مدارهای حدی پوانکاره و پایداری حرکت

نوشتهٔ :

دکتر نصرالله تابنده

استادیار دانشکده فنی

چکیده :

دراین مقاله مدارهای حدی پوانکاره تعریف و طی‌چند مثال بطورمفصل توضیح و مواردستفاده ازآن نیز که درمکانیک غیرخطی با اهمیت بوده و روز بروز براهمیت آن اضافه میشود شرح داده شده است . همچنین درمورد پایداری حل معادلات دیفرانسیلی که حل آنها معلوم است وموضوع پایداری حرکت بحث وطی مثالهائی طریقهٔ تعیین پایداری و ناپایداری این سیستم‌ها روشن شده است .

پایداری حرکت (حل‌های غیراستثنائی[1])

قبلاً [۶] و [۷] پایداری درنقاط حل (نقاط استثنائی) و یا معادلاً پایداری تعادل مورد بحث قرارگرفته بود . اکنون می‌پردازیم به بحث مختصری درمورد پایداری مسیر حرکت یعنی پایداری حل معادلهٔ دیفرانسیل نه بصورت عدد ثابت بلکه بصورت تابع متغیر . چون درعمل ، پایداری حل‌های متناوب[2] مورد توجه است ما نیز چنین حالاتی را موردمطالعه قرار خواهیم داد .

قبل ازشروع بحث یادآوری‌شویم که منظور از ماتریس $[A]$ ماتریس $n\times n$ و $\{A\}$ ماتریس $n\times 1$ (یعنی بردار عمودی) و $|[A]|$ به معنی دترمینان ماتریس $[A]$ خواهد بود .

فرض کنیم :

$$\frac{dx}{dt}=p(x\,,\,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=q(x\,,\,y) \qquad (۱)$$

---

۱ — Nonsingular Solutions ۲ — Periodic Solutions

معادلات دیفرانسیل یک سیستم دینامیکی باشند: این متغیرها میتوانند متغیرهای مربوط به‌حرکت با یک درجه آزادی درصفحهٔ نمود[1] باشند (مثلاً x و $y=\dot{x}$. دراین‌صورت $p(x, y)\equiv y$).

فرض کنیم سیستم (۱) دارای یک حل متناوب و غیر ثابت بصورت:

$$x_1=\Phi(t)$$
$$y_1=\Psi(t) \qquad (۲)$$

باشد. بعلاوه فرض می کنیم توابع خطائی مانند $\xi(t)$ و $\eta(t)$ وجود داشته و بنابراین مورد نظر ما حل هائی باشند که از اغتشاش[2] حل های متناوب داده شده باندازهٔ $\xi(t)$ و $\eta(t)$ بدست آمده و بنابراین عبارتند از:

$$x=x_1+\xi$$
$$y=y_1+\eta \qquad (۳)$$

فرض میشود که قدر مطلق خطاهای ξ و η بقدر کافی کوچک هستند که میتوان از $\xi^2, \eta^2, \xi^3, \ldots$ در مقابل توانهای اول آنها صرفنظر کرد. با جانشین کردن روابط (۳) در معادلهٔ دیفرانسیل و گسترش آن برحسب سری تیلور درنزدیکی x_1 و y_1 روابط تغییرات[3] زیر بدست میآیند.

$$\frac{d\xi}{dt}=p_x(x_1, y_1)\,\xi+p_y(x_1, y_1)\,\eta$$
$$(٤)$$
$$\frac{d\eta}{dt}=q_x(x_1, y_1)\,\xi+q_y(x_1, y_1)\,\eta$$

این سیستم خطی و پریودیک با تناوب T بوده و بنابراین حل ماتریسی اساسی[4] آن (یعنی حل معادلهٔ ماتریسی $[Y]'=[P][Y]$ که درآن Y ماتریسی 2×2 است) بصورت:

$$[Y(t)]=[Q(t)]\,e^{[B]t} \qquad (٥)$$

خواهد بود [۲]. دراینجا $[B]$ ماتریسی ثابت، $[Y(t)]$ و $[Q(t)]$ ماتریس های متناوب با تناوب T و اندازهٔ (2×2) میباشند. دترمینان $[Y(t)]$ برابر است با:

$$|[Y(t)]|=|[Q(t)]|\;|e^{[B]t}|=\exp\left[\int_0^t \mathrm{trace}\,[P(s)]ds\right] \qquad (٦)$$

۱ — Phase Plane
۲ — Perturbation
۳ — Variational Equations
٤ — Principal Matrix Solution

دراینجا ماتریس $P(t)$ ماتریس ضرائب رابطهٔ (٤) است .

$$P(t)=\begin{vmatrix} p_x(x_1, y_1) & p_y(x_1, y_1) \\ q_x(x_1, y_1) & q_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}$$

و :

$$\text{trace } P(s)=p_x(x_1, y_1)+q_y(x_1, y_1)$$

(بطور کلی اگرماتریس $n\times n$ بصورت $[A]=(a_{ij})$ داشته باشیم، تعریف اثر A ویا trace A عبارتست از :

$$(\text{trace } [A]=\sum_{k=1}^{n} a_{kk})$$

دترمینان $e^{[B]t}$ برابر است با :

$$|e^{[B]t}|=\exp(\text{trace } [B]t) \tag{٧}$$

چون (ماتریس واحد $\equiv[I]=[Y(o)]$) رابطهٔ (٥) نشان میدهد که $[Q(o)]=[I]$ و بنابراین چون $[Q(t)]$ ماتریس متناوبی است $[Q(T)]=[I]$ خواهد بود .

از روابط (٦) و (٧) نتیجه میگیریم که :

$$\begin{aligned} \text{trace } [B] &= \frac{1}{T}\int_{o}^{T} \text{trace } [P(s)]\, ds \\ &= \frac{1}{T}\int_{o}^{T} [p_x(x_1(s), y_1(s))+q_y(x_1(s), y_1(s))]\, ds \end{aligned} \tag{٨}$$

درحالت کلی اثر یک ماتریس ثابت $[B]$ برابر است با مجموع ریشه‌های مشخصهٔ آن و بنابراین اگر λ_1 و λ_2 این ریشه‌ها مربوط به ماتریس $[B]$ باشند خواهیم داشت :

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{T}\int_{o}^{T} [p_x(x_1, y_1)+q_y(x_1, y_1)]\, ds \tag{٩}$$

برای اثبات این رابطه میتوان باین‌طریق عمل کرد . فرض کنیم حل ماتریسی اساسی معادلهٔ (٤) عبارت باشد از :

$$[Y(t)]=\begin{pmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi_2 & \eta_2\end{pmatrix} \qquad [Q(t)]=\begin{pmatrix}f_{11}(t) & f_{12}(t)\\ f_{21}(t) & f_{22}(t)\end{pmatrix}$$

بنابراین داریم [۲] :

$$\xi_1=e^{\lambda_1 t}f_{11}(t) \qquad \eta_1=e^{\lambda_2 t}f_{12}(t) \tag{۱۰}$$

$$\xi_2=e^{\lambda_1 t}f_{21}(t) \qquad \eta_2=e^{\lambda_2 t}f_{22}(t)$$

دراینجا f_{11} ، f_{12} ، f_{21} و f_{22} توابع پریودیک t با پریود T و λ_1 و λ_2 اعداد ثابتی میباشند که توان‌های سیستم نامیده میشوند .

جانشینی روابط (۱۰) در روابط (٤) و حل آن‌ها برای p_x و q_y نتیجه خواهد داد :

$$p_x=\frac{\dot{\xi}_1\eta_2-\dot{\xi}_2\eta_1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1} \qquad q_y=\frac{\xi_1\dot{\eta}_2-\xi_2\dot{\eta}_1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1} \tag{۱۱}$$

با استفاده از روابط (۱۰) مخرج‌های این عبارات را میتوان اینطور نوشت :

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\,[f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}]=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\,\delta(t)$$

که درآن $\delta(t)$ تابعی متناوب با تناوب T است . جمع روابط (۱۱) نتیجه میدهد :

$$p_x+q_y=\frac{\dot{\delta}}{\delta}+(\lambda_1+\lambda_2)$$

و متوسط این مقدار در دورهٔ تناوب T عبارتست از :

$$\frac{1}{T}\int_0^T (p_x+q_y)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{\delta}}{\delta}\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T(\lambda_1+\lambda_2)\,dt \tag{۱۲}$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{\delta}}{\delta}\,dt+(\lambda_1+\lambda_2)$$

چون تابع زیر اولین انتگرال طرف راست معادله تابعی متناوب با تناوب T است پس انتگرال آن در فاصلهٔ صفر تا T برابر صفر بوده و نتیجهٔ مطلوب یعنی رابطهٔ (۹) بدست میآید . دستگاه معادلات (٤) حداقل دارای یک حل متناوب $(\eta=\dot{y}_1$ و $\xi=\dot{x}_1)$ میباشد و بنابراین حداقل یکی از ریشه‌های مشخصهٔ λ_1

و λ_2 بایستی برابر صفر باشد . برای اثبات این مطلب فرض کنیم :

$$\xi(t)=c_1\xi_1(t)+c_2\xi_2(t)$$

$$\eta(t)=c_1\eta_1(t)+c_2\eta_2(t) \qquad (۱۳)$$

این حل پریودیک باشد که همه جا برابر صفر نیست. از روی روابط (۱۰) میتوان به‌آسانی نشان داد که :

$$c_1(e^{\lambda_1 t}-1)\xi_1+c_2(e^{\lambda_2 t}-1)\xi_2=0$$

$$c_1(e^{\lambda_1 t}-1)\eta_1+c_2(e^{\lambda_2 t}-1)\eta_2=0 \qquad (۱٤)$$

چون حل‌های (ξ_1,η_1) و (ξ_2,η_2) بطور خطی مستقل از هم و حداقل یکی از c_1 و c_2 مخالف صفر است رابطهٔ بالا درصورتی میتواند درست باشد که :

$$e^{\lambda_1 t}=1 \quad \text{و یا} \quad e^{\lambda_2 t}=1$$

(و یاهردو) وازآنجا $\lambda_2=0$ یا $\lambda_1=0$ (و یا $\lambda_1=\lambda_2=0$) . بنابراین اگر ریشهٔ مشخصهٔ مخالف صفر را λ بنامیم رابطهٔ (۱۲) عبارت خواهد بود از :

$$\lambda=\frac{1}{T}\int_0^T [p_x(x_1,y_1)+q_y(x_1,y_1)]\,dt \qquad (۱۵)$$

میتوان ثابت کرد که اگر $\lambda<0$ حل (x_1,y_1) پایدار و اگر $\lambda>0$ این حل ناپایدار است . درمورد پایداری تعادل قسمت حقیقی هردو ریشهٔ مشخصه λ_1 و λ_2 بایستی منفی باشند درصورتیکه دراینجا فقط ریشهٔ مشخصهٔ مخالف صفر موردنظر خواهد بود .

چند مثال مطلب را روشن‌تر خواهد کرد .

مثال ۱ ـ معادلهٔ ریلی[1] بصورت زیر را درنظر بگیریم :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\mu\left[\frac{dx}{dt}-\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3\right]+x=0$$

این مسئله برای $\mu>0$ دارای یک حل پریودیک واحد است که برای μ کوچک میتوان آن را با $x(t)=2\cos t$ تقریب گرفت [۳] . معادلات (٤) عبارتند از :

---

۱ Rayleigh

$$\frac{d\xi}{dt}=\eta$$

$$\frac{d\eta}{dt}=-\xi+\mu\left[1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]\eta$$

دراینجا $\frac{dx}{dt}=y$ و بنابراین:

$$p(x\,,y)=y$$

$$q(x\,,y)=\mu\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]-x$$

با استفاده از معادلهٔ (۱۰) خواهیم داشت :

$$\lambda=\frac{\mu}{T}\int_0^T\left[1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]dt$$

و یا برای مقادیر کوچک μ و بطور تقریب :

$$\lambda=\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-4\sin^2 t)\,dt=-\mu$$

ازاینجا معلوم میشود که حل پریودیک معادلهٔ ریلی دارای پایداری مداری حداقل بازاء مقادیر کوچک μ میباشد . عملاً این مطلب برای تمام $\mu>0$ صادق است .

مثال ۲ ـ دستگاه معادلات دیفرانسیل :

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1)$$

را درنظر میگیریم . برای این دستگاه :

$$p_x=3x^2+y^2-1$$

$$q_y=3y^2+x^2-1$$

حل دستگاه معادلات فوق نشان میدهد [٤] که مدار بدست آمده مداری حلزونی است بطوریکه بازاء $t\to-\infty$ مدار $r^2=x^2+y^2=1$ وبازاء $t\to+\infty$ نقطهٔ استثنائی $r^2=x^2+y^2=0$ بدست میآید .

اکنون اگرمنظور مطالعهٔ مدار $r=1$ باشد میتوان ازحل‌های $x_1=\cos t$ و $y_1=-\sin t$ استفاده کرده و نتیجه گرفت :

$$\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(4-2)\,dt=2>0$$

و بنابراین مدار حدی [توضیح آن بعداً خواهد آمد] $r=1$ ناپایدار است .

مثال ۳ ـ ازسیستم :

$$\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2-1)^2+y$$

$$\frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2-1)^2-x$$

نتیجه میگیریم :

$$p_x(x_1\,,\,y_1)+q_y(x_1\,,\,y_1)=0$$

و ازآنجا علاوه برریشهٔ مشخصهٔ اولی ریشهٔ دومی نیز $\lambda=0$ است . در اینجا ریشهٔ مشخصه نتیجه‌ای راجع به‌پایداری و عدم پایداری حل معادله نمیدهد .

مدارهای حدی پوانکاره [1]

بسیاری از مسائل عملی دارای معادلات دیفرانسیلی غیرخطی بصورت :

$$\frac{dx}{dt}=P(x\,,\,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=Q(x\,,\,y) \tag{۱۶}$$

میباشند که درآن P و Q توابعی دارای حوزه‌ای مشترك درصفحهٔ xy هستند .

اگر معادلهٔ دومی را تقسیم برمعادلهٔ اولی کنیم معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x\,,\,y)}{P(x\,,\,y)} \tag{۱۷}$$

بدست میاید که میتوان حل آن را بصورت :

۱ — Limit Cycles of Poincaré

$$f(x, y)=0 \tag{۱۸}$$

فرض کرد .

ممکن است حل این معادله را بطریق دیگری نیز بدست‌آورد . مشتق معادلهٔ دوم رابطهٔ (۱۶) را میگیریم . دراین وقت سه رابطه برای x و $\frac{dx}{dt}$ خواهیم داشت و بنابراین ، حداقل از نظر تئوری، میتوان x و $\frac{dx}{dt}$ را ازاین سه معادله حذف و معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دومی برحسب y پیدا کرد . حل این معادله را $y=y(t)$ مینامیم و بطریق مشابه میتوان حلی برای تابع دیگر بصورت $x=x(t)$ پیدا کرد . بنابراین دو رابطهٔ :

$$x=x(t) \qquad y=y(t) \tag{۱۹}$$

معادلات پارامتری‌حل‌معادله که بصورت(۱۸) داده شده است میباشند. صفحهٔ xy را که هریک‌ازمحورهای مختصات آن یکی ازاین دوتابع را نشان میدهد صفحهٔ نمود[1] مینامیم و بنابراین تابع $f(x, y)$ تابعی در صفحهٔ نمود خواهد بود . چون این تابع دارای عدد ثابت انتگرال گیری است نمایش دهندهٔ یک دسته منحنی درصفحهٔ نمود خواهد بود که مسیرهای نمود[2] نامیده میشوند .

البته مسئله مطرح شده را میتوان بیشتر عمومیت داد . مثلاً معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر را درنظر میگیریم .

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(t, x, \dot{x}) \tag{۲۰}$$

این معادله را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$\frac{dx}{dt}=y \qquad \frac{dy}{dt}=F(t, x, y) \tag{۲۱}$$

حل این سیستم را بنابراین میتوان بصورت معادلات (۱۹) که نمایش پارامتری $f(x, y)=0$ است نوشت . به‌این طریق به معادلهٔ (۲۰) یک صفحهٔ نمود و مسیرهای نمود نسبت داده شده است . البته میتوان این مطالب را درمورد تعداد بیشتر متغیر نیز عمومیت داد . فرض کنیم سیستم :

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y, z) \qquad \frac{dy}{dt}=Q(x, y, z) \qquad \frac{dz}{dt}=R(x, y, z) \tag{۲۲}$$

داده شده و حل پارامتری آن چنین باشد :

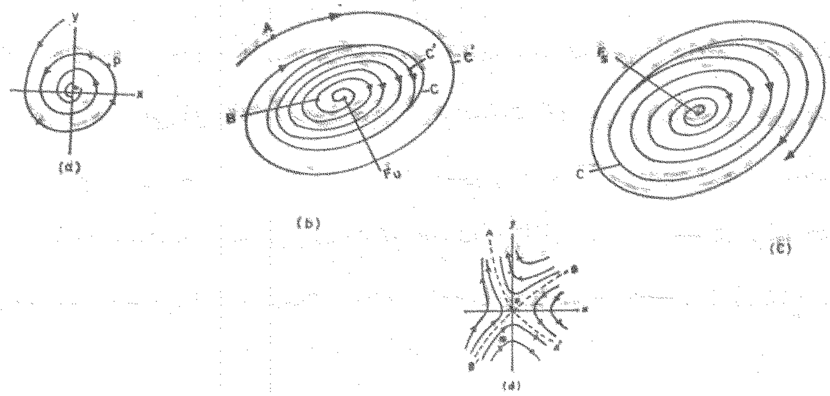
$$x=x(t) \qquad y=y(t) \qquad z=z(t) \tag{۲۳}$$

۱ — Phase Plane   ۲ — Phase Trajectories

دراین‌صورت بجای صفحهٔ نمود فضای نمود متشکل از محورهای x ، y و z وجود خواهد داشت .

چون مطالبی که درمورد روابط (۹ ۱) بسط داده شود اغلب درمورد تمام این مسائل قابل اجرا است ما برای سادگی بحث این روابط را انتخاب می‌کنیم .

در روابط (۹ ۱) فرض کنیم توابع x و y برای تغییرات t بین $-\infty$ و $+\infty$ معین باشند. دراین‌صورت منحنی بدست آمده میتواند هرشکلی مثلاً یکی از منحنی‌های (ش ۱) را داشته باشد .



شکل ۱

کمان‌های روی این منحنی‌ها جهت هرمسیر را درجهت ازدیاد t نشان میدهند . درمنحنی اول (ش a ۱) نقطهٔ P(x و y) بتدریج بطرف مبدء مختصات متمایل میشود . این نقطه کانون و این نوع حرکت پایدار گفته میشود . درمنحنی دوم (ش b ۱) پدیدهٔ دیگری مشاهده میشود . دراین حرکت مسیرها بطرف یک منحنی ثابت c بطور مجانبی نزدیک میشوند . منحنی c مدار حدی[۱] نامیده میشود . این مدارها اولین بار توسط پوانکاره[۲] معرفی شدند. دراین حالت میتوان نتیجه گرفت که معادلات (۹ ۱) بطور مجانبی بطرف توابع متناوب میل خواهند کرد و حرکت پایدار خواهد بود. درحالت اخیر اگر جهت کمانهای روی منحنی‌ها را معکوس کنیم حرکت درخارج ازمدار حدی ناپایدار بوده ودرداخل مدار بطرف مبدء میل خواهد نمود (در واقع این به معنی آن است که t بطرف $-\infty$ بجای $+\infty$ میل می‌کند) .

بالاخره در (ش d ۱) حالت ناپایدار دراطراف مبدء مشاهده میشود زیرا که مدارها همه هذلولی بوده و گرچه ممکن‌است به مبدء نزدیک شوند ولی‌قبل‌ازآن که به‌آن برسند شروع به دور شدن ازآن‌خواهند کرد . دراین حالت مبدء نقطهٔ انعطاف یا نقطهٔ زین[۳] گفته میشود . منحنی‌های AA′ و BB′ خاصیت حدی برای مدارها دارند و چون این منحنی‌ها منطقه را به قسمتهائی که درهریک ازآن‌حرکت معینی وجود دارد تقسیم می‌کنند ، جداکننده یا سپاراتریکس[۴] نامیده میشوند .

---

۱ — Limit Cycle
۲ — Poincaré
۳ — Saddle Point
۴ — Separatrix

از نظر ریاضی مدار حدی C به معنی این است که بازاء هرعدد مثبت ε عددی t_0 را میتوان‌چنان پیدا کرد که اگر $t>t_0$ (و یا درحالت ناپایدار $t<t_0$) باشد فاصلهٔ نقطهٔ $(x(t)\ ,\ y(t))$ از نقطه‌ای از مسیر C کمتر از ε است. مسیر $(x\ ,\ y)$ اگر از داخل و خارج مدار C بازاء $t \longrightarrow \infty$ به‌آن نزدیک شود این مسیر پایدار[1] و اگر بازاء $t \longrightarrow -\infty$ به آن نزدیک شود مسیر ناپایدار[2] خوانده میشود. اگر مسیر نقطهٔ $(x\ ,\ y)$ از خارج بازاء $t \longrightarrow +\infty$ و از داخل بازاء $t \longrightarrow -\infty$ (و یا بالعکس) به مدار C نزدیک شود این مسیر نیمه پایدار یا پایدار یک جانبه[3] نامیده میشود.

مسیرهای حدی که درعمل به‌آن‌ها برخورد می‌کنیم خاصیت این را دارند که نه تنها یک مسیر بلکه هرمسیری که درحوزهٔ معینی از صفحهٔ نمود قرار گیرد بسمت آن میل مینماید. این بدان معنی است که هرچه شرایط‌اولیه باشدا گردرصفحهٔ نمود این شرایط مسیر را درحوزهٔ موردبحث قرار دهدحرکت بالاخره به‌حرکت متناوب‌معین‌شده توسط مدار حدی‌نزدیک‌خواهد شد (بازاء $t \longrightarrow +\infty$ و یا $t \longrightarrow -\infty$). و بنابراین مسیر و حرکت انتهائی (درحالتهای $t \longrightarrow +\infty$ و یا $t \longrightarrow -\infty$) بستگی به شرایط اولیه ندارند.

مدارهای حدی از این نظر موردتوجه هستند که یاخود حل‌معادلات(۱۶) بوده و یا حد حل‌های این معادلات میباشند. بنابراین وجود حل‌های متناوب معادلات(۱۶) (حداقل‌درحد) درصورت موجود بودن مدار حدی مسلم میشود. ولی عکس مطلب درست نیست یعنی وجود حل‌متناوب دلیل وجود مدار حدی نمیتواند باشد. مثلاً معادلات $\dot{x}=y$ و $\dot{y}=-x$ دارای حل متناوب بوده ولی مدار حدی در آن وجود ندارد. برای روشن‌تر شدن مطالب بالا تعدادی مثال‌آورده میشود.

مثال ٤ - یکی از مسائل جالبی که توسط یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی بیان میشود مسئلهٔ تعقیب است. دراین مثال‌خاص فرض‌می‌کنیم که نقطهٔ P با سرعت ثابت v روی‌مسیر دایره‌ای بمرکز O ، مبدء مختصات و شعاع a حرکت می‌کند. نقطهٔ Q (که میتواند داخل ، روی و یا خارج دایرهٔ مسیر P باشد) با سرعت kv طوری حرکت می‌کند که جهت سرعت آن بطرف نقطهٔ P است. k عددی ثابت است که میتواند کوچکتر ، مساوی ویابزرگترازواحد باشد. میتوان ثابت کرد [۳] که معادلات‌دیفرانسیل حرکت نقطهٔ تعقیب کنندهٔ Q عبارتند از :

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=\frac{a}{\rho}\cos\Phi-1$$

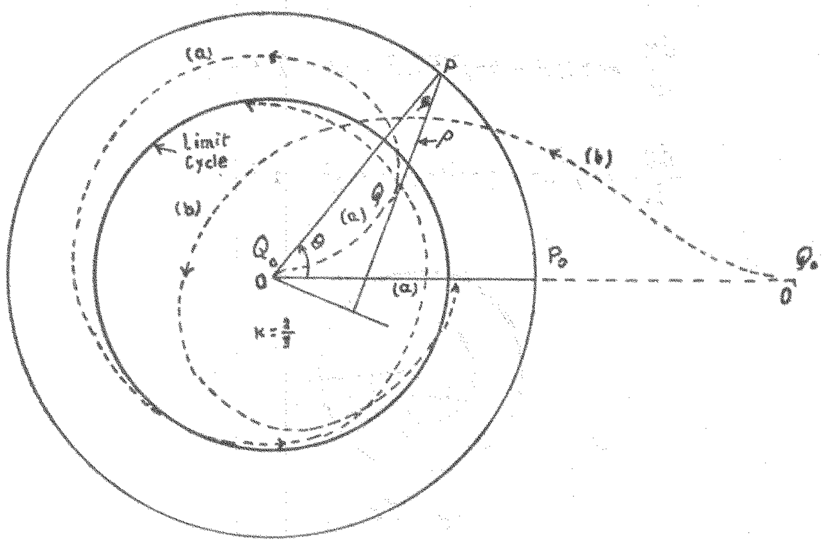
$$\frac{d\rho}{d\theta}=a\sin\Phi-ka$$

---

۱ — Stable　　۲ — Unstable　　۳ — Half-Stable (Semi-Stable)

متغیرها مطابق (ش ۲) و عبارتند از :

خط واصل نقاط متحرك P و $Q = \rho$



شکل ۲

θ زاویهٔ حرکت نقطه P از محور Ox و Φ زاویهٔ خطوط OP و PQ است . بعلاوه فرض شده که مبدء حرکت برای نقطهٔ P نقطهٔ P_0 روی محور Ox و مبدء حرکت Q نقطهٔ Q_0 است . میتوان ثابت کرد [۳] که اگر $k > 1$ باشد نقطهٔ تعقیب کنندهٔ Q درحد به نقطهٔ P میرسد واگر $k \leqslant 1$ باشد این مطلب غیرممکن است . اگر k ، نسبت سرعتها کمتر از واحد باشد مسیر تعقیب کننده ، صرفنظر از مبدء آن به دایره‌ای به شعاع ka و بمرکز مبدء مختصات نزدیک میشود . این مطلب برای $k = \frac{2}{3}$ ودردوحالت که نقطهٔ تعقیب کننده دریکی از مبدء مختصات و در دیگری ازخارج‌دایرهٔ مسیر نقطهٔ تعقیب شونده شروع می‌کند در (ش ۲) نشان داده شده است . حد دو مسیر مدار حدی مسئله است .

دراینجا میتوان نشان داد که مدار حدی‌خود نیز حل‌مسئله‌است. جهت اثبات معادلهٔ دیفرانسیلی را که ρ بایستی درآن صدق کند بدست میاوریم . این معادله بصورت زیر بدست میآید [۳] .

$$\rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho \sqrt{\Delta} - \Delta = o \qquad \Delta = a^2 - \left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - ka\right]^2$$

ملاحظه میشود که اگر نقطهٔ Q روی مدار حدی باشد فاصلهٔ دونقطهٔ P و Q برابر است با :

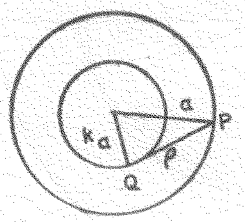
$$\rho = a\sqrt{1 - k^2}$$

و این یک حل معادلهٔ دیفرانسیل بالا است .

مثال ۵ ـ دراینجا مثال ۳ قبلی را که مدارهای حدی آن توسط بیر کهف[1] مطالعه شده دومرتبه ازاین‌نظر مورد مطالعه قرار میدهیم . دستگاه معادلات زیر را درنظر میگیریم :

$$\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2-1)^2+y$$

$$\frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2)^{1/2}(x^2+y^2-1)^2-x$$



شکل ۳

تبدیل این مختصات به مختصات قطبی نتیجه خواهد داد :

$$\frac{dr}{dt}=r(r^2-1)^2 \qquad \frac{d\theta}{dt}=1$$

با تغییر تابع بصورت $u=r^2$ نتیجه میگیریم :

$$\frac{du}{dt}=2u(u-1)^2$$

و ازآنجا که :

$$\frac{du}{u(u-1)^2}=\frac{du}{u}-\frac{du}{u-1}+\frac{du}{(u-1)^2}=2dt$$

درنتیجهٔ انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$\text{Log}\,\frac{u}{u-1}-\frac{1}{u-1}=\text{Log}k+2t$$

و ازآنجا و با تغییر تابع مجدد بصورت $u-1=v$ خواهیم داشت :

$$\left(\frac{1}{v}+1\right)e^{-\frac{1}{v}}=\frac{u}{u-1}e^{-\frac{1}{u-1}}=ce^{2t}$$

۱ — G. D. Birkhoff

ملاحظه میشود که $r=1$ حل مسئله است (این مطلب توسط معادلهٔ دیفرانسیل بصورت قطبی واضح دیده میشود). درانیجا رفتار مسیرهای حدود این دایره را مورد بررسی قرار میدهیم. اگر $r=1-\varepsilon$ و $(1>\varepsilon>0)$ باشد $v<0$ بوده و از آنجا رابطهٔ اخیر نشان میدهد که $c<0$. بنابراین اگر دراین حالت $r<1$ (یعنی از داخل دایرهٔ $r=1$) عدد منفی v بسمت صفر میل نماید خواهیم داشت $t\longrightarrow+\infty$ و این بدین معنی است که $r=1$ مدار حدی پایدار ازطرف داخل دایره است. بعکس اگر $r=1+\varepsilon$ و $\varepsilon>0$ باشد $v>0$ و ازآنجا $c>0$ خواهند بود. دراین حالت اگر $v\longrightarrow 0$ (یعنی $r\longrightarrow 1$ ازطرف خارج دایره) $e^{2t}\longrightarrow 0$ یعنی $t\longrightarrow-\infty$ یعنی دایرهٔ $r=1$ مدار حدی ناپایدار از طرف خارج دایره است. این همان حالتی است که آن را پایدار یک جانبه نامیدیم.

مثال ۶ ـ این مثال به جهت آن آورده شده که نشان میدهد یک سیستم ممکن است بیش از یک مدار حدی داشته باشد. معادلات زیر را درنظر میگیریم.

$$\frac{dy}{dt}=x+y\left[ac\sqrt{x^2+y^2}+(bc+ad)+\frac{bd}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$\frac{dx}{dt}=-y+x\left[ac\sqrt{x^2+y^2}+(bc+ad)+\frac{bd}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

دراینجا a، b، c و d اعداد ثابتی هستند که درآن $D=ad-bc\neq 0$. با استفاده از مختصات قطبی

$$r^2=x^2+y^2 \qquad , \qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

نتیجه میگیریم:

$$r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}$$

$$r^2\dot{\theta}=x\dot{y}-y\dot{x}$$

با جانشینی معادلات دیفرانسیل در روابط اخیر نتیجه میگیریم:

$$\frac{dr}{dt}=(ar+b)(cr+d) \qquad , \qquad \frac{d\theta}{dt}=1$$

و حل این سیستم بصورت:

$$r=-\frac{adk\,e^{Dt}-bc}{ac(k\,e^{Dt}-1)} \qquad\qquad \theta=t+t_0$$

که درآن k و t_0 اعداد ثابتی هستند میباشند.

درحالت خاص $a=b=-c=d=1$ و بنابراین $D=2$ خواهیم داشت :

$$r=\frac{k e^{2t}+1}{k e^{2t}-1}$$

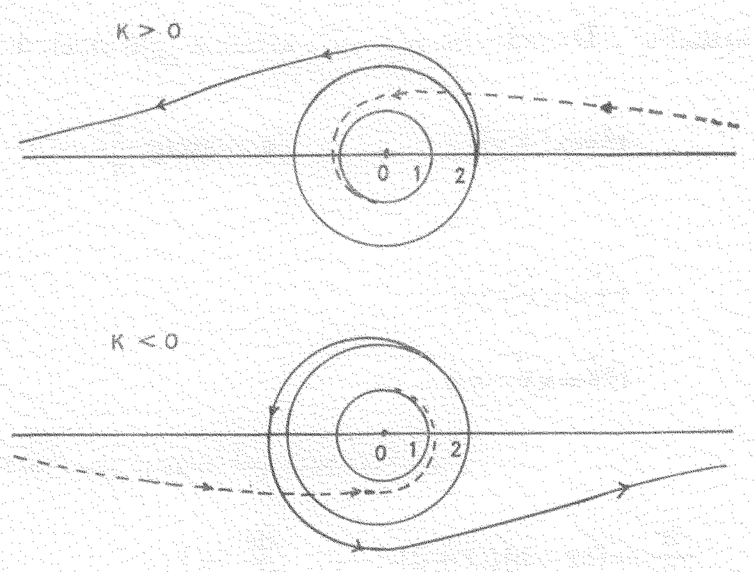
این رابطه نشان دهنده یک دسته منحنی‌های حلزونی شکلی‌است که به‌دایره‌ای با شعاع واحد ازطرف‌خارج و از طرف داخل دایره نزدیک میشوند و این دایره تنها مدار حدی مسئله است . اگر مقادیر زیر برای اعداد ثابت فرض شوند :

$$a=1 \qquad b=2 \qquad c=-1 \qquad d=1$$

خواهیم داشت :

$$r=\frac{k e^{3t}+2}{k e^{3t}-1}$$

دراینجا مدارهای حدی دو دایره بشعاع های $r=1$ (وقتی $t \longrightarrow \infty$) و $r=2$ (وقتی $t \longrightarrow -\infty$) خواهند بود . منحنی‌های رابطهٔ اخیر برای r وبرای دوحالت $k>0$ و $k<0$ درشکل ٤ داده شده‌اند . ملاحظه میشود که مدار $r=1$ پایدار و مدار $r=2$ ناپایدار است .



شکل ٤

وجود مدار حدی دریک سیستم‌دیفرانسیل نشان دهندهٔ وجود حل‌هائی‌است که گرچه ممکن‌است خود متناوب نباشند ولی دارای حدی متناوب‌هستند . البته اگر مدار حدی خود نیز حل‌معادلهٔ دیفرانسیل باشد حل متناوبی نیز برای معادلهٔ دیفرانسیل وجود خواهد داشت .

برای نشان دادن طریق استفاده از مدار حدی از مثال اخیر (مثال ۶) استفاده می کنیم. همانطور که ملاحظه شد یک حل معادلات دیفرانسیل اصلی بصورت زیر داده شده :

$$r(t)=\frac{k\,e^{2t}+1}{k\,e^{2t}-1} \qquad \theta=t+t_0$$

که درآن برای سهولت فرض شده است $k>0$.

وجود مدار حدی نشانهٔ وجود حل تقریباً متناوبی است که میتوان آن را بطریق زیر نوشت :

$$x(t)=A(t)\cos(t+t_0)$$
$$y(t)=A(t)\sin(t+t_0)$$

جانشینی این روابط درمعادلات دیفرانسیل اصلی نتیجه میدهد :

$$\frac{dA}{dt}=1-A^2$$

البته با استفاده از روابط بالا نیز میتوان نتیجه گرفت :

$$A(t)=r(t)$$

ملاحظه میشود که حل سیستم اصلی عبارتست از دوتابع $x(t)$ و $y(t)$ که باستثناء اینکه ضریب $A(t)$ متغیر بوده و درحد به سمت واحد میل مینماید ، هارمونیک میباشند این مثال راهنمائی برای حالت‌های کلی‌تر میتواند باشد . میتوان نتیجه گرفت که درصورت وجود یک مدار حدی میتوان درنزدیکی این‌مدار حل سیستم را بصورت :

$$x=A(t)\,S(t) \qquad y=A(t)\,C(t) \qquad (۲٤)$$

نوشت که درآن توابع $S(t)$ و $C(t)$ توابع هارمونیک با تناوب مشترک Ω میباشند .

مثال ۷ ـ برای نشان دادن یک حالت کلی‌تر از مثال ۶ سیستم معادلات زیر را درنظر میگیریم :

$$\frac{dy}{dt}=x-y+x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)$$

$$\frac{dx}{dt}=-x-y+x(x^2+y^2)-y(x^2+y^2)$$

دراین مثال مبدء یک نقطهٔ استثنائی سیستم است .

با جانشینی این معادلات در روابط مختصات قطبی :

$$r\dot{r}=x\dot{x}+y\dot{y}$$

$$r^2\dot{\theta}=x\dot{y}-y\dot{x}$$

نتیجه میگیریم :

$$\dot{r}=r(r^2-1) \qquad \dot{\theta}=r^2+1$$

و حل این معادلات عبارتند از:

$$r(t)=(1+k\,e^{2t})^{-1/2} \qquad \theta=t+t_0+\frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-r^2)$$

که درآن t_0 و k اعداد ثابتی هستند و ما فرض می کنیم $k>0$.

بازاء $t\longrightarrow+\infty$ داریم $r\longrightarrow 0$ و این نشانهٔ پایداری مبدء بصورت نقطهٔ استثنائی است . همچنین بازاء $t\longrightarrow-\infty$ خواهیم داشت $r=1$ و بنابراین دایرهٔ با شعاع واحد مدار حدیِ مسئله است . ملاحظه میشود که این مدار حدی خود نیز حل مسئله است .

اکنون حلی بصورت :

$$x=A(t)\cos(t+\Phi)$$

$$y=A(t)\sin(t+\Phi)$$

فرض میکنیم . دراینجا $A(t)$ و $\Phi(t)$ توابعی هستند که بایستی تعیین شوند . با جانشینی x و y در روابط اصلی و ساده کردن روابط معادلات دیفرانسیل برای A و Φ چنین بدست میآیند :

$$\frac{dA}{dt}=-A+A^3 \qquad , \qquad \frac{d\Phi}{dt}=A^2$$

و درنتیجه :

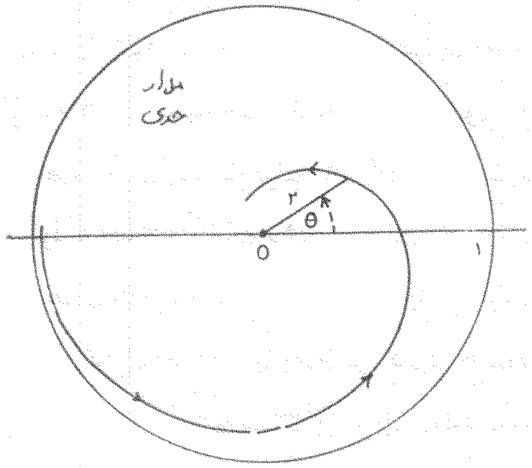
$$A(t)=r(t) \qquad \Phi(t)=t_0+\frac{1}{2}\log(1-r^2)$$

با فرض k مثبت ملاحظه میشود که تغییرات t بین $-\infty$ و $+\infty$ باعث تغییرات $A(t)$ بین واحد و صفر خواهد شد. بنابراین حرکت هارمونیک ترمز شده[1] بوده ونسبت به مدار $r=1$ ناپایدار و نسبت به نقطهٔ استثنائی $r=0$ پایدار است .

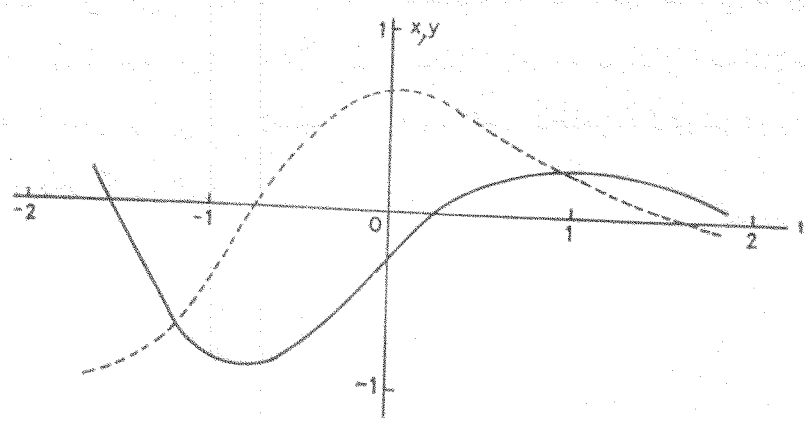
---

[1] –Damped

با فرض $k=1$ و $t_0=0$ مسیر نمود برای این مسئله درشکل ۵ وقسمتی از منحنی‌های $x(t)$ و $y(t)$ درشکل ۶ نشان داده شده‌اند .



شکل ۵



شکل ٦

هرچند که مثال‌های داده شده بسیار مقدماتی بودند ولی نمونه‌ای هستند ازطریق حل مسائل پیچیده‌تر . وقتی یک مدار حدی وجود دارد حل سیستم درنزدیکی آن را میتوان با تعیین فرسهای مجانبی $A(t)$ ، $C(t)$ و $S(t)$ داده شده در رابطهٔ (۲٤) تقریب گرفت .

معادلات دیفرانسیل بسیاری از مسائل مکانیک غیرخطی و واجد مدار حدی‌میباشند . درگذشته برای‌حل کردن‌این‌معادلات‌مدل‌ریاضی‌آن‌را بطریقی ساده میکردند که نمونهٔ آن‌فرض‌حرکات کوچک‌درمسائل دینامیکی‌است. ولی در بسیاری از مسائل الکتریکی ومکانیکی فرضیات برای خطی کردن‌معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی نتایج غیرقابل قبول میدهند . مثلاً دربسیاری از مسائلی که رابطهٔ علت (تغذیه[1]) و معلول

۱ — Input

(بازده[1]) درمعادلهٔ دیفرانسیل آمده حالتهائی وجود دارد که معلول به علت اضافه شده و باعث ازدیاد معلول میشود و معادلهٔ خطی نشان میدهد که این دور تسلسل تا وقتی که معلول به حدی برسد که برای دستگاه غیرقابل تحمل باشد ادامه دارد درصورتیکه درعمل ودرمعادلهٔ غیرخطی چنین حالتی وجود نداشته و بلکه مسئله دارای یک حالت حدی خواهد بود که مستقل از شرایط اولیه است .

یکی از مکانیسم هائی که دارای مسیر حد میباشند ساعت معمولی است . این سیستم یک دستگاه نوسانی ترمز شده و محرك آن دوضربه‌ایست که درهرنوسان بآن وارد میشود . این ضربه ها ممکن است توسط پاندول وزنه‌ای و یا فنر وارد گردند که هریک انرژی از دست رفته درنیم نوسان را به‌آن داده و باعث بسته شدن دیاگرام نمود آن که همان مدار حداست میشود . درواقع اگر ساعتی درحال سکون کوك شود، چه توسط تکان شدید ناگهانی وچه تکان آهسته و یا بهرطریق دیگر که ساعت‌را بکار اندازیم نتیجه همان مدار حدی خواهد بود و بنابراین‌مسیر این سیستم مستقل‌از شرایط اولیه به‌مدار حدی نزدیک خواهد شد. اغراق نیست اگر بگوئیم که یکی از هدف‌های اصلی مکانیک غیرخطی درحال حاضر پیدا کردن مدار حد در هرسیستم است . حتی سعی شده است این طریق مطالعهٔ دستگاههای غیرخطی برای بررسی مسائل بیولوژی[2] و آماری بکار برده شود . مثلاً وان درپول[3] و وان درمارك[4] فرضیه‌ای درمورد کار قلب بصورت یکدستگاه مکانیکی نوسانی دارای‌مسیر حد بیان کردند. اشخاص‌دیگری نیز دراین‌راه قدم برداشتند که میتوان از جمله ولترا[5] را نامبرد .

---

۱ — Output ۲ — Biology ۳ — Van der Pol

۴ — Van der Mark ۵ — Volterra

منابع

1 — Bellman, R.

Stability Theory of Differential Equations. Mc Graw—Hill Book Company, Inc. 1953.

2 — Coddington, E. A. and Levinson, N.

Theory of Ordinary Differential Equations. Mc Graw—Hill Book Company, Inc. 1955.

3 — Davis, H. T.

Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publication Inc. New York 1962.

4 — Minorsky, N.

Introduction to Non—Linear Mechanics. J. W. Edwards, Ann Arbor Mich. 1947.

5 — Struble, R. A.

Nonlinear Differential Equations Mc Graw—Hill Book Company, Inc. 1962.

۶ — تابنده ، نصرالله

تقریب خطی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی ومسئله پایداری. نشریهٔ دانشکدهٔ فنی شمارهٔ ۲۹ دورهٔ دوم مهرماه ۱۳۵۳ ازصفحهٔ ۲۰۹ تا صفحهٔ ۲۲۰ .

۷ — تابنده ، نصرالله

نشریهٔ دانشکدهٔ فنی شمارهٔ ۳۰ دورهٔ دوم دی ماه ۱۳۵۳ ازصفحهٔ ۵ تا صفحهٔ ۱۵ .