حرکت جانبی لکوموتیو درخط مستقیم

توسط

هاشم مهرآذین

استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده :

حرکت جنبی یا جانبی لکوموتیو وبطورکلی واگن‌ها در خط مستقیم که به‌آن لاسه هم میگویند ممکن است از مخروطی بودن چرخها یا از غیر یکنواختی خط ناشی شود.

دراینجا عامل اول مورد بررسی قرار می‌گیرد وحرکت مورد نظر به‌یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی منجر میشود. ودر چند حالت متفاوت در باره این معادله بحث خواهد شد.

ساده‌ترین حالت آن وقتی بدست میاید که از توانهای دوم y وy' که خیلی کوچک هستندصرفنظر شود. دراینصورت معادله بدست آمده از مرتبه دوم باضرائب ثابت یک معادله کلاسیک‌است که به‌آسانی قابل‌حل خواهد بود. اما در بررسی زیر سعی شده‌است که معادله غیر خطی ابتدا بعداز حذف y^2 وسپس بدون حذف y^2 مورد مطالعه قرارگیرد. در حالت اول معادله بدست آمده منجر به‌یک انتگرال بیضوی[1] می‌شود که جز دریک نقطه خاص قابل حل نیست و برای حل آن از بسط به سری استفاده میشود و یک جواب تقریبی برای آن بدست میآید.

درحالت دوم معادله غیر خطی ابتدا به‌یک معادله غیرخطی مرتبه اول تبدیل شده است اما چون معادله بدست آمده خود قابل حل نیست سعی شده است جوابهائی مثل $y=y_0+u$ که درآن y_0 جواب کلاسیک معادله خطی مرتبه‌دوم است بدست آید وباین ترتیب باتوجه به کوچک بودن توانهای‌دوم u و u' معادله‌های خطی مرتبه اول و دومی نسبت به u بدست میایند که باز خود به‌آسانی قابل حل نیستند در اینجا معادله مرتبه اول‌آن بااستفاده از بسط به‌سری حل شده است ومشاهده میشود که یک سری تابع است که توانهای ـ فردی از $\sin\omega x$ دارد وتوانهای زوج آن جملگی صفر هستند.

حرکت جانبی لکوموتیو

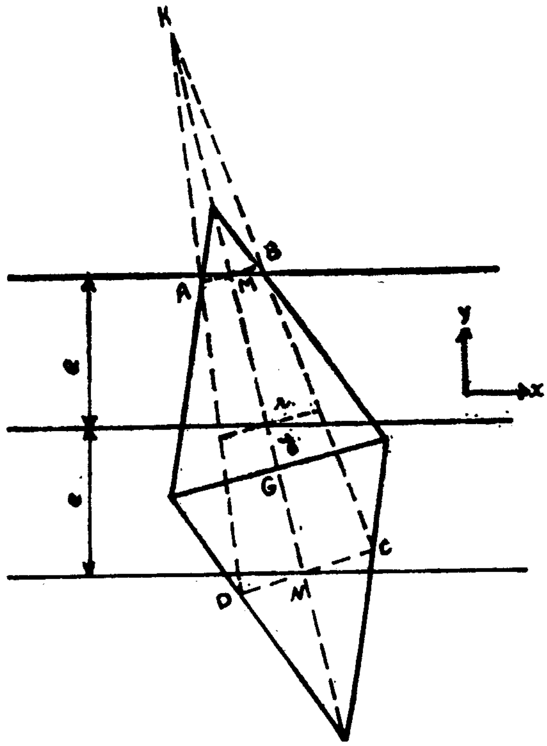
حرکت جنبی یا لاسه مهمترین حرکتی‌است که باید برای لکوموتیوها یابطورکلی هرمحور (یعنی مجموعه دوچرخ وسیله اتصال‌آنها) مطالعه کرد. در سالهای اخیر تحقیقات بسیاری در مورد آن شده است زیرا این حرکت‌میتواند باعث تغییر شکل خط وخارج شدن قطار از خط‌گردد ویکی از خطرناکترین حرکات دوره‌ای لکوموتیوهااست.

دوعامل اصلی حرکت جنبی عبارتنداز:
—مخروطی بودن طوقه چرخها .
— غیر یکنواختی خط در صفحه افقی:

دراینجا حرکتی که از مخروطی بودن چرخها ناشی میشود مطالعه شده است معادله ساده شده این حرکت در درس راهآهن تدریس میشود. اما دراینجا سعی شده است معادله دیفرانسیل حرکت بدون ساده شدن حل شود وجواب بدست آمده باجواب ساده شده مقایسه گردد.

۱ ـ معادله حرکت

دراین حرکت میتوان محور را مانند جسمی مرکب از دو مخروط که قاعده آنها بهم متصل است تصور کرد که روی دوریل موازی در راستاحرکت میکنند . اگر α زاویه یال مخروط باشد میتوان نوشت $i=tg\alpha$ که در آن i شیب یال مخروط یعنی شیب طوقه چرخهااست.



اگر r شعاع دایره چرخش متوسط چرخها باشد وفرض کنیم که دو مخروط در وضعی باشد که فاصله مرکز G آن از xx' محور طولی خط برابر y و عرض خط یعنی فاصله محور ریل یک طرف از محور ریل دیگر برابر $2e$ باشد ، مشاهده میشود که دو دایره چرخش دارای شعاع های زیر میباشند.

دایره چرخش AB	$r_1=r-iy$
CD » »	$r_2=r+iy$

اگر فرض کنیم که جسم دو مخروطی چرخش بدون لغزش انجام میدهد وضمناً در حرکت لحظهای آن دوایر چرخش AB وCD روی جسم دومخروطی تغییر مکان نمیدهند. حرکتلحظهای جسم دومخروطی معادلحرکت مخروطی است که دو دایره را بهم وصل میکند بطوریکه رأس آن محل تلاقی خطوط DAوCB است. دراینحرکت مخروطحول مولد KG میچرخد ونقطه K مرکز آنی دوران است که خود ثابت میماند. میتوان نوشت:

$$\frac{KM}{KN}=\frac{AM}{DN}$$

اگر $KG=\rho$ فرض شود رابطه $\frac{KM}{KN}=\frac{KG-e-y}{KG+e-y}$ برقرار است وبا توجه به‌اینکه $AM=\frac{1}{2}AB$ و $DN=\frac{1}{2}CD$ میتوان نوشت.

$$\frac{\rho-e-y}{\rho+e-y}=\frac{r-iy}{r+iy}$$

و از آنجا $\rho=\frac{iy^2+er}{iy}$ ازطرف دیگر میدانیم که : $KG=\rho=-\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ علامت منها به‌خاطر این است که KG خلاف جهت محور y ها است و ازآنجا اگر $\omega^2=\frac{i}{er}$ گذاشته شود نتیجه می‌شود :

$$\frac{-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{\omega^2y^2+1}{\omega^2y''}$$

۲ ـ حل معادله خطی

به‌طور معمول به‌علت کوچک‌بودن y ، y^2 و y'^2 را در معادله‌حذف می‌کنند ومعادله‌به‌صورت $y''+\omega^2y=\circ$ در میاید که جواب کلی آن به‌صورت $y=a\sin\omega x+b\cos\omega x$ است و اگر فرض کنیم که $y(\circ)=\circ$ است جواب به صورت $y=a\sin\omega x$ در میاید که یک حرکت سینوس با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{er}{i}}$ و با مقادیر معمول $e=0{,}75$ و $r=0{,}50$ و $i=\frac{1}{20}$ دوره تناوب متر $T=17{,}2$ بدست میاید.

۳ ـ حل معادله غیرخطی

معادله غیر خطی را در دو حالت حل می‌کنیم:

۳-۱ حالت اول: چون y خیلی کوچک است y^2 را ازمعادله حذف می‌کنیم ولی y'^2 را باقی نگاه‌میداریم. معادله بصورت زیر در میاید.

$$\frac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\omega^2y$$

اگر طرفین این معادله را در $2y'$ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{-2y'y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\omega^2(2yy')$$

که‌ازآن نتیجه می‌شود

$$\frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}=\omega^2y^2$$

برای حل این معادله دو روش وجود دارد یکی پارامتری کردن ، در اینصورت می‌بینیم که اگر $y'=tgt$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{\omega}\sqrt{\cos t}$ قرارداده شود درمعادله بالاصدق می‌کنند و از رابطه $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ بدست‌میاوریم.

$$tg\,t = -\frac{\sqrt{2}}{\omega}\,\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\,\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{\omega\sqrt{2}}\,\frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}}\,\frac{dt}{dx}$$

و ازآن نتیجه می‌شود که :

$$x = \omega\sqrt{2}\int\frac{-dt}{\sqrt{\cos t}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{\cos t}}$$

اگر می‌توانستیم انتگرال بالارا محاسبه کنیم جواب معادله دیفرانسیل بصورت $x = f(t)\quad y = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\sqrt{\cos t}$ بدست می‌آمد. ولی این انتگرال از نوع انتگرالهای الیپتیک یا بیضوی است‌وجز بااستفاده از بسط به‌سری نمی‌توان آنرا حساب کرد.

روش دوم عبارت‌است از بدست آوردن y' بصورت تابعی از y وپیدا کردن xبصورت تابعی از yومحاسبه تابع معکوس یعنی‌پیدا کردن y بصورت تابعی‌از x دراینصورت معادله دیفرانسیل مرتبه اول‌بالابه‌صورت $\omega^4y^4(1+y'^2) = 4$ در میآید که ازآن میتوان نتیجه گرفت که : $y' = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{4-\omega^4y^4}}{\omega^2y^2}$ یعنی $x = \int\frac{\omega^2y^2}{\sqrt{4-\omega^4y^4}}\,dy$

اگر تغییر متغیر $y = \frac{\sqrt{2}}{\omega}u$ بدهیم خواهیم داشت : $x = \frac{\sqrt{2}}{\omega}\int\frac{u^2}{\sqrt{1-u^4}}\,du$ ملاحظه میکنیم که دراینجانیز

انتگرال‌بدست‌آمده یک‌انتگرال الیپتیک‌است. زیرا باتغییرمتغیر $u^4 = v$ بصورت $x = \frac{\sqrt{2}}{4\omega}\int v^{-\frac{1}{4}}(1-v)^{-\frac{1}{2}}\,dv$

در میاید. و اگر بخواهیم آنرا در فاصله $0 \leqslant u \leqslant 1$ یعنی برای مقادیر $0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\omega}$ حساب کنیم ، x از رابطه زیر بدست میاید .

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4\omega}\int_0^1 v^{\frac{3}{4}-1}(1-v)^{\frac{1}{2}-1}\,dv = \frac{\sqrt{2}}{4\omega}B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4\omega}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)}$$

ویا

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4\omega}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\omega}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\,\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\omega\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}$$

اگر بنویسیم $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$ باتوجه به‌اینکه $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$ یعنی

$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ پیدا خواهیم کرد $x = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\omega\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}$ اما می‌بینیم که بازاء

$u = 1$ ، $y = \frac{\sqrt{2}}{\omega} = \frac{\sqrt{2}\,T}{2\pi}$ بدست آمده برای y نسبتاً بزرگ است ویا شرائط مسئله سازگار نیست. بنابراین

باید برای محاسبه انتگرالی که x را برحسب y می‌دهد از بسط $\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}$ استفاده کرد. که به‌صورت زیراست

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}=1+\frac{1}{2}u^4+\frac{1\times 3}{2\times 4}u^8+\cdots+\frac{1\times 3\times 5\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots 2n}u^{4n}+\cdots$$

به‌این ترتیب پس‌از ضرب بسط بالا در u^2 و انتگرال‌گیری وقرار دادن u برحسب y و x بصورت زیر بدست میاید.

$$x=\frac{\omega^2}{6}y^3+\frac{\omega^6}{112}y^7+\cdots+\frac{1\times 3\times 5\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots 2n}\,\frac{\omega^{4n+2}}{(4n+3)2^{2n+1}}y^{4n+3}+\cdots$$

یعنی یک جواب تقریبی معادله بصورت $y\simeq\sqrt[3]{\frac{6x}{\omega^2}}$ بدست میاید.

۲ ـ ۳ ـ حل معادله دیفرانسیل بدون حذف y^2 :

معادله‌حرکت‌را بدون حذف y^2 حل‌می‌کنیم میتوان‌این‌معادله‌رابصورت $\frac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\omega^2 y}{\omega^2y^2+1}$

نوشت اگر طرفین این رابطه را در $2y'$ ضرب‌کنیم‌وانتگرال‌بگیریم پیدا می‌کنیم

$$\frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}=\mathrm{Log}(\omega^2y^2+1)$$

وازآنجا نتیجه میشود $1+y'^2=\frac{1}{4}\mathrm{Log}^2(\omega^2y^2+1)$ این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی است‌که بصورت $y'^2=f(y)$ درمیاید‌که یک‌معادله‌کلاسیک مکانیک است و معمولا میتوان آنرا حل‌کرد ولی میتوان بنا به شکل تابع $f(y)$ در نوع جواب‌ها بحث‌کرد. چون نمیتوان معادله بدست آمده را حل‌کرد سعی میکنیم آنرابصورت تقریبی حل‌کنیم و جواب بدست آمده در ۲ یعنی $y=a\sin\omega x$ را بطور دقیق‌تر پیدا کنیم.

٤ ـ حل معادله با تقریب بهتر

توجه می‌کنیم‌که در هیچ یک از دوحالت بالا نمی‌توان معادله را بطور کامل حل کرد وy را به‌صورت‌تابعی از x بدست آورد. بنابراین دراینجا سعی می‌کنیم جواب کلاسیک $y=a\sin\omega x$ را باتقریب‌بهتری‌بدست‌آوریم بدین‌منظور y را به $y_\circ+u=a\sin\omega x+u$ تبدیل میکنیم‌که‌درآن $u=u(x)$ تابعی است‌که می‌خواهیم آنرابدست‌آوریم. دراین صورت

$$y'=y'_\circ+u'=a\omega\cos\omega x+u'$$

$$y''=y''_\circ+u''=-a\omega^2\sin\omega x+u'$$

۱ ـ ٤ ـ حل تقریبی معادله مرتبه دوم

مقادیر y'',y',y را از روابط بالا در معادله دیفرانسیل حرکت در حالت ساده نشده برده و نتیجه می‌گیریم

$$-\frac{(1+y_\circ'^2+2y'_\circ u'+u'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_\circ+u''}=\frac{\omega^2(y^2_\circ+2y_\circ u+u^2)+1}{\omega^2(y_\circ+u)}$$

اگر فرض کنیم که $y_\circ''$،$y_\circ'$،$y_\circ$ و u''،u'،u مقادیر کوچکی هستند واز جمله‌هائی که‌از مرتبه سوم به‌بالا هستندصرفنظر کنیم پیدا می‌کنیم .

$$-\frac{1+\frac{3}{2}(y_\circ'^2+2y'_\circ u'+u'^2)}{y''_\circ+u''}=\frac{\omega^2(y^2_\circ+2y_\circ u+u^2)+1}{\omega^2(y_\circ+u)}$$

اگر در رابطه فوق جملاتی که نسبت به u'',u',u از درجه دوم به‌بالا هستند حذف‌می‌کنیم‌بدست می‌آوریم :

$$\omega^2(y_\circ^2y''+y_\circ^2u''+2y_\circ y_\circ''u)+y_\circ''+u''+\omega^2y_\circ+\omega^2u+\frac{3}{2}(y_\circ y_\circ'^2+2y_\circ y_\circ'u'+y_\circ'^2u)=\circ$$

و اگر بالاخره در رابطه بالا جملاتی که نسبت به $y_\circ'',y_\circ',y$ از درجه سوم هستند حذف کنیم یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به u بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$(1+\omega^2y_\circ^2)u''+3\omega^2y_\circ y'_\circ u'+(2\omega^2y_\circ y_\circ''+\omega^2+\frac{3}{2}\omega^2y_\circ'^2)u+\omega^2y_\circ+y_\circ''=\circ$$

اما

$$\omega^2y_\circ+y_\circ''+a\omega^2\sin\omega x-a\omega^2\sin\omega x=\circ$$

وبنابراین معادله بصورت یک معادله خطی از مرتبه دوم بدون طرف دوم بصورت زیر درمیاید

$$(1+\omega^2y_\circ^2)u''+3\omega^2y_\circ y'_\circ u'+\omega^2\left(2y_\circ y''_\circ+\frac{3}{2}y_\circ'^2+1\right)u=\circ$$

$$(1+a^2\omega^2\sin^2\omega x)u''+(3a^2\omega^3\sin\omega x\cos\omega x)\,u'+\omega^2(-2a^2\omega^2\sin^2\omega x+\frac{3}{2}a^2\omega^2\cos^2\omega x+1)u=\circ$$

چون حل‌این معادله مرتبه دوم مستلزم شناختن یک جواب خصوصی معادله است، سعی می‌کنیم معادله خطی‌مرتبه اول بدست آمده در ۲-۳ را حل کنیم .

۲-٤ حل تقریبی معادله مرتبه اول

اگر $y_\circ=a\sin\omega x$ و $y=y_\circ+u$ و $y'=y'_\circ+u'$ که درآنها u جزء اضافی y و نسبت به y کوچک است فرض‌شوند و این مقادیر را در معادله بدست‌آمده در ۲-۳ یعنی $1+y'^2=\frac{1}{4}\,\mathrm{Log}^2(\omega^2y^2+1)$ ببریم‌باتوجه به‌اینکه میتوان از u^2 و u^2 صرفنظر کرد میتوان نوشت:

$$y^2=y_\circ^2+2y_\circ u+u^2\simeq y_\circ^2+2y_\circ u$$
$$y'^2=y'^2_\circ+2y_\circ'u'+u'^2\simeq y'^2_\circ+2y'_\circ u'$$

ضمناً باتوجه به کوچک بودن y وبااستفاده از بسط

$$\mathrm{Log}(1+x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

میتوان نوشت :

$$\mathrm{Log}(1+\omega^2y^2)=\omega^2y^2-\frac{\omega^4y^4}{2}+\frac{\omega^6y^6}{3}$$

و از آنجا

$$\mathrm{Log}^2(1+\omega^2y^2)\simeq\omega^4y^4-\omega^6y^6+\cdots$$

زیرا جملات دیگر بصورت توانهائی از درجه 8 به بالا نسبت به ωy هستند وبا توجه به کوچک بودن y و همچنین ω (زیرا $y=0{,}01m$ برای چرخهای نو و $y=0{,}025m$ برای چرخهای کهنه و$\omega=0{,}369$) میتوان ازاین

توانها وهمچنین از $\omega^6 y^6$ نیز صرفنظر کرد ومعادله دیفرانسیل بالا را بصورت ساده‌تر $1+y'^2=\dfrac{\omega^4 y^4}{4}$ نوشت.

حال اگر بجای y^2 و y'^2 مقادیر بدست آمده برحسب $y_\circ$, $u, y_\circ'$, u' را قرار دهیم، پیدا میکنیم:

$$4(1+y_\circ'^2+2y_\circ' u')=\omega^4(y_\circ^2+2y_\circ u)^2=\omega^4(y_\circ^4+4y_\circ^3 u+y_\circ^2 u^2)$$

اگر باز از جمله حاوی u^2 صرفنظر کنیم بیک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی برحسب u پیدا می‌کنیم که به شکل زیراست:

$$8y_\circ' u' - 4\omega^4 y_\circ^3 u=\omega^4 y_\circ^4-4(1+y_\circ'^2)$$

$$(8a\omega \cos\omega x)u' - (4a^3\omega^7 \sin\omega x)u = a^4\omega^8 \sin^4\omega x - 4(1+a^2\omega^2 \cos^2\omega x)$$

برای حل این معادله ابتدا معادله بدون طرف دوم یعنی $8y_\circ' u' - 4\omega^4 y_\circ^3 u=0$ یامعادله $2y'_\circ u' - \omega^4 y_\circ^3 u=0$ را حل می‌کنیم بدست میاوریم.

$$\frac{u'}{u}=\frac{a^3\omega^7 \sin^3\omega x}{2a\omega \cos\omega x}=\frac{a^2\omega^6}{2}\,\frac{(1-\cos^2\omega x)\sin\omega x}{\cos\omega x}$$

$$=\frac{a^2\omega^6}{2}\,\frac{1}{\cos\omega x}-\frac{a^2\omega^6}{2}\cos\omega x \sin\omega x$$

ازآنجا نتیجه میشود

$$\operatorname{Log}\left|\frac{u}{k}\right|=\frac{a^2\omega^5}{2}\operatorname{Log}\left|tg\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{a^2\omega^5}{8}\cos 2\omega x$$

یعنی

$$u=k\left[tg\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{a^2\omega^5}{2}} e^{\frac{a^2\omega^5}{8}\cos 2\omega x}$$

اگر u بدست‌آمده رادر معادله باطرف دوم ببریم یعنی k را بصورت تابع $k(x)$ در نظربگیریم و بخواهیم $k(x)$ را از معادله دیفرانسیل بدست آوریم باز به معادله‌ای می‌رسیم که $k'(x)$ بصورت تابعی از x داده شده ولی انتگرال‌گیری ازآن غیرممکن است. بااین دلیل سعی می‌کنیم باتغییر متغیر $a\sin\omega x=t$ معادله‌را بصورت معادله ساده‌تری از t تبدیل کنیم و سپس بااستفاده از بسط به‌سری جواب آنرا بدست آوریم: دراینصورت باتوجه به‌اینکه

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(a\omega \cos\omega x)\frac{du}{dt}\ ,\ a\cos\omega x=\sqrt{a^2-t^2}$$

معادله دیفرانسیل باطرف دوم به صورت

$$8\omega^2(a^2-t^2)\frac{du}{dt}-4\omega^4 t^3 u=\omega^4 t^4-4[1+\omega^2(a^2-t^2)]$$

ویا

$$8\omega^2(a^2-t^2)\frac{du}{dt}-4\omega^4 t^3 u=\omega^4 t^4+4\omega^2 t^2-4(1+a^2\omega^2)$$

درمیآید.

اگر

$$u=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots+\alpha_n t^n+\cdots$$

اختیار شود و u و $\dfrac{du}{dt}$ را در معادله بالا ببریم رابطه زیر بدست میاید.

$$8a^2\omega^2\alpha_1+(16a^2\omega^2\alpha_2t+(24a^2\omega^2\alpha_3-8\omega^2\alpha_1)t^2+(32a^2\omega^2\alpha_4-16\omega^2\alpha_2-4\alpha_o\omega^4)t^3$$
$$+(40a^2\omega^2\alpha_5-24\omega^2\alpha_3-4\omega^4\alpha_1)t^4+\cdots+[8a^2\omega^2(n+1)\alpha_n-8\omega^2(n-1)\alpha_{n-1}-4a^4\alpha_{n-3}]$$
$$+\cdots=-4(a^2\omega^2+1)+4\omega^2t^2+\omega^4t^4$$

ازمقایسه دوطرف روابط زیر بدست میایند.

$$8a^2\omega^2\alpha_1=-4(a^2\omega^2+1) \quad \text{یا} \quad 2a^2\omega^2\alpha_1=-(a^2\omega^2+1)$$
$$16a^2\omega^2\alpha_2=0 \qquad \alpha_2=0$$
$$24a^2\omega^2\alpha_3-8\omega^2\alpha_1=4\omega^2 \qquad 6a^2\alpha_3-2\alpha_1=1$$
$$32a^2\omega^2\alpha_4-16\omega^2\alpha_2-4\alpha_o\omega^4=0 \qquad 8a^2\alpha_4-4a^2\alpha_2-\alpha_o\omega^2=0$$
$$40a^2\omega^2\alpha_5-24\omega^2\alpha_3-4\omega^4\alpha_1=\omega^4 \qquad 10a^2\alpha_5-6\alpha_3-\omega^2\alpha_1=1$$
$$8a^2\omega^2(n+1)\alpha_{n+1}-8\omega^2(n-1)\alpha_{n-1}-4\omega^4\alpha_{n-3}=0$$
$$2a^2(n+1)\alpha_{n+1}-2(n-1)\alpha_{n-1}-\omega^2\alpha_{n-3}=0$$

اگر $y(o)=0$ اختیار شود ازآن نتیجه میشود $u(o)=0$ یعنی $\alpha_o=0$

وچون $\alpha_o=0$ و $\alpha_2=0$ هستند از رابطه ۴ نتیجه میشود که $\alpha_4=0$ و بهمین ترتیب ضریب تمام توانهای زوج t برابر هستند برای پیدا کردن ضریب توانهای فرد از روابط ۱و۳و۵وغیره نتیجه میگیریم :

$$\alpha_1=-\frac{\alpha^2\omega^2+1}{2a^2\omega^2} \qquad \alpha_3=\frac{1+2\alpha}{6a^2}=\frac{-1}{6a^4\omega^2} \qquad \alpha_5=\frac{-[2(1-a^4\omega^2)+a^4\omega^4+a^2\omega^2]}{20a^6\omega^2}$$

بنابراین توجه میکنیم که ... است یعنی

$$u(x)=\alpha_1 a\sin\omega x+\alpha_3a^3\sin^3\omega x+\alpha_5a^5\sin^5\omega x+\cdots$$

است یعنی

$$u(x)=-\frac{1}{2a\omega^2}\left[(a^2\omega^2+1)\sin\omega x+\frac{1}{3}\sin^3\omega x+\frac{2(1-a^4\omega^2)+a^4\omega^4+a^2\omega^2}{10}\sin^5\omega x+\cdots\right]$$

وملاحظه می‌کنیم که باین ترتیب $u(x)$ باتقریب خوبی حساب شده و در هرحال یک‌تابع فرد تناوبی بادوره تناوب $T=\frac{2\pi}{\omega}$ است.

منابع

Cours de Chemin de fer	R.BIAIS	E.N.P.C.	1964
Cours de Chemin de fer	ALIAS	E.N.P.C.	1969
Mathématiques Générales	PISOT-ZAMANSKI	Dunod	1970
The theory of ordinary differential équations	J.C. BURKILL	JEFFERY-Adamson	1961
Mathematiques et Economie appliquées aux transports	MEHRAZINE	Daguerre	1971

روسازی راه‌آهن ، مهندس اربابی ، دانشکده فنی ۲۰۳۷