

## تحلیل ایستائی سازه‌های ساندویچی به روش اجزای محدود\*

\*\*\*

دکتر محمود موسوی مشهدی - مهندس فرهاد جاوید راد

گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

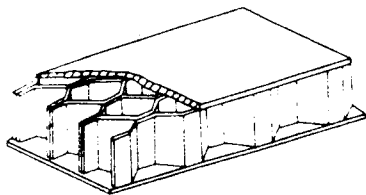
چکیده:

این مقاله با استفاده از روش اجزای محدود به تحلیل ایستائی سازه‌های ساندویچی تحت بارگذاریهای فشاری و متمرکز پرداخته است. در این راستا با توجه به پیچیدگی حل تحلیلی این گونه سازه‌ها، طراحی و تهیه نرم افزاری که به کمک آن بتوان سازه‌های ساندویچی را بسادگی تحلیل ایستائی نمود به پایان رسیده است. در تهیه این نرم افزار از روش اجزای محدود به عنوان یک روش پرتوان جهت تحلیل این سازه‌ها استفاده گردیده است. نتایج حاصله از حل چند مثال در انتهای مقاله، ضمن ارائه جوابهای قابل قبول و اقتصادی بیانگر کارائی این نرم افزار و توانائی روش اجزای محدود در حل این گونه مسائل می‌باشد.

۱ - مقدمه:

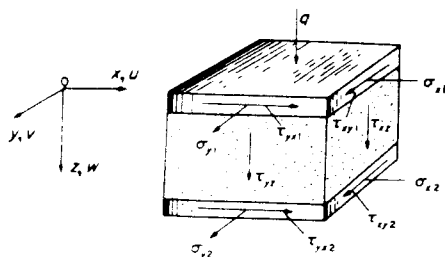
نیز می‌باشند). با حل چند مسئله که در انتهای مقاله ارائه شده‌اند، کارائی نرم افزار ودقت خوب آن در تحلیل این مسائل نشان داده شده‌اند.

تجزیه و تحلیل سازه‌های ساندویچی به دلیل کاربرد فراوان آن در صنایع هوافضا، نظامی، ساختمان کشتی‌ها، ساختمان‌سازی و سایر صنایع از دیرباز مورد توجه خاص پژوهشگران بوده است.



یکی از بارزترین ویژگی سازه‌های ساندویچی نسبت بزرگ مقاومت خمشی به وزن این سازه‌ها می‌باشد. ساده ترین نوع این سازه‌ها اغلب از دو صفحه نازک و مقاوم به عنوان روکش که در فاصله مناسبی از یکدیگر قرار گرفته‌اند ساخته شده، که بین دو صفحه از ماده‌ای ضعیفتر با جرم حجمی به مراتب کمتر پر شده است.

(شکل ۱ - ۱) نمونه‌ای از سازه ساندویچی



(شکل ۱ - ۲): مولفه‌های تنش در جزء کوچک

(شکل ۱ - ۱). مقاومت خمشی چنین سازه‌ای به مراتب بیشتر از صفحه‌ای است که وزن آن برابر وزن دو صفحه خارجی و ماده پرکننده می‌باشد. لذا در موقعی که حداقل وزن و مقاومت بالا مورد نظر باشد این گونه سازه‌ها بطور گسترده و موفقیت آمیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

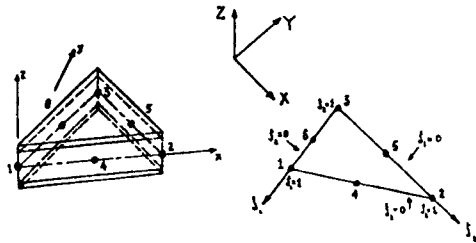
امروزه با پیشرفت روش اجزای محدود و دستیابی به کامپیوترهای پرسرعت حل طیف وسیعی از مسائل پیچیده مهندسی در حد قابل ملاحظه‌ای آسان گشته است. در این مقاله با استفاده از روش مذکور نرم افزاری طراحی شده که قابل اجرا در کامپیوترهای PC/XT/AT بوده و مسائل سازه‌های ساندویچی را تحلیل می‌نماید. (مولفان در صدگسترش نرم افزاری به منظور تحلیل دینامیکی اثر دملکمانش و بهینه‌سازی این سازه

(۲-۲)

۲- صورتبندی\* سازه‌های ساندویچی با روش اجزای

محدود :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & zN_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & zN_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ r_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix}$$



شکل (۲-۲): عنصر پوسته ساندویچی شش گره‌ای و نمایش همپارامتری\* آن.

با توجه به فرض نازک بودن صفحات روکش، مولفه‌های تنش در یک جزء کوچک به صورت (شکل ۱-۲) درمی‌آیند که در هر گره شش درجه آزادی (سه مولفه تغییر مکان و سه دوران) دارد. انتخاب شش درجه آزادی در هر گره بدلیل کلی بودن صورتبندی و کاربرد برنامه اجزای محدود است بطوری که بتوان بارهای مختلف منجمله  $M_z$  (لنگر حول Z) به سازه اعمال نمود.  $[1]$  و  $[8]$

اگر  $\hat{X}$  و  $\hat{Y}$  بردارهای یکه محورها مختصات موضعی XYZ باشند (شکل ۲-۲) می‌توان مختصات نقاط درون یک عنصر\*\* را در مختصات اصلی، برحسب مختصات اصلی نقاط گره‌ای با رابطه (۲-۱) درونیابی کرد.

اکنون می‌توان مولفه‌های تانسور کرنش را با معلوم بودن مولفه‌های تغییر مکان کوچک به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 N_i \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} n_3 \\ m_3 \\ l_3 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

$$\epsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j=1, 2, 3 \quad (2-3)$$

که در آن  $l_3, m_3, n_3$  کسینوس‌های هادی بردار  $\hat{Z}$  و  $N_i$  توابع شکل می‌باشند. توابع شکل و مشتقات آنها در جدول (۲-۱) داده شده‌اند.

(۲-۴)

جدول (۲-۱)

علامت " " نشانگر مشتق است.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ u_{1,y} \\ u_{1,z} \\ v_{1,x} \\ v_{1,y} \\ v_{1,z} \\ w_{1,x} \\ w_{1,y} \\ w_{1,z} \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T = [SD] : L$$

$$[u_{1,x} \ u_{1,y} \ \dots \ w_{1,z}]^T$$

برای انتقال به مختصات XYZ و سپس تبدیل به مختصات وابسته مساحتی از ماتریس تبدیل مختصات استفاده می‌کنیم که از بسط روابط تبدیل تانسورهای مرتبه دوم بدست می‌آید

$$\epsilon'_{ij} = a_{ir} a_{js} \epsilon_{rs} \quad i, j=1, 2, 3 \quad (2-5)$$

مولفه‌های تغییر مکان داخل عنصر در مختصات اصلی را می‌توان با استفاده از توابع شکل برحسب تغییر مکانهای گره‌ای نوشت:

\* Formulation

\*\* Element

\*\*\* Isoparametric

که در آن  $[a]_{3 \times 3}$  ماتریس دوران مختصات می‌باشد [۵] و [۸]. توجه گردد که با توجه به نازک بودن صفحات روکش و عدم وجود مقاومت پیرکننده در جهت  $z$ ، مولفه تنش در جهت  $z$  صفر خواهد بود.

$$[TR] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & (l_1 m_2 + l_2 m_1) & (m_1 n_2 + m_2 n_1) & (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & (l_2 m_3 + l_3 m_2) & (m_2 n_3 + m_3 n_2) & (n_2 l_3 + n_3 l_2) \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & (l_3 m_1 + l_1 m_3) & (m_3 n_1 + m_1 n_3) & (n_3 l_1 + n_1 l_3) \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین} \quad (2-6)$$

$$[\epsilon'] = [TR][SD][u, x, u, y, \dots, w, z] \quad (2-7)$$

مشتقات تغییر مکان‌ها نسبت به دستگاه  $xyz$  و دستگاه مختصات مساحتی  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  با یک ماتریس ژاکوبین بهم ارتباط دارند که عبارتست از:

$$[u, x, u, y, u, z, \dots, w, z]^T = [J]^{-1} [u, \xi_1, u, \xi_2, \dots, w, z]^T \quad (2-8)$$

که در آن

$$[J]_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} [J^*]_{3 \times 3} & & 0 \\ & [J^*]_{3 \times 3} & \\ 0 & & [J^*]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

و مولفه‌های  $[J^*]$  از مشتقات دو سیستم مختصات نسبت به یکدیگر مطابق رابطه زیر تعیین می‌شوند:

محاسبه اجزای ماتریس بالا را می‌توان با مشتق‌گیری از رابطه (۲-۱) به صورت زیر بدست آورد.

$$[J^*]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}$$

$$[J^*]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \sum N_{i, \xi_1} (X_i + z l_3) & \sum N_{i, \xi_1} (Y_i + z m_3) & \sum N_{i, \xi_1} (Z_i + z n_3) \\ \sum N_{i, \xi_2} (X_i + z l_3) & \sum N_{i, \xi_2} (Y_i + z m_3) & \sum N_{i, \xi_2} (Z_i + z n_3) \\ \sum N_{i, l_3} & \sum N_{i, m_3} & \sum N_{i, n_3} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

با مشتق گیری از رابطه (۲-۲) نسبت به  $\xi_1, \xi_2$  و  $z$  داریم :  
 داریم :

$$\begin{bmatrix} u_{, \xi_1} \\ u_{, \xi_2} \\ u_{, z} \\ v_{, \xi_1} \\ v_{, \xi_2} \\ v_{, z} \\ w_{, \xi_1} \\ w_{, \xi_2} \\ w_{, z} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \sum_{i=1}^6 \left( \begin{bmatrix} N_{i, \xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ N_{i, \xi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_{i, \xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_{i, \xi_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{i, \xi_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{i, \xi_2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & \dots \end{bmatrix}_{9 \times 36} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i, \xi_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_{i, \xi_2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i, \xi_1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i, \xi_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i, \xi_1} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i, \xi_2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}_{9 \times 36} \right) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ r_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix}_{36 \times 1} \quad (2-11)$$

با (۲-۱۲) :

$$[U, \xi]_{9 \times 1} = ([A^*]_{9 \times 36} + z [A^{**}]_{9 \times 36}) [U_i]_{36 \times 1}$$

از قرار دادن (۲-۱۲) و (۲-۸) در رابطه (۲-۷) خواهیم داشت :

$$[\epsilon]_{5 \times 1} = [TR]_{5 \times 6} [SD]_{6 \times 9} [J]^{-1}_{9 \times 9} ([A^*]_{9 \times 36} + z [A^{**}]_{9 \times 36}) U_e \quad (2-13)$$

پس ماتریس رابط بین کرنش و تغییر مکانهای گره ای [B] به صورت زیر به دست می آید :

$$[B]_{5 \times 36} = [TR]_{5 \times 6} [SD]_{6 \times 9} [J]^{-1}_{9 \times 9} ([A^*]_{9 \times 36} + z [A^{**}]_{9 \times 36}) \quad (2-14)$$

$$[B]_{5 \times 36} = [B_1]_{5 \times 36} + z [B_2]_{5 \times 36}$$

۳- ماتریس سختی عنصر :

با استفاده از اصل کار مجازی رابطه ماتریس سختی عنصر به صورت معادله (۳-۱) بدست می آید که در آن [B] ماتریس کرنش- تغییر مکان است که به صورت معادله (۲-۱۴) بدست آمد .

$$[K] = \int_V [B]^T [\bar{C}] [B] \cdot dv \quad (3-1)$$

ماتریس  $[\bar{C}]_{5 \times 5}$ ، ماتریس هوک در مختصات اصلی است که برای صفحه روکش متشابه الا متداد\* به صورت ماتریس (۳-۲- a) و برای پرکننده متعامد الا متداد\*\* به صورت ماتریس (۳-۲- b) خواهد بود و برای انواع پرکننده ها می توان به مراجع موجود مراجعه کرد .

توجه شود که به علت نازک بودن صفحات روکش فقط تنشهای غشائی در صفحات روکش وجود دارد . (شکل ۲-۲) و همچنین می توان از تغییرات درجه دوم تنش برشی در صفحات روکش صرف نظر کرد . در مورد پرکننده نیز فقط توزیع یکنواخت تنش برشی در نظر گرفته شده است . به هر حال اگر صفحات روکش خیلی نازک نباشند می توان اثر درجه دوم تنش را با ضریب  $(k=1,2)$  به صورت ماتریس (۳-۲- a) به حساب آورد .

\*Isotropic  
 \*\*Orthotropic

$$[C]_r = \begin{bmatrix} \frac{E_f}{1-\nu_f^2} & & & & & \\ & \frac{E_f}{1-\nu_f^2} & & & & \\ \nu_f \frac{E_f}{1-\nu_f^2} & & \frac{E_f}{1-\nu_f^2} & & & \\ 0 & 0 & 0 & G_{f/k} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{symm.} \quad (3-2-a)$$

$$[C]_{orth} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{\lambda} & & & & & \\ & \frac{E_2}{\lambda} & & & & \\ \frac{E_1 \nu_{21}}{\lambda} & & \frac{E_2}{\lambda} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} & \end{bmatrix} \quad \text{symm.} \quad (3-2-b)$$

$$\lambda = 1 - \nu_{12} \nu_{21} \quad \nu_{12} = \nu_{12} \frac{E_1}{E_2}$$

با توجه به اینکه دترمینان ژاکوبین برای این عنصر دو برابر مساحت عناصر است پس رابطه (۳-۱) را می‌توان ساده کرد

$$[K]_{36 \times 36} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-t/2}^{t/2} [B]^T [\bar{C}] [B] (2A) d\xi_1 d\xi_2 dz \quad [1] \text{ و } [7]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_{-t/2}^{t/2} ([B_1]^T + z[B_2]^T) [\bar{C}] ([B_1] + z[B_2]) (2A) d\xi_1 d\xi_2 dz \quad (3-3)$$

و با استفاده از انتگرالگیری گاوس برای محدوده مثلثی ماتریس سختی یک عنصر به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$[K] = \sum_{j=1}^3 (t_t [B_1]^T [\bar{C}] [B_1] + 2t_t h_t [B_1]^T [\bar{C}] [B_2] + t_t h_t^2 [B_2]^T [\bar{C}] [B_2])_j W_j$$

$$+ \sum_{j=1}^3 (t_c [B_1]^T [\bar{C}] [B_1] + \frac{t_c^3}{12} [B_2]^T [\bar{C}] [B_2])_j A W_j \quad (3-4)$$

$$+ \sum_{j=1}^3 (t_b [B_1]^T [\bar{C}] [B_1] - 2t_b h_b [B_1]^T [\bar{C}] [B_2] + t_b h_b^2 [B_2]^T [\bar{C}] [B_2])_j A W_j$$

که در آن  $p$  مقدار فشار روی سطح میانی عناصر است و اگر با محور  $z$  از لحاظ موضعی همجهت باشد علامت آن مثبت است. و بردار  $[F^*]$  نیروهای گره‌ای عنصر در جهت  $z$  موضعی است که باید توسط کسینوس‌های هادی  $z$  بدستگاه منتقل شود.

که در آن  $t_c$  و  $t_b$  به ترتیب ضخامت سه لایه و هستند و  $W_j$  ضریب وزنی  $h_b = \frac{t_c + t_b}{2}$  و  $h_t = \frac{t_c + t_t}{2}$   $[8]$  از گاوس است.

۴- بردار نیروهای گره‌ای:

نیروهای گره‌ای می‌توانند ناشی از بارهای متمرکز گره‌ای و فشاری یکنواخت باشند برای بار فشاری در جهت عمود بر عنصر داریم:

$$(4-1)$$

$$[F^*]_{6 \times 1} = \int_s [N]^T \cdot p \cdot ds = 1/2 \sum_i ([N]^T \cdot p \cdot |J|)_i W_i$$

۵- مولفه‌های تنش

با استفاده از رابطه هوک می‌توان مولفه‌های تنش را در هر لایه به صورت زیر نوشت:

$$[\sigma_t] = [\bar{C}_t][B_t][U_e] \quad (5-1)$$

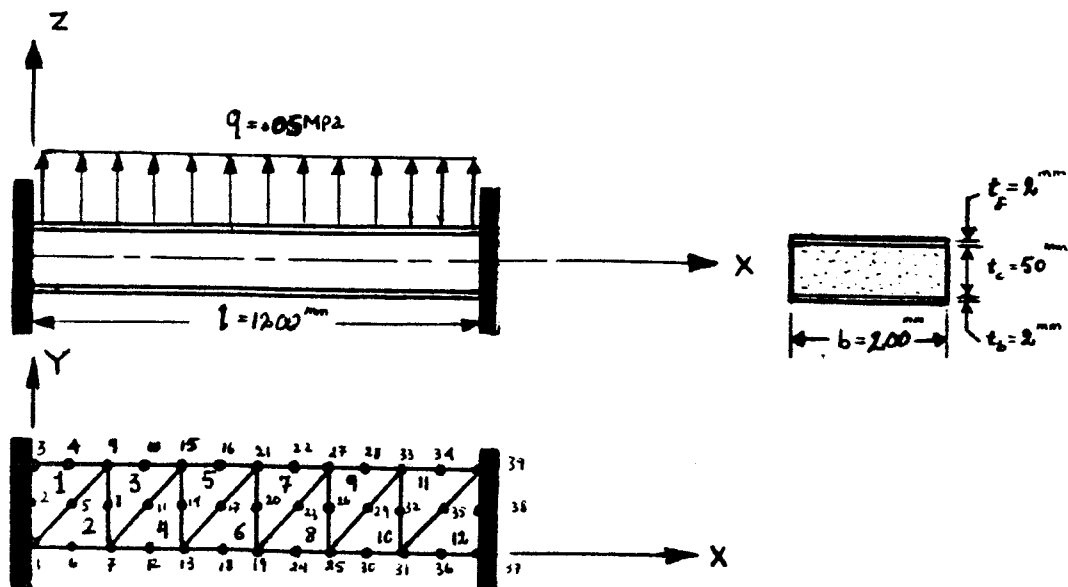
$$[\sigma_c] = [\bar{C}_c][B_c][U_e]$$

$$[\sigma_b] = [\bar{C}_b][B_b][U_e]$$

در اینجا چند نمونه از مسائل حل شده با این برنامه داده شده است.

الف: تیرساندویچی تحت بارگسترده یکنواخت مسئله تیرساندویچی تحت بارگذاری یکنواخت با شرایط تکیه گاهی مختلف (دوسرگیردار، ساده، یکسرگیردار) حل شده است. هندسه تیر (برای شرایط گیرداری) در شکل (۱-۶) داده شده است.

۶- مثالهای حل شده: براساس روابط به دست آمده در قسمتهای قبل برنامه کامپیوتری تهیه گردیده و مسائلی کاربردی با آن حل شده است.



شکل (۱-۶): تیرساندویچی دوسرگیردار تحت بارگسترده یکنواخت. مشخصات مکانیکی صفحات روکش و پرکننده عبارتند از:

جدول (۱-۶): مشخصات مکانیکی مواد مورد استفاده

صفحات روکش آلومینیومی	pvc/H130 پرکننده
$P_f = 2.7E+3 \text{ kg/m}^3$	$P_c = 1.3E+2 \text{ kg/m}^3$
$E_f = 6.9E+10 \text{ N/m}^2$	$E_c = 1.6E+8 \text{ N/m}^2$
$G_f = 2.65E+10 \text{ N/m}^2$	$G_c = 5.5E+7 \text{ N/m}^2$
$\nu_f = .3$	$\nu_c = .3$

جدول (۲-۶): ماتریس بستگی عنصر برای مدل اجزای محدود

عنصر پیوندی						
عنصر	پیوند گرہها					
1	3	1	9	2	5	4
2	7	9	1	8	5	6
3	9	7	15	8	11	10
4	13	15	7	14	11	12
5	15	13	21	14	17	16
6	19	21	13	20	17	18
7	21	19	27	20	23	22
8	25	27	19	26	23	24
9	27	25	33	26	29	28
10	31	33	25	32	29	30
11	33	31	39	32	35	34
12	37	39	31	38	35	36

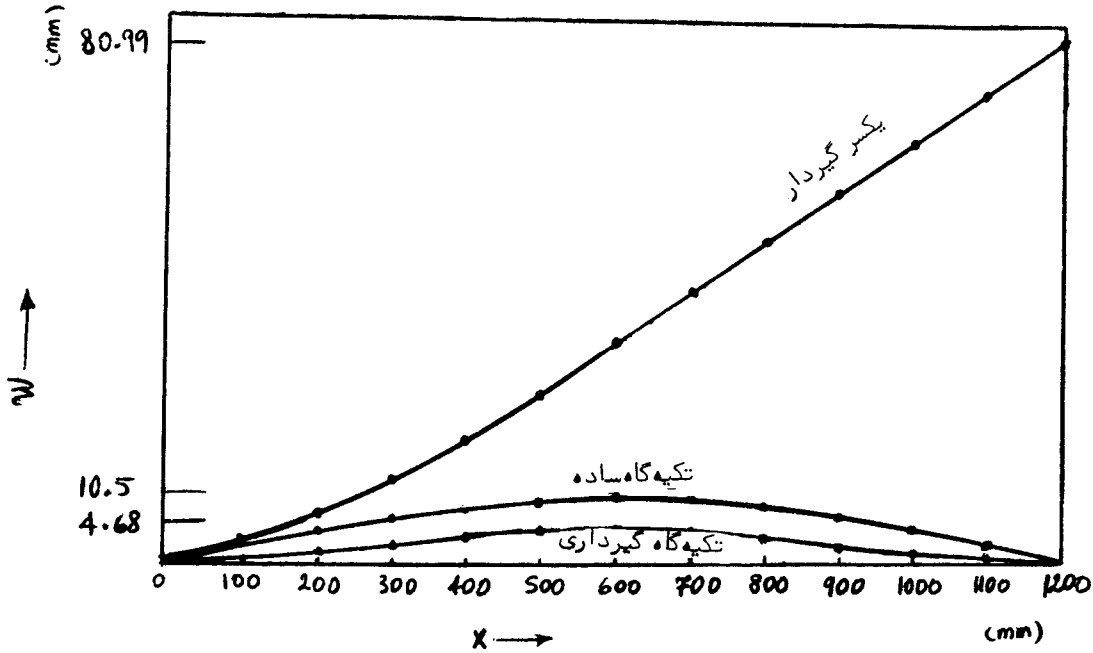
جدول (۳-۶) مقایسه جواب تحلیلی و جواب عددی تیرباتکیه گاههای ساده و حل عددی

مقایسه جواب تحلیلی یا جواب اجزای محدود (تغییر مکان ماکزیمم و تنش)*			
جواب تحلیلی		جواب با اجزای محدود	
$(w_{max})$ mm	$(\sigma_n)$ MPa	$(w_{max})$ mm	$(\sigma_n)$ MPa
10.4408	86.5	10.5	88.55

\* تغییر مکانها در گرہ (۲۰) در نظر گرفته شده‌اند و تنش برای جواب تحلیلی از نظریه مقاومت مصالح (یک بعدی) به دست آمده است.

برای تیرساندویجی توام باخاست چون درعرض تیر مولفه‌های تغییر مکان یکی نیستند و چروک خوردگی مشاهده می‌شود.

منحنی تغییر مکان  $w$  برای گره‌های وسط عرضی تیر در شکل (۶-۲) برای شرایط مرزی مختلف رسم شده است. از جوابهای بدست آمده نتیجه می‌شود که فرض کشسانی یک‌بعدی



شکل (۶-۲): تغییر مکان  $(w)$  برای مقطع وسط تیر برحسب طول

مولفه‌های تنش نرمال اصلی و تنشهای برشی ماکزیمم در گره (۲۰) برای سه شرط مرزی یاد شده در جدول (۶-۴) گنجانده شده است.

جدول (۶-۴) مولفه‌های تنش‌های اصلی و برشی ماکزیمم در گره (۲۰)

		$\sigma_{11}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\tau_{11}$ (MPa)	$\tau_{22}$ (MPa)	$\tau_{33}$ (MPa)
تیرساندویجی با تکیه‌گاههای ساده	مقطع روکش بالایی	88.55	# 0.0	.0811	44.27	-.0407	44.24
	برکنده ساندویچ	.0328	0.0	-.0328	.0164	.0164	.0328
	مقطع روکش پایینی	-88.55	# 0.0	-.0811	44.24	-.0407	44.27
تیرساندویجی با تکیه‌گاههای گیردار	مقطع روکش بالایی	30.37	# 0.0	.334	15.02	.167	15.18
	برکنده ساندویچ	.0328	0.0	-.0328	.0164	.0164	.0328
	مقطع روکش پایینی	-30.37	# 0.0	-.334	15.18	.167	15.02
تیرساندویجی یکسرگیردار	مقطع روکش بالایی	-83.62	# 0.0	.8199	41.81	.4099	42.22
	برکنده ساندویچ	.5704	0.0	-.5704	.2852	.2852	.5704
	مقطع روکش پایینی	83.62	# 0.0	-.8199	42.22	.4099	41.81

توضیح: جهت  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  راست، چپ، پایین، بر حسب ماکزیمم باشد. گره (۲۰) در مرکز تیر است.



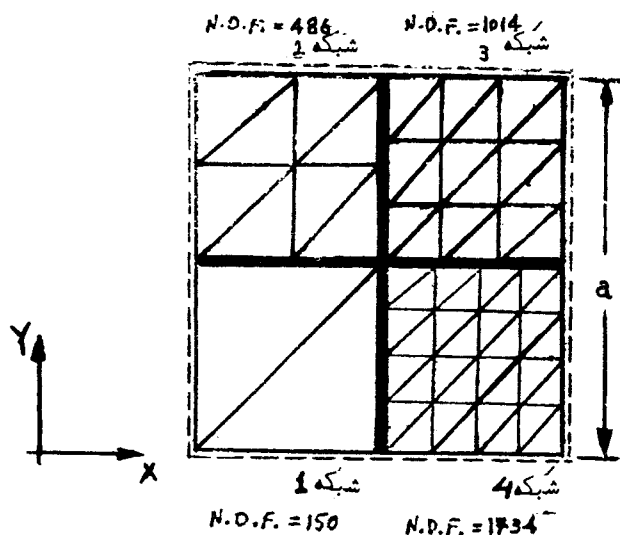
ب: صفحه<sup>۶</sup> مربعی ساندویچی روی تکیه گاههای ساده تحت فشار یکنواخت:  
 به عنوان دومین مثال صفحه<sup>۶</sup> ساندویچی روی تکیه گاه ساده با شبکه بندی های نشان داده شده حل وهمگرایی جواب بررسی گردیده است. داده های مساله عبارتند از:

به منظور مقایسه کاهش وزن در استفاده از تیرساندویچی، نسبت وزن برای تیر با تکیه گاههای ساده (برای تغییر مکانهای ماکزیمم مساوی) و از جنس صفحات روکش برابر  $\frac{1}{7}$  و برای تیر دو سرگیردار  $\frac{1}{5/4}$  و برای تیر طره  $\frac{1}{7/6}$  است.

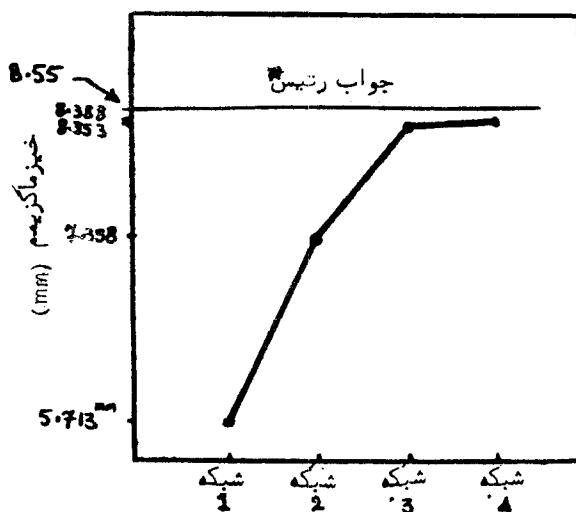
جدول (۵-۶) مشخصات مکانیکی مواد مورد استفاده

پرکننده متشابه الامتداد	صفحه روکش فولادی
$E_c = 1196.8 \text{ MPa}$ $V_c = .3$	$E_f = 200000 \text{ MPa}$ $V_f = .3$

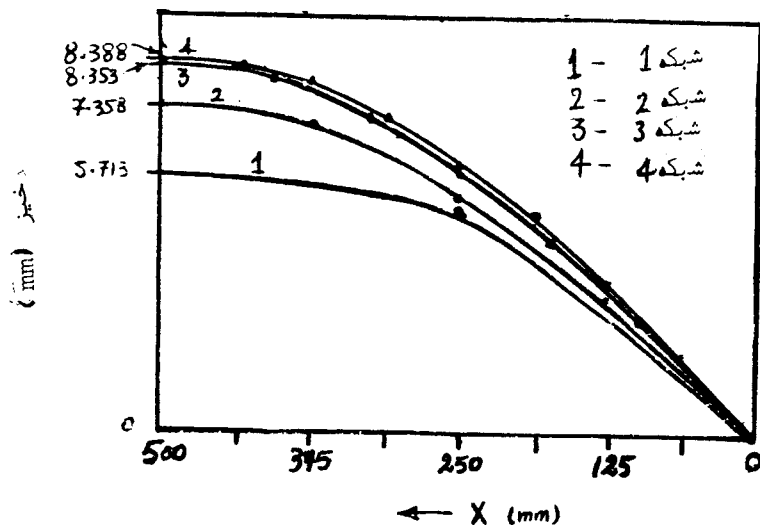
$a = 1000 \text{ mm}$   
 $q = .5 \text{ MPa}$   
 $t_t = t_b = 1 \text{ mm}$   
 $t_c = 50 \text{ mm}$



شکل (۳-۶): چهار نوع راه حل برای شبکه بندی صفحه<sup>۶</sup> ساندویچی (به علت تقارن در هر راه حل، فقط  $\frac{1}{4}$  صفحه شبکه بندی شده است).



شکل (۴-۶) همگرایی جواب با اجزای محدود برای صفحه<sup>۶</sup> ساندویچی تحت بار گسترده<sup>۶</sup> یکنواخت



شکل (۵ - ۶) منحنی صفحه تغییر شکل یافته برای شبهه بندیهای ۱ تا ۴ (مقطع Y=500mm)

تنش های نرمال و برشی اصلی ماکزیمم		
	$\sigma_{max}$ (مگاپاسگال)	$\tau_{max}$ (مگاپاسگال)
برای صفحه روکش بالایی	453.7	226.8
برای پرکننده ساندویچ	1.472	1.47
برای صفحه روکش پایینی	- 392.	196.

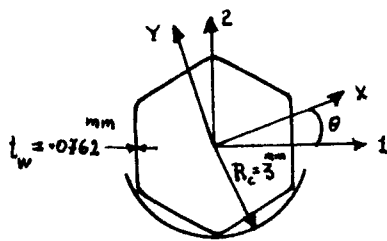
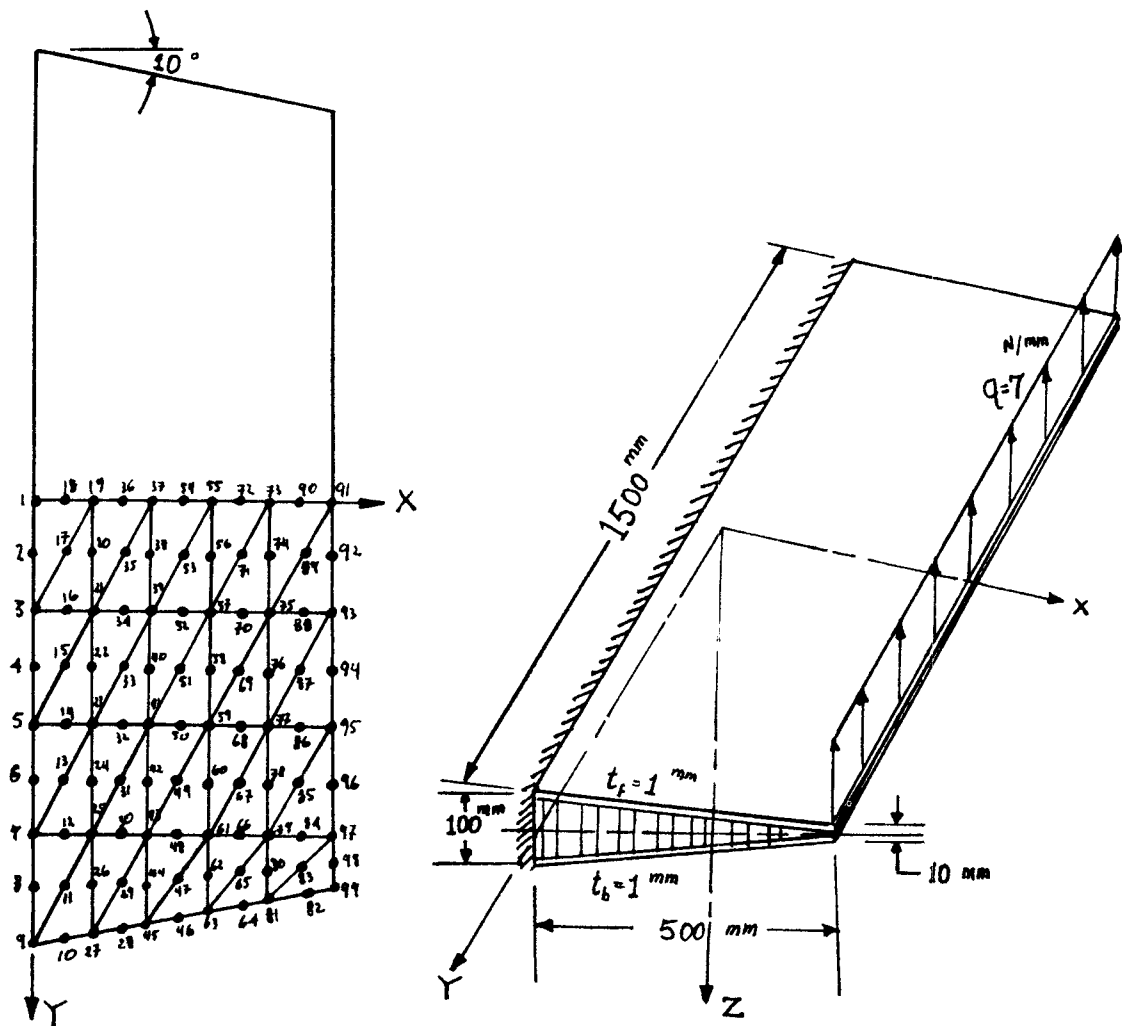
جدول (۶ - ۶): تنشهای اصلی ماکزیمم در مرکز نزدیکترین عنصر به وسط صفحه در شبهه بندی ۴.

علت تقارن سازه فقط  $\frac{1}{4}$  آن شبهه بندی شده است که جمعا " ۵۹۴ درجه آزادی دارد. بنابراین کل سازه ۱۱۲۲ درجه آزادی خواهد داشت. هندسه سازه ونحوه بارگذاری آن در شکل (۶ - ۶) نشان داده شده است.

ج) پوسته ساندویچی یکسر گیردار با ضخامت متغیر: به عنوان آخرین مثال پوسته ساندویچی با پرکننده شانه عسلی\* یکسر گیردار با ضخامت متغیر حل شده است که استفاده آن در تحلیل سازه ای قسمتهایی از هوا پیماست. به

\* Honey Comb

شکل (۶-۶) : پوسته ساندویچی با ضخامت متغیر تحت بارگذاری لبه ای و مدل اجزای محدود آن .



شکل (۶-۷) : سلول پرکننده شانه عسلی با متغیرهای هندسی آن .

خواص مکانیکی مواد مورد استفاده به صورت مقابل است.

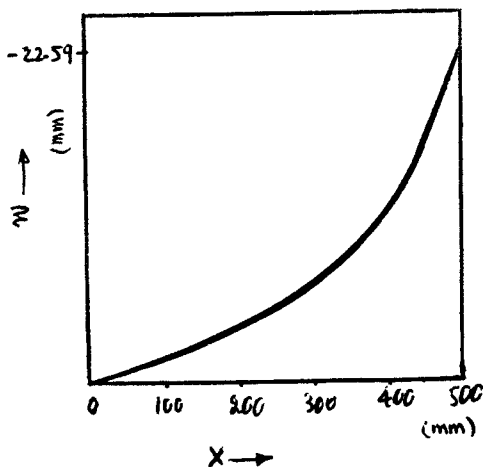
جدول (۷-۶): مشخصات مکانیکی مواد مورد استفاده

صفحات روکش آلومینومی	پرکننده شانه عسلی
$E_f = 6.9E+4 \text{ Mpa}$ $\nu_f = .3$	$E_c = 2.97E+3 \text{ MPa}$ $G_c = 5.13E+2 \text{ MPa}$ $\nu_c = .2$ $\theta = 0^\circ$

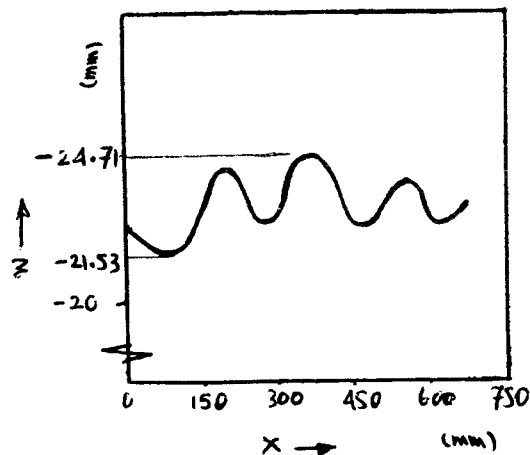
پیچ خوردگی لبه خارجی به علت مولفه  $\nu$  تغییر مکان و همچنین قید استفاده از عنصر کرنشی خطی است و در صورت ریز تر نمودن عناصرها خطای مشاهده شده تقلیل می یابد.

منحنی خمی پوسته در محور x ها (محور تقارن پوسته) در شکل (۸-۶) رسم گردیده است.

همچنین خم لبه خارجی پوسته (لبه اعمال بار) نیز در شکل (۹-۶) رسم گردیده است. مشاهده می شود که



شکل (۸-۶): خمی پوسته روی محور x ها



شکل (۹-۶): خمی در لبه خارجی

پوسته

تنش اصلی و تنش برش ماکزیمم در گره های موجود در تکیه گاه گیردار در جدول (۸-۶) داده شده اند.

جدول (۸ - ۶) تنش‌های اصلی و تنش برش ماکزیمم درگره‌های خواسته شده

گره	صفحهء روکش با لائی		برکننده ساندویچ		صفحهء روکش پائینی	
	$(\sigma_n)_{max}$ MPa	$(\tau)_{max}$ MPa	$(\sigma_n)_{max}$ MPa	$(\tau)_{max}$ MPa	$(\sigma_n)_{max}$ MPa	$(\tau)_{max}$ MPa
1	-25.217	12.608	$\pm 0.0506$	.0506	25.217	12.608
2	-26.809	13.404	$\pm 0.0604$	.0604	26.809	13.404
3	-28.158	14.079	$\pm 0.0683$	.0683	28.158	14.079
4	-28.853	14.427	$\pm 0.0717$	.0717	28.853	14.427
5	-29.502	14.75	$\pm 0.0742$	.0742	29.502	14.75
6	-30.165	15.083	$\pm 0.0753$	.0753	30.165	15.083
7	-32.	16.	$\pm 0.0751$	.751	32.	16.
8	-35.465	17.73	$\pm 0.0750$	.750	35.465	17.73
9	-53.13	27.36	$\pm 0.0725$	.0725	53.13	27.36

## ۷- بحث و نتیجه گیری:

تحلیل اجزای محدود سازه‌های ساندویچی نسبت به تحلیل سازه‌های معمول دیگر، زمان بیشتری از کامپیوتر خواهد گرفت و دقت خوب برای جوابها بستگی مستقیم به تجربهء تحلیلگر نسبت به شبکه بندی مناسب سازه دارد و در صورت شبکه بندی صحیح حلی اقتصادی خواهیم داشت که همگرایی و پایداری مطلوب را دارا خواهد بود.

علاوه بر عنصرهای انتخابی در مقاله می‌توان از عنصرهای چهار ضلعی با هشت گره نیز استفاده کرد ولی برای اغلب مسائل، عنصر مثلثی شش گره‌ای مناسبتر و برای سازه‌های با هندسه پیچیده براحتی قابل اعمال است.

از مثال اول چدید روشن می‌گردد که فرض مقاومت مصالح برای تیرها به همراه وجود تغییر شکل برشی، جوابهای نزدیکه جواب واقعی به دست می‌دهد ولی به هر حال مقداری

و اپیچش در مقطع تیر رخ می‌دهد، مثال دوم اندیشه‌ای از همگرایی روش رابه دست می‌دهد و همچنین اعتبار روش ریتس را تضمین می‌نماید. مثال سوم که مساله کاملاً عملی است تقویت در لبه‌های خارجی لبهء اعمال بار را روشن می‌سازد. البته نحوهء بارگذاری واقعی باید از آزمایش یا محاسبات بدست آید و در اینجا به عنوان مثال بارگذاری به صورت لبه‌ای و گسترده در نظر گرفته شده است.

بهر حال روشن شده است که روش اجزای محدود در تحلیل سازه‌های ساندویچی با شرایط مرزی و بارگذاری پیچیده می‌تواند کاملاً موفق باشد و جوابهای آنرا می‌توان با اطمینان جهت طراحی بکار گرفت. ضمناً در تهیه برنامه‌های کامپیوتری نیز سعی گردیده که حالت کلی بودن حفظ شود بطوریکه بتوان آنرا گسترش داد و همچنین استفاده از آن ساده باشد و جوابهای حاصله را بتوان با سرعت تحلیل کرد.

## ۸ - تقدیر و تشکر

۸ - پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک تحت عنوان آنالیز استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ساندویچی با استفاده از اجزا محدود ، فرهاد جاوید راد ، سال ۱۳۶۹ ، دانشکده فنی - دانشگاه تهران .

این موضوع که بخشی از یک طرح تحقیقاتی در دانشکده فنی - دانشگاه تهران است با استفاده از امکانات دانشکده مزبور صورت گرفته است . لذا از کلیه مسئولین ذیربط بخصوص از مرکز کامپیوتر دانشکده فنی به علت همکاری‌های بی‌شائبه و بوجود آوردن امکانات کامپیوتری قدردانی می‌شود .

## ۹ - فهرست منابع :

- 1- Y. Ding. Optimum design of sandwich constructions. Comput&strut 25.51-68 ( 1987)
- 2- URingertz. B. Esping & J. Backlnud. Computersizing of sandwich constructions. Dept. of aeror.autical structures and materials. The Royal institue of technology Stockholm. Sweden. report no. 85-6 (1985).
- 3- P.J. Holt & J.P.H. Webber. Finite elements for Honeycomb sandwich plates and shells. part 1 & 2: Formulation of Stiffness end consistent load matrices & Numercal results. Aeronaut. Jnl 113-123 (1980).
- 4- H.G. Allen, Analysis and design of structural sandwich panels, Pergamon Oxford (1969).
- 5- R.D. Cook Concepts and applications of finite element analysis, 2nd Edn. Newyork (1981).
- 6- R.H. Gallogher. Finite element analysis Fundmentals. Prentice Hall (1975).
- 7- K.J. Bathe, Finite elenemt proccdures in engineering analysis, Prentice Hall (1982)