صفحه گرد زیر بار قرینه

نوشتهٔ
مهندس عباس تاد
استاد دانشکده فنی

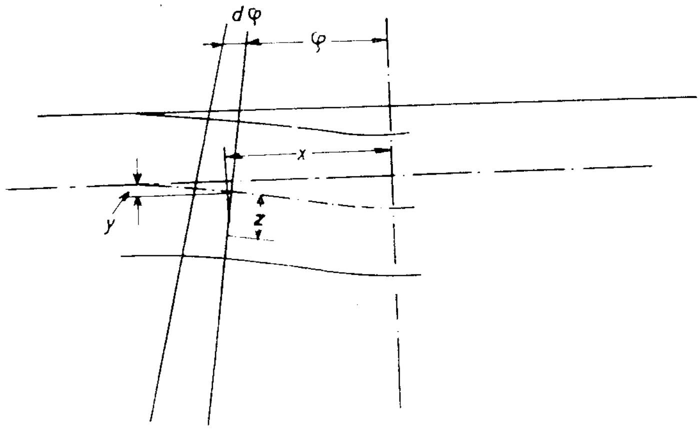
در این مبحث بار وارد بر صفحه را باری در نظر میگیریم که بطور یکنواخت روی صفحهٔ گسترده شده باشد ویا یک بار منفردی که بطور قائم بر مرکز صفحه تأثیر نموده باشد البته تجزیه و تحلیلی که بعمل خواهدآمدتأثیر انواع بارهای دیگری را هم مجاز میداند مشروط برآنکه قرینه نسبت بمرکز صفحه باشد.

دیگر اینکه قرار میگذاریم صفحه مورد بحث درمحیط خود بطور گیردار یا بطریق آزاد متکی شده باشد. درموردی که محیط صفحه بطور آزادانه متکی است بعکس خمش درتیرها مطلب مشکل وپیچیده‌تر از اتکای گیردار میگردد زیرا در این قبیل موارد زائده‌ای از صفحه که در خارج از محل اتکاء بوجود می‌آید روی مقاطع داخل محل اتکاء تأثیراتی میگذارد که بحساب آوردن آنها بسیار بحث را مشکل می‌کند. برای سهولت امر کوشش میشود تا حد ممکن این زائده را کوچک گرفت تا از اثر آن با تقریب نزدیک به یقین صرف نظر کرد. اساس بحث مادراین فصل برپایه استدلالی است که روی تیرهای زیرخمش کردیم. با این تفاوت که آنجا میان تار تیر را ملاک قرار داده و در اینجا میان صفحه را در نظر میگیریم البته همان طور که ارتفاع منحنی الاستیک تیر را با y نشان میدادیم در اینجاهم ارتفاع میان‌صفحه‌الاستیک‌تیر را در مقطعی که از یک برش عمودی در امتداد قطر صفحه حاصل میگردد با y نشان داده واز تغییر مکانهای افقی نقاط صفحه که پس از تأثیر بار حاصل میشود ومقدار آن بسیار ناچیز میباشد بمانند سابق صرف نظر میکنیم. اصل برنولی را هم در اینجا معتبر می‌شناسیم باین مفهوم که قبول میکنیم کلیه‌مقاطع صفحه بعد از خمش هم بمانند قبل مسطح می‌مانند و در نظر میگیریم که بایستی کلیه تغییرات کوچک بوده و درحدود ارتجاعی باشد.

بادر نظرگرفتن شرایط مذکور درشکل زیر نقطه‌ای از صفحه خمیده شده را که بفاصله X از مرکز صفحه و بفاصله Z از میان صفحه قراردارد و بعد از این با Z نام گذاری می‌کنیم درنظرگرفته و تغییرات حاصله آنرا نسبت بقبل از خمش تعیین مینمائیم. محیط دایره‌ای که نقطه Z روی آن قراردارد بعداز خمش صفحه ازدیادطولی حاصل می‌کند که اگربرطول اولیه آن تقسیم نمائیم انبساط نسبی بترتیب زیرحاصل میشود.

$$\varepsilon_t = \frac{(x+z\varphi)2\pi - x \, . \, 2\pi}{2\pi \, . \, x} = \frac{z\varphi}{x} = \varepsilon_t$$

حال برای آنکه انبساط نسبی‌حاصل‌را در امتدادشعاع x تعیین نمائیم عمود ثانوی‌برمیان‌صفحه‌را که بازاویه



$d\varphi$ از عمود اولیه متفاوت می‌باشددر نظرگرفته وازدیادطولی راکه فاز مربوط به نقطه z با فاز میان صفحه پیدا می‌کند تعیین نموده وچنین می‌نویسیم :

$$dx + \Delta dx = (\rho + z)d\varphi \qquad \varepsilon_r = \frac{(dx + \Delta dx) - dx}{dx}$$

$$ds \simeq dx = \rho d\varphi$$

$$\varepsilon_r = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{dx} \qquad \varepsilon_r = \frac{z d\varphi}{dx}$$

براساس قانون هوك و با توجه بمقادیر حاصله می‌توانیم بنویسیم :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) = \frac{z d\varphi}{dx} \qquad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) = \frac{z\varphi}{x}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) \qquad \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t)$$

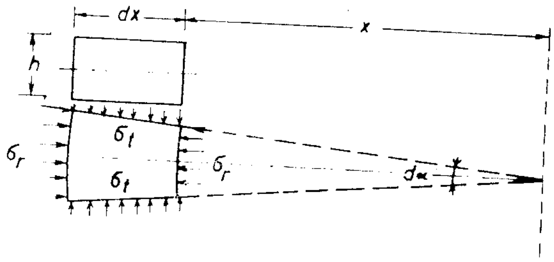
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{x} + \mu\frac{d\varphi}{dx}\right) z \qquad \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \mu\frac{\varphi}{x}\right) z$$

حال که‌مقادیر σ_t تنش مماسی و σ_r تنش شعاعی دریک نقطه‌بدست آمد برای حل معادلات آنها یک‌عنصر بی نهایت کوچک‌صفحه مذکور را با عبور دو برش‌شعاعی بفاصله $d\alpha$ ودوبرش استوانه‌ای بفاصله dx مانند

شکل زیر در نظر گرفته و با اعمال اثر سایر قسمتهای صفحه روی مقاطع حاصله عنصر مذکور را بحال تعادل قرار میدهیم.

در مرتبه اول هر عنصر سطحی dF روی یک مقطع شعاعی متقابل است با عنصر سطحی dF روی مقطع شعاعی دیگر و اگر نیروی وارد بر هر عنصر را مساوی $\sigma_t dF$ بگیریم امتداد آنها در نقطه‌ای از صفحه قرینه عنصر کوچک مفروض یک دیگر را قطع می‌نمایند و برآیند آن دو مساوی $\sigma_t dF d\alpha$ میشود.

با توجه باینکه عنصر بی‌نهایت کوچک صفحه که در شکل نشان داده شده پس از تغییر شکل قسمت



بالای میان صفحه زیر تأثیر σ_t فشاری وقسمت پائین میان صفحه زیر تأثیر σ_t کششی قرار خواهد گرفت مجموع مقادیر $\sigma_t dF d\alpha$ در دو قسمت مذکور ایجاد کوپلی می‌نمایند که جهت آن برخلاف گردش عقربه ساعت و مقدار آن مساویست با :

$$M = d\alpha \int \sigma_t dF . z = d\alpha \int \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{x} + \mu \frac{d\varphi}{dx}\right) zdF . z \quad \text{تمام } \sigma_t \text{ ها}$$

$$M = d\alpha \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{x} + \mu \frac{d\varphi}{dx}\right)\int dFz^2$$

با توجه باینکه $\int dF . z^2$ ممان دینرسی مقطع شعاعی است و مساوی با $\frac{h^3}{12} dx$ میباشد رابطه بالا را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم.

$$M = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{x} + \mu \frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{h^3}{12} . dxd\alpha \quad \text{برای تمام } \sigma_t \text{ ها}$$

در مرتبه دوم مقطع استوانه‌ای بشعاع x که در قسمت بالای میان صفحه است زیر تأثیر تنش شعاعی بطور فشاری قرار دارد و در قسمت پائین میان صفحه کلیه عناصر سطحی dF آن زیر تأثیر تنش σ_r کششی واقع شده است. از نتیجه آنها کوپلی ایجاد میگردد که در خلاف جهت گردش ساعت و مقدار آن مساویست با :

$$\int \sigma_r dF . z = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \mu \frac{\varphi}{x}\right)\int dF . z^2$$

و با توجه باینکه انتگرال $\int dF . z^2$ مساوی مقدار ممان دیزسی مقطع استوانه‌ای بی‌نهایت کوچک است که می‌توان آنرا برابر با مستطیلی بعرض $xd\alpha$ و ارتفاع h گرفت و مساوی $\frac{h^3}{12} xd\alpha$ قرار داد چنین

خواهیم داشت :

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}.x+\mu\varphi\right)\frac{h^3}{12}\,d\alpha$$

درمقطع استوانه‌ای مقابل که بفاصله dx از مقطع قبلی قراردارد نیز کوپلی ایجاد می‌گردد که مقدار آن باندازه نمو بی‌نهایت کوچکی که کوپل قبلی نموده بیشتر است ضمناً گردش آن موافق جهت گردش عقربه ساعت میباشد که براساس قرار قبلی با علامت مثبت مشخص میگردد با توجه باین توضیح براینداین دو کوپل با درنظرگرفتن علائم آنها همان مقدار نمو بی‌نهایت کوچک کوپل قبلی است که آنهم مساوی با مشتق رابطه بالائی می‌باشد.

$$M=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}x+\frac{d\varphi}{dx}+\mu\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{h^3}{12}\,dx\,d\alpha \quad \text{تمام } \sigma_r \text{ ها}$$

تا به اینجاصفحه موردبحث زیر تأثیر هرگونه باری قرارمیگرفت معادلات حاصله بهمین ترتیب تشکیل می‌یافت البته بشرط آنکه بار مذکورنسبت بمرکز صفحه قرینه باشد. ولی در مورد کوپل دیگری که در نتیجه نیروی عرضی واقع روی دو مقطع استوانه‌ای ایجاد میگردد برحسب نوع بارهای قرینه معادلات متفاوتی پیدا میکند. در این مورد فرض میشود که صفحه‌مورد نظر زیرتأثیر باریک نواختی باشدت p برواحد سطح واقع شده است. نظیر این فرض صفحه مدوری است که بعنوان درپوش روی‌استوانه‌ای که از داخل زیر فشارآب یا گاز قرار دارد بکار رفته است. نسبت عرض مقطع استوانه‌ای که جزئی از پیرامون دایره بشعاع x می‌باشد بمحیط دایره مساوی با $\frac{d\alpha}{2\pi}$ است. حال‌چنانچه درنظر بگیریم که مقدار بار وارد برصفحه با سطحی‌مساوی با πx^2 بمقدار $p\pi x^2$ می‌باشد نیروی عرضی که بر مقطع استوانه‌ای تأثیر می‌کند مساوی خواهد شدبا

$$x^2\pi p\,\frac{d\alpha}{2\pi}=\frac{x^2p}{2}\,d\alpha.$$

نیروی‌عرضی در مقطع‌استوانه‌ای مقابل بمقدار نموی که در فاصله بی‌نهایت کوچک dx می‌نماید اضافه‌میباشد و کوپل این دونیرو که درجهت گردش عقربه ساعت است مساوی خواهد بود با :

$$M=\frac{x^2p}{2}\,d\alpha\,dx \quad \text{نیروی عرضی}$$

البته چون نمو نیروی‌عرضی مقطع ثانوی خود نسبت بمقدارنیروی‌عرضی‌ازکمیت‌های بی‌نهایت کوچک‌است از جمع کردن لنگر آن‌با جمله بالاصرف نظر مینمائیم. اینک‌با توجه بعلائمی که برای لنگرهای‌حاصله‌برحسب جهت گردش آنها ایجاد شده است معادله تعادل را به ترتیب زیر مینویسیم :

$$-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{x}+\mu\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{h^3}{12}\,d\alpha\,dx+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}x+\frac{d\varphi}{dx}+\mu\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{h^3}{12}\,dx\,d\alpha$$
$$+\frac{x^2p}{2}\,d\alpha\,dx=0$$

$$\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^3}{12}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\, x + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x}\right) + \frac{px^2}{2} = 0$$

بمنظور حل رابطه بالا طرفین معادله را درمقدار x ضرب نموده وجمله $p \cdot \frac{6(1-\mu^2)}{E \cdot h^3}$ را که مقادیر ثابتی هستند مساوی D قرارداده ورابطه بالا را به ترتیب زیر خلاصه می‌نمائیم .

$$\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{h^3}{12}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} x^2 + \frac{d\varphi}{dx}\, x - \varphi + \frac{px^3}{2} \cdot \frac{(1-\mu^2)12}{E \cdot h^3}\right) = 0$$

ویا :

$$x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Dx^3 = 0$$

حل معمولی معادله‌دیفرانسیل بالا بصورت زیر است :

$$\varphi = -\frac{D}{8}\, x^3 + Bx + \frac{C}{x}$$

که البته B و C مقادیر ثابتی‌هستند که با توجه بشرایط حدودی مسئله بدست می‌آید . بدین‌ترتیب که بازاء x مساوی صفر φ مساوی صفر بوده و مقدار ثابت C بناچار مساوی صفر میشود . برای تعیین مقدار ثابت B بدواً فرض میکنیم که صفحه موردمطالعه درمحیط خود بطورگیردار متکی است دراین صورت که مماس برمیان‌صفحه‌الاستیک بازاء $x=r$ منطبق برمحورافقی x بوده وبناچار φ مساوی‌صفر میشود علیهذا خواهیم داشت :

$$-\frac{D}{8}\, r^3 + Br = 0$$

ویا :

$$\varphi = -\frac{D}{8}\, x^3 + \frac{D}{8}\, r^2 \cdot x \qquad \text{و} \qquad B = \frac{D}{8}\, r^2$$

وبالاخره رابطه بصورت نهائی زیردر می‌آید .

$$\varphi = \frac{D}{8}\,(r^2x - x^3)$$

واگر مقدار ثابت D را در رابطه حاصله وارد کنیم خواهیم داشت :

$$\varphi = \frac{3(1-\mu^2)}{4E \cdot h^3}\, p(r^2x - x^3)$$

با پیدایش رابطه‌بالا می‌توانیم کلیه مقادیر تنش‌های σ_r و σ_t وهم‌چنین ارتفاع میان‌صفحه‌الاستیک‌را در تمام نقاط بدست آوردیم زیرا قبلاً داشتیم :

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x} = z(r^2 - x^2) \cdot \frac{D}{8} \qquad \varepsilon_r = \frac{zd\varphi}{dx} = z(r^2 - 3x^2) \cdot \frac{D}{8}$$

در مرکز صفحه محلی که x مساوی صفر است مقادیر ε_t و ε_r مساوی یکدیگر میشوند و مساوی با $\frac{D}{8} r^2 z$ میگردند و البته باید هم همین طور باشد. زیرا در یک مقطع شعاعی که ε_t در امتداد عمود بر آن در نقطه x مساوی با صفر قرار دارد برای مقطع شعاعی دیگری که عمود برمقطع قبلی است عنوان ε_r را بدست می‌آورد. این مقدار با ازدیاد مقدار x تفاوت حاصل نموده تا جائیکه در محیط صفحه بازاء $x=r$ مقدار ε_t مساوی صفر ومقدار ε_r مساوی با $\frac{D}{4} r^2 z$ — یعنی دو برابر قدر مطلق در مرکز صفحه میگردد.

چنانچه ملاحظه میشود محیط صفحه همواره دارای تنش ماکزیمم بوده وانتظار میرود که صفحات مذکور روی دایره‌ای که متکی شده‌اند ترک های مویی بردارند. با ذکر مطالب بالا مقدار ماکزیمم درنقطه‌ای که x مساوی با r و z مساوی با $\frac{h}{2}$ است مساوی خواهد شد با:

$$\sigma_{r_{max}} = \varepsilon_r \cdot E = \pm \frac{D}{4} r^2 \frac{h}{2} E = \pm \frac{6(1-\mu^2)}{E \cdot h^3 \cdot 4} p r^2 \frac{h}{2} \cdot E$$

$$\sigma_{r_{max}} = \pm \frac{\frac{3}{4}(1-\mu^2)}{h^2} r^2 p$$

وبرای $\mu = 0/3$ (عدد پواسون مربوط به فولاد معمولی) خواهیم داشت:

$$\underline{\sigma_{r_{max}} = \pm 0/68 \frac{r^2}{h^2} p}$$

با استفاده از رابطه های ε_t و ε_r مقدار σ_r و σ_t را برای کلیه نقاط صفحه با توجه بمقدار x و z آن می‌توانیم بدست آوریم.

اکنون میخواهیم مقدار y یعنی ارتفاع منحنی میان صفحه الاستیک تیر را در یک مقطع شعاعی بدست آوریم.

چنانچه میدانیم مقدار φ زاویه مماس برصفحه مذکور را در هرنقطه بامحور افقی x تعیین می‌نماید و باتوجه باینکه این زاویه درحدود ارتجاعی بسیار ناچیز است می‌توانیم $tg\varphi$ را با قوس φ برابر گرفته وبنویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = -tg\varphi \sim -\varphi = \frac{-D}{8} (r^2 x - x^3)$$

وبالاخره:

$$y = \frac{D}{8} \left(\frac{x^4}{4} - r^2 \frac{x^2}{2} \right) + c$$

مقدار ثابت c با توجه بشرایط حدودی مسئله بدست می‌آید باین ترتیب که اگر x مساوی r شود یعنی محلی که صفحه روی دایره خود متکی است ارتفاع y مساوی صفر میشود و لذا خواهیم داشت:

$$\cdot = \frac{D}{\text{٨}}\left(\frac{r^{\text{٤}}}{\text{٤}} - \frac{r^{\text{٤}}}{\text{٢}}\right) + c \qquad c = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\ \frac{D}{\text{٨}}\ r^{\text{٤}} = \frac{Dr^{\text{٤}}}{\text{٣٢}}$$

وبالاخره :

$$y = \frac{D}{\text{٨}}\left(\frac{x^{\text{٤}}}{\text{٤}} - r^{\text{٢}}\frac{x^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right) + \frac{Dr^{\text{٤}}}{\text{٣٢}} \quad \text{و} \quad y = \frac{D}{\text{٣٢}}(x^{\text{٢}} - r^{\text{٢}})^{\text{٢}}$$

برای تعیین ارتفاع ماکزیمم بازاء $x = \cdot$ و $\mu = \text{٠ر٣}$ خواهیم داشت :

$$y = \frac{\text{٦}(\text{١} - \text{٠ر٠٩})p}{E\ .\ h^{\text{٣}}\ .\ \text{٣٢}}\ r^{\text{٤}} = \frac{Dr^{\text{٤}}}{\text{٣٢}}$$

وبالاخره:

$$y_{max} = \text{٠ر١٧}\,\frac{pr^{\text{٤}}}{Eh^{\text{٣}}}$$