگ است می‌توان از جمله $\gamma t_a V$ در برابر V^2 چشم پوشیدونوشت. $n \simeq \frac{\sqrt{\gamma L}}{V}$

مفهوم آن اینست که تعداد بهینه ایستگاههای یک خط متناسب با طول آن نیست، چیزیکه ممکن بود در نظر اول به فکر انسان برسد بلکه متناسب با جذر طول آنست به همین ترتیب است برای شتاب سرعتگیری وترمزگیری، در حالی که رابطه بالا نشان می‌دهد که تعداد ایستگاهها باید با سرعت حداکثر وسائط نقلیه نسبت معکوس داشته باشد. یعنی هرقدر سرعت قطارها بیشترباشد تعدادنقاط توقف آنهاباید کمتر باشد. این‌مطلب در توافق با بهره‌برداری‌است زیرا در بهره برداری نیز نباید قطارهای سریع را در تعداد زیادی ایستگاه متوقف کرد. چون صرفه‌جوئی در وقت ناشی از سرعت زیاد با توقف در تعداد زیادی ایستگاه خنثی می‌شود.

جدول شماره ۱ مثالهائی‌از کاربرد این نتایج را در مورد سرعت های حداکثر متداول روی خطوط متروی شهری و خطوط راه آهن حومه و جدول شماره ۲ مثالهائی را در مورد خطوط راه‌آهن بین شهری وتوربوترن می‌دهد. تمام مثالها مربوط به فرض اول یعنی توزیع برابر جمعیت در اطراف ایستگاه هاست. به منظور محدود کردن تعداد جداول و دستیابی به‌نتایج صحیح‌در آنها، n به‌عنوان‌عدد مفروض انتخاب‌شده‌است‌و x و L به صورت‌تابعی‌ازآن‌حساب شده‌اند.

جدول ۱

n			۷	۶	۵	۴	۳
۹۰ = V برحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۴۵ ثانیه	x برحسب کیلومتر	۱۲/۲۵	۱۰/۵	۸/۷۵	۷	۵/۲۵
		L " " " "	۸۵/۷۵	۶۳	۴۳/۷۵	۲۸	۱۵/۷۵
۱ = γ " "متربر۲ (ثانیه)	t_a = ۱ دقیقه	x " " " "	۱۴/۸۷	۱۲/۷۵	۱۰/۶	۸/۵	۶/۳۷
		L " " " "	۱۰۴/۱	۷۶/۵	۵۳/۱	۳۴	۱۹/۱
۹۰ = Vبرحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۴۵ ثانیه	x برحسب کیلومتر	۱۳/۳۴	۱۱/۴۳	۹/۵۴	۷/۶۲	۵/۷
		L " " " "	۹۳/۴	۶۸/۶	۴۷/۷	۳۰/۵	۱۷/۱
۰/۸ = γ" " متر بر۲ (ثانیه)	t_a = ۱ دقیقه	x " " " "	۱۵/۹۷	۱۳/۷	۱۱/۴	۹/۱۲	۶/۸۳
		L " " " "	۱۱۱/۸	۸۲/۱	۵۷	۳۶/۵	۲۰/۵
۱۲۶ = Vبرحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۴۵ ثانیه	x برحسب کیلومتر	۱۹/۶	۱۶/۸	۱۴	۱۱/۲	۸/۴
		L " " " "	۱۳۷/۲	۱۰۰/۸	۷۰	۴۴/۸	۲۵/۲
۱ = γ " " متربر۲ (ثانیه)	t_a = ۱ دقیقه	x " " " "	۲۳/۲۵	۱۹/۹۵	۱۶/۶	۱۳/۳	۱۰
		L " " " "	۱۶۲/۹	۱۱۹/۷	۸۳/۱	۵۳/۲	۳۰
۱۲۶ = V برحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۴۵ ثانیه	x برحسب کیلومتر	۲۱/۷۴	۱۸/۶۴	۱۵/۵۴	۱۲/۴۲	۹/۳۳
		L " " " "	۱۵۲/۲	۱۱۱/۸	۷۷/۷	۴۹/۷	۲۸
۰/۸ = γ " " متربر۲ (ثانیه)	t_a = ۱ دقیقه	x " " " "	۲۵/۴۱	۲۱/۷۸	۱۸/۱۶	۱۴/۵۲	۱۰/۹
		L " " " "	۱۷۷/۹	۱۳۰/۷	۹۰/۸	۵۸/۱	۳۲/۷

جدول ۲

n			۷	۶	۵	۴	۳
۱۸۰ = V برحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۲ دقیقه	x برحسب کیلومتر	۵۹/۵	۵۱	۴۲/۵	۳۴	۲۵/۵
		L " " " "	۴۱۶/۵	۳۰۶	۲۱۲/۵	۱۳۶	۷۶/۵
۱ = γ" " متربر^{۲} (ثانیه)	t_a = ۳ دقیقه	x " " " "	۸۰/۵	۶۹	۵۷/۵	۴۶	۳۴/۵
		L " " " "	۵۶۳/۵	۴۱۴	۲۸۷/۵	۱۸۴	۱۰۳/۵
۱۸۰ = Vبرحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۲ دقیقه	x برحسب کیلومتر	۶۳/۹	۵۴/۷۵	۴۵/۶	۳۶/۵	۲۷/۴
		L " " " "	۴۴۷	۳۲۸/۵	۲۲۸	۱۴۶	۸۲/۲
۰/۸ = γ " "متربر^{۲} (ثانیه)	t_a=۳دقیقه	x " " " "	۸۴/۹	۷۲/۷۵	۶۰/۶	۴۸/۵	۳۶/۴
		L " " " "	۵۹۴/۲	۴۳۶/۵	۳۰۳	۱۹۴	۱۰۹/۲
۳۶۰ = Vبرحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۳ دقیقه	x برحسب کیلومتر	۱۹۶	۱۶۸	۱۴۰	۱۱۲	۸۴
		L " " " "	۱۳۷۲	۱۰۰۸	۷۰۰	۴۴۸	۲۵۲
۱ = γ" "متربر^{۲} (ثانیه)	t_a = ۵ دقیقه	x " " " "	۲۸۰	۲۴۰	۲۰۰	۱۶۰	۱۲۰
		L " " " "	۱۹۶۰	۱۴۴۰	۱۰۰۰	۶۴۰	۳۶۰
۳۶۰ = Vبرحسب کیلومتر در ساعت	t_a = ۳ دقیقه	x برحسب کیلومتر	۲۱۳/۵	۱۸۳	۱۵۲/۵	۱۲۲	۹۱/۵
		L " " " "	۱۴۹۴/۵	۱۰۹۸	۷۶۲/۵	۴۸۸	۲۷۴/۵
۰/۸ = γ " " متربر^{۲} (ثانیه)	t_a = ۵ دقیقه	x " " " "	۲۹۷/۵	۲۵۵	۲۱۲/۵	۱۷۰	۱۲۷/۵
		L " " " "	۲۰۸۲/۵	۱۵۳۰	۱۰۶۲/۵	۶۸۰	۳۸۲/۵

۲ ـ ۴ ـ فواصل ایستگاه ها با یکدیگر نابرابرند:

حال فرض می‌کنیم که وقتی i افزایش پیدا می‌کند x_i کاهش می‌یابد. به سخن دیگر هر قدر به ایستگاه مرکزی نزدیک می‌شویم فاصله ایستگاهها از یکدیگر کمتر می‌شود. به عنوان مثال فرض کنیم که x_i با رابطه

$$x_i=\frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}L \qquad \text{وشرط} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i=L$$

داده شده باشد در این حالت T به‌صورت زیردرمی‌آید

$$T=\lambda Pt_m+\lambda PK\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)y_i+\frac{\lambda PL}{V}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2(n+1-i)}{n}+\frac{i(i-1)}{n(n+1)}-1\right]y_i$$

۱ ـ ۲ ـ ۴ ـ فرض اول: توزیع یکسان جمعیت.

در این حالت فرض می‌کنیم که جمعیت ودر نتیجه ترافیک مربوط به هریک از ایستگاهها با هم برابر باشند، یعنی $P_i=\frac{P}{n}$ و $y_i=\frac{1}{n}$ که پس از جایگزین کردن در عبارت مربوط به T به نتیجهٔ زیر منتهی می‌شود:

$$T=\lambda Pt_m+\lambda PK\frac{n+1}{2}+\frac{\lambda PL}{V}\frac{n+2}{3n}$$

مشتقهای مرتبه اول ودوم این عبارت‌نسبت‌به n عبارتنداز:

$$\frac{dT}{dn}=\lambda P\left(\frac{K}{2}-\frac{2L}{3Vn^2}\right) \qquad \frac{d^2T}{dn^2}=\frac{4\lambda PL}{3Vn^3}$$

از رابطه $\frac{dT}{dn}=0$ نتیجه می‌شود $n=\sqrt{\frac{4L}{3KV}}$

وچون برای $n>0$ ، $\frac{d^2T}{dn^2}>0$ است پس وقتی n برابر مقدارحساب شده در بالا اختیار شود T می‌نیمم می‌شود. در اینجا ملاحظه می‌کنیم که عبارت پیدا شده برای n نظیر نتایج پیدا شده در ۱ ـ ۴ بوده و واختلاف آن با عبارت فرض اول ۱ ـ ۴ در ضریب $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ است.

در جدول شماره ۳ مثالهائی در ارتباط با این‌حالت برای سرعتهای متفاوت وبافرض $\gamma=1m/s^2$ داده شده است.

۲ ـ ۲ ـ ۴ ـ توزیع نابرابر جمعیت:

در این حالت فرض می‌کنیم که جمعیت ودر نتیجه ترافیک مربوط به ایستگاهها با یکدیگر نابرابر ند. به سخن دیگر حالتی را در نظر می‌گیریم که هر قدر به ایستگاه مرکزی نزدیک می‌شویم فواصل ایستگاهها کمتر می‌شود و ترافیک افزایش می‌یابد. برای این منظور فرض می‌کنیم که x_i و y_i به‌صورت:

$$x_i=\frac{2(n+i-i)}{n(n+1)}L \quad \text{و} \quad y_i=\frac{2i}{6n(n+1)}$$

در این حالت پس از محاسبات لازم پیدا می‌کنیم:

$$T=\lambda Pt_m+\frac{\lambda PK}{3}(n+2)+\frac{\lambda PL}{V}\frac{n^2+n+4}{6n(n+1)}$$

مشتقهای مرتبه اول ودوم T نسبت به n به‌صورت زیرند:

$$\frac{dT}{dn}=\frac{\lambda P}{3}\left(K-\frac{2L}{V}\frac{2n+1}{n^2(n+1)}\right)$$

$$\frac{d^2T}{dn^2}=\frac{2\lambda PL}{3V}\frac{4n^2+5n+2}{n^3(n+1)^2}$$

اگر $\frac{dT}{dn}$ را برابر صفر قرار دهیم n بهینه‌ازرابطه: $\frac{dT}{dn}$: $K-\frac{2L}{V}\times\frac{2n+1}{n^2(n+1)}=0$ به‌دست می‌آید به سخن دیگر n ریشه معادلهٔ درجه سوم زیر است.

$$KVn^3+KVn^2-4Ln-2L=0$$

درجهت‌عکس می‌توان L رابه‌صورت‌تابعی‌از n بهینه ازرابطه زیر به‌دست آورد

$$L=\frac{KVn^2(n+1)}{2(2n+1)}$$

با توجه به‌این که برای $n>0$ رابطه $\frac{d^2T}{dn^2}>0$ همواره برقراراست‌بنابراین مقدار n به دست آمده از معادله درجه سوم فوق مربوط به کمینه تعداد ایستگاهها است.

۵ ـ بحث ونتیجه گیری

از بررسی آنچه‌ذکرشد نتیجه می‌شود که جز درحالت ۲ ـ ۲ ـ ۴ n بهینه با اختلاف یک ضریب ثابت به صورت تابعی از L و γ و V به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$n=\sqrt{\frac{L}{KV}}=\sqrt{\frac{\gamma L}{V^2+\gamma t_a V}}$$

ضریب ثابت در یک حالت $\sqrt{۲}$ ودرحالت دیگر $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ است.

اگر γ و V رامقادیرثابتی‌فرض کنیم ملاحظه می‌کنیم که $n=\sqrt{\frac{1}{KV}}L^{\frac{1}{2}}$ یعنی n تابعی از $\sqrt{L}$ است و بنابراین تابعی‌است افزایشی‌از L که برای $L=0$ برابرصفرمی‌شود. اگر L و V را مقادیری ثابت فرض کنیم وبخواهیم تغییرات n بهینه را برحسب γ مطالعه کنیم ملاحظه می‌کنیم که برای

$\gamma = 0$, n برابر صفر است واگر γ خیلی بزرگ شود n به سمت $\sqrt{\frac{L}{t_a V}}$ میل می‌کند یعنی خط $n = \sqrt{\frac{L}{t_a V}}$ مجانب منحنی است به‌علاوه

$$\frac{dn}{d\gamma} = \frac{LV^2}{2\sqrt{\gamma L(V^2+\gamma t_a V)^3}} > 0$$

بنابراین منحنی تغییرات n برحسب γ یک تابع افزایشی است که از مرکز مختصات می‌گذرد و خط $n = \sqrt{\frac{L}{t_a V}}$ مجانب آنست.

حال اگر γ و L را ثابت فرض کنیم یعنی حالتی را در نظر بگیریم که طول خط ومشخصات مکانیکی لکوموتیوها مشخص باشند و n را به صورت تابعی از V مطالعه کنیم، مشتق n برحسب V برابر است با

$$\frac{dn}{dV} = \frac{-\gamma L(2V+\gamma t_a)}{2\sqrt{\gamma L(V^2+t_a V)^3}}$$

به علاوه وقتی V به سمت صفر میل می‌کند n به سمت بینهایت میل می‌کندو وقتی V به سمت بینهایت میل می‌کند n به سمت صفرمیل می‌کند یعنی منحنی تغییرات n برحسب V شبیه به یک شاخه منحنی هموگرافیک است.

در حالت ۲ ـ ۲ ـ ۴ ـ همانطور که ملاحظه کردیم رابطه بین L و n به صورت $L = \frac{KVn^2(n+1)}{2(2n+1)}$ است.

حال اگر برای سهولت در بحث حالتی را که n باندازه کافی بزرگ است مثلا $n \geqslant 5$ در نظر بگیریم ملاحظه می‌کنیم که بدون اشتباه زیاد می‌توان در رابطه بالا عدد ۱ را در برابر $2n$ حذف کرد و بنابراین رابطه به‌صورت ساده تر: $L \simeq \frac{KVn(n+1)}{4}$ در می‌آید.

به سخن دیگر n ریشه معادله درجه دوم $n^2+n-\frac{4L}{KV}=0$ است،

یعنی n از رابطه $n = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{16L}{KV}}}{2}$ به دست می‌آید.

اگر در اینجا از عدد ۱ در برابر $\frac{16L}{KV}$ که عدد بزرگی است چشم پوشی کنیم n به‌طور تقریبی ازرابطه زیر به دست می‌آید.

$$n \simeq 2\sqrt{\frac{L}{KV}} - 1/2$$

یعنی در اینجا نیز منحنی تغییرات n برحسب هریک از پارامترهای L و K و V شبیه به حالتهای قبل است با این تفاوت که ضریب ثابت عدد ۲ است و منحنی به اندازه ۱/۲ ـ نسبت به محور عرضها انتقال پیدا کرده است.

مرجعها

1) Interstation optimale sur une ligne de chemin de fer H.MEHRAZINE.1977

2) Principles of operations Research HARVEY-M. WAGER 1979

3) Recherche opérationnelle R.FURE 1972

۵ ـ هاشم مهرآدین فاصله زمانی حداقل بین دوقطارمتوالی، نشریه‌دانشکده‌فنی، شماره ۳۸، خرداد ۱۳۵۷ صفحه۲تا ۲۰

جدول ۳

L(km)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		فاصله بین ایستگاهها به کیلومتر
۱۱/۸	۵/۹۰	۳/۹۳	۱/۹۷	–	–	–	–	n = ۳	V = ۹۰ برحسب کیلومتر در ساعت
۲۱	۸/۴۰	۶/۳۰	۴/۲۰	۲/۱۰	–	–	–	n = ۴	
۳۲/۸	۱۰/۹۴	۸/۷۵	۶/۵۶	۴/۳۷	۲/۱۹	–	–	n = ۵	t_a = ۴۵ " " ثانیه
۴۷/۲۵	۱۳/۵۰	۱۱/۲۵	۹/۰۰	۶/۷۵	۴/۵۰	۲/۲۵	–	n = ۶	
۶۴/۳	۱۶/۰ ۸	۱۳/۷۸	۱۱/۴۸	۹/۱۹	۶/۸۹	۴/۵۹	۲/۳۰	n = ۷	
۲۲/۴	۱۱/۲۱	۷/۴۶	۳/۷۳	–	–	–	–	n = ۳	V = ۱۲۶ برحسب کیلومتر درساعت
۳۹/۹	۱۵/۹۶	۱۱/۹۷	۷/۹۸	۳/۹۹	–	–	–	n = ۴	
۶۲/۵	۲۰/۸۳	۱۶/۶۷	۱۲/۵۰	۸/۳۳	۴/۱۷	–	–	n = ۵	t_a = ۱ " " دقیقه
۸۹/۸	۲۵/۶۵	۲۱/۳۸	۱۷/۱۰	۱۲/۸۳	۸/۵۶	۴/۲۸	–	n = ۶	
۱۲۲/۲	۳۰/۵۵	۲۶/۱۹	۲۱/۸۲	۱۷/۴۶	۱۳/۰۹	۸/۷۳	۴/۳۶	n = ۷	
۵۷/۴	۲۸/۷۰	۱۹/۱۳	۹/۵۷	–	–	–	–	n = ۳	V = ۱۸۰ برحسب کیلومتر در ساعت
۱۰۲	۴۰/۸۰	۳۰/۶۰	۲/۴۰	۱۰/۲۰	–	–	–	n = ۴	
۱۵۹/۴	۵۳/۱۳	۴۲/۵۱	۳۱/۸۸	۲۱/۲۵	۱۰/۶۳	–	–	n = ۵	t_a = ۲ " " دقیقه
۲۲۹/۴	۶۵/۵۷	۵۴/۶۴	۴۳/۷۱	۳۲/۷۹	۲۱/۸۶	۱۰/۹۳	–	n = ۶	
۳۱۲/۴	۷۸/۱۰	۶۶/۹۴	۵۵/۷۹	۴۴/۶۳	۳۳/۴۷	۲۲/۳۱	۱۱/۱۶	n = ۷	
۱۸۹	۹۴/۵	۶۳	۳۱/۵	–	–	–	–	n= ۳	V = ۳۶۰ برحسب کیلومتر در ساعت
۳۳۶	۱۳۴/۴	۱۰۰/۸	۶۷/۲	۳۳/۶	–	–	–	n= ۴	
۵۲۵	۱۷۵	۱۴۰	۱۰۵	۷۰	۳۵	–	–	n = ۵	t_a = ۳ " " دقیقه
۷۵۶	۲۱۶	۱۸۰	۱۴۴	۱۰۸	۷۲۲	۳۶	–	n= ۶	
۱۰۲۹	۲۵۷/۲	۲۲۰/۵	۱۸۳/۸	۱ ۱۴۷	۱۱۰/۳	۷۳/۵	۳۶/۷	n= ۷	