# دینامیک سه نقطهٔ مادی در فضا(۱)

نوشته :

**دکتر نصرالله تابنده**

استادیار دانشکدهٔ فنی

**چکیده :** دراین مقاله سعی شده است که درمورد حرکت سه نقطهٔ مادی درحوزهٔ ثقل یکدیگر طبق آخرین تحقیقات علمی و بطورکیفی بحث شود . این مطالعات درعین‌حال که تا حدی مورداستفاده درمکانیک فضا قرار میگیرد پیشرفت چشمگیری ازنظر تحلیلی نکرده است و اصولاً معلومات لازم برای حل کامل آن دردست نیست . بطورکیفی دربارهٔ انواع ممکن حرکت برحسب انرژی اولیهٔ سیستم بحث شده وطی یک دیاگرام مناطق ممکن حرکت درحالت خاص توضیح داده شده‌اند . بطورخلاصه این مقاله جنبه مطالعه کیفی دارد و نه کمی .

**مقدمه** ـ یکی از قدیمی‌ترین و مشهورترین مسائل دینامیک ، مسئله حرکت سه نقطهٔ مادی در حوزهٔ ثقل یکدیگر است . این مسئله را میتوان بدین‌طریق بیان کرد :

منظور پیدا کردن حرکت سه نقطهٔ مادی است که درفضای حوزهٔ ثقل یکدیگر آزاد برای حرکت بوده و شرایط اولیهٔ حرکت آنها معلومند . این سه نقطه تحت اثر قوهٔ جاذبهٔ نیوتونی همدیگر قرار گرفته و هیچ نیروی دیگری روی آنها اثر نمی کند .

حالت کلی مسئلهٔ فوق باوجودیکه هدف مطالعات و تحقیقات زیادی بوده تاکنون‌حل نشده‌است.

از یک دید عالی‌دینامیک علمی‌است که تمام حرکات‌ممکن یک سیستم دینامیکی‌را ازنظرخواص کیفی آن مشخص می کند . این تعریف نتیجهٔ توسعهٔ تاریخی دینامیک بدین‌ترتیب است .

۱ـ نیوتن(۲) و همزمان‌های او ، درمراحل اولیهٔ توسعهٔ دینامیک سعی کردند تا مختصات یک سیستم دینامیکی را بطورصریح بصورت تابع زمان پیدا کنند .

---

۱ — Three-Body Problem ۲ — Newton

**تبصره**ـ درشکل ۱ صفحهٔ ۵۰ حروف $P_1$ و $P_2$ بایستی بترتیب $\rho_1$ و $\rho_2$ و درشکل ۵ صفحهٔ ۵۷ حروف $P$ و $m$ بایستی بترتیب $\rho$ و $m_3$ خوانده شوند.

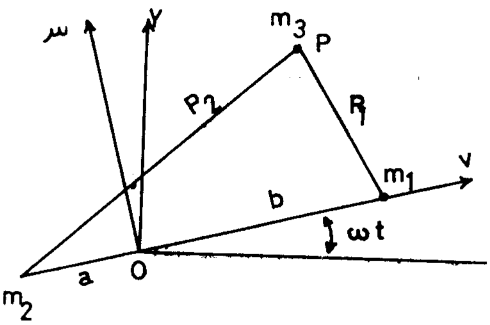
۲ـ اولر و لاپلاس[۱] درمرحلهٔ دوم تأکید درپیدا کردن حلی بصورت سری وتکنیک تقریب گرفتن پشت سرهم[۲] راداشتند .

۳ـ درمرحلهٔ سوم‌ومکتب لاگرانژ ـ هامیلتون و ژاکوبی[۳] دینامیک بعنوان سرچشمهٔ ونمونهٔ مثال برای آنالیز تغییرات و مسائل حداکثر و حداقل درنظر گرفته می‌شد .

٤ـ توسعهٔ دینامیک به‌مرحله‌ایکه بیشتر کیفیت‌آن‌موردنظراست توسط کارهای‌پوانکاره وبیر کهف[٤] انجام گرفت . جملهٔ معروف پوانکارهٔ برای این‌مرحله می گوید : « ریاضی‌دان‌ها اشیاء را مطالعه نمی‌کنند بلکه‌رابطهٔ میان‌آن اشیاء را . برای‌آنها هیچ تفاوتی‌نمی‌کند‌که این اشیاء عوض شوند بشرطیکه روابط بین آنها محفوظ بمانند و بطور خلاصه مواد برای آنها اهمیتی ندارند بلکه فقط فرم موردتوجه آنها است . »

## حالت خاص

**مسئله ـ** دو نقطهٔ مادی که فقط تحت اثر جاذبهٔ یکدیگر حرکت می کنند و ما آنهـا را نقاط مادی اولیه[٥] خواهیم نامید دارای حرکت دورانی دریک سطح وحول‌مرکز جرم خود میباشند . نقطهٔ مادی‌سوم P بجرم واحد‌که تحت جاذبهٔ دونقطهٔ اولیه بوده ولی درحرکت‌آنها اثر ندارد درصفحهٔ حرکت دونقطهٔ اولیه حرکت می کند . منظور پیدا کردن حرکت نقطهٔ مادی سوم است . فرض کنیم جرمهای نقاط مادی اولیه $m_1$ و $m_2$ و بفاصلهٔ $l$ از یکدیگر باشند .




ش ۱

مرکز جرم نقاط مادی اولیه $m_1$ و $m_2$ روی خطی است که این دو را بهم وصل می کند و فواصل این دوجرم ازاین نقطه بترتیب عبارتند از :

---

۱ — Euler and Laplace

۲ — Successive Approximation Techniques

۳ — Lagrang, Hamilton and Jacobi

٤ — Poincaré and Birkhoff

٥ — Primary masses

$$b=l\frac{m_2}{M} \quad , \quad a=l\frac{m_1}{M}$$

$$M=m_1+m_2 \qquad a+b=l$$

چون مرکز جرم این دونقطهٔ مادی نقطه‌ای است ثابت بنابراین دستگاه مختصات ثـابت xoy را به‌آن وصل می‌کنیم . معادلات حرکت نقطهٔ P دراین دستگاه عبارتند از :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial F}{\partial y}$$

دراینجا t زمان و F تابع نیروی پوانکاره ( منفی تابع پتانسیل نقطهٔ P ) میباشند.

$$F=G\left(\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}\right)$$

$\rho_1$ و $\rho_2$ فواصل نقطهٔ مادی سوم از اجرام $m_1$ و $m_2$ است .

اکنون اگر دستگاه مختصات دومی انتخاب کنیم کـه محور v آن همیشه روی خط $m_1 m_2$ قرار داشته باشد طوریکه مختصات دونقطهٔ $m_1$ و $m_2$ بترتیب $(b\,,o)$ و $(-a\,,o)$ باشند خواهیم داشت :

$$\frac{d^2v}{dt^2}-2\omega\frac{du}{dt}=\frac{\partial\bar{F}}{\partial v}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\omega\frac{dv}{dt}=\frac{\partial\bar{F}}{\partial u}$$

که درآن $\omega$ سرعت زاویه‌ای $m_1$ و $m_2$ و :

$$\bar{F}=F+\frac{1}{2}\omega^2(v^2+u^2)$$

$$\rho_1{}^2=(v-b)^2+u^2 \qquad \rho_2{}^2=(v+a)^2+u^2$$

و درصورتیکه مضافاً فرض کنیم :

$$x=\frac{v}{l} \qquad y=\frac{u}{l}$$

$$r_1=\frac{\rho_1}{l} \qquad r_2=\frac{\rho_2}{l}$$

$$\tau=\omega t \qquad \mu=\frac{m_2}{M}$$

معادلات بدون بعد حرکت بصورت زیر نتیجه می‌شوند :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial y}$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1} = \frac{\bar{F}}{l^2\omega^2}$$

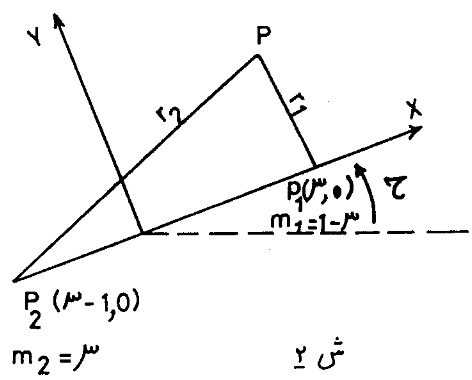
$$r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2 \qquad r_2^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2$$

چهار معادلهٔ بالا مسئله را درچهارچوب معادلات بدون بعد نشان میدهد . تصویر آن در ش ۲ نشان داده شده است . درصورتیکه درمعادلات بالا رابطهٔ اول را در $2\frac{dx}{d\tau}$ و رابطهٔ دوم را در $2\frac{dy}{d\tau}$ ضرب کرده و باهم جمع کنیم و بعد انتگرال بگیریم انتگرال ژاکوبی(۱) بدست میآید :

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = 2\bar{\Omega} - \bar{C}$$

دراینجا $\bar{C}$ عدد ثابت انتگرال‌گیری است . اگر V سرعت بی‌بعد فرض شود خواهیم داشت :

$$V^2 = 2\bar{\Omega} - \bar{C}$$




ش ۲

معمولاً برای تقارن و سهولت درمحاسبات عدد ثابت $\frac{1}{2}\mu(1-\mu)$ را به $\bar{\Omega}$ اضافه می‌کنند وبدین ترتیب

---

۱ —Jacobian Integral

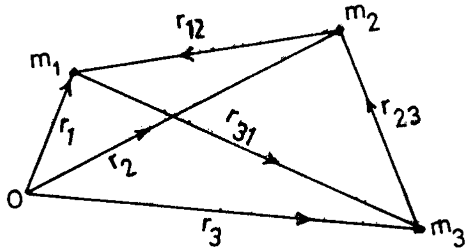
$$\Omega=\overline{\Omega}+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)=\frac{1}{2}[(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2]+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}$$

و دراین‌صورت عدد ثابت انتگرال گیری عبارتست از :

$$C=\overline{C}+\mu(1-\mu)$$

## حالت کلی

**مسئله ـ** سه تودهٔ مادی مطابق قانون نیوتن یکدیگر را جذب می‌کنند . این نقاط مادی در فضا آزاد برای حرکت بوده و نیروی دیگری روی آنها اثر نمی‌کند . با دانستن شرایط اولیهٔ حرکت این نقاط ، منظور پیدا کردن حرکت آنها در زمانهای بعدی است .




ش ۳

سه نقطهٔ مادی و بردارهای‌مکان آنها $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ در ش ۳ نشان داده شده‌اند. مختصات‌این بردارها را بدین‌ترتیب فرض میکنیم :

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(q_1\,,\,q_2\,,\,q_3)$$

$$\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2(q_4\,,\,q_5\,,\,q_6)$$

$$\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_3(q_7\,,\,q_8\,,\,q_9)$$

بردارهای واسط نقاط مادی عبارتند از:

$$\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_{23}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3$$

$$\mathbf{r}_{31}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$$

فواصل این نقاط مادی عبارت خواهند بود از:

$$|\mathbf{r}_{12}| = r_{12} = [(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2]^{1/2}$$

$$|\mathbf{r}_{23}| = r_{23} = [(q_4-q_7)^2+(q_5-q_8)^2+(q_6-q_9)^2]^{1/2}$$

$$|\mathbf{r}_{31}| = r_{31} = [(q_7-q_1)^2+(q_8-q_2)^2+(q_9-q_3)^2]^{1/2}$$

انرژی حرکتی (سینتیک) سیستم عبارتست از :

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2+\dot{q}_6^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_7^2+\dot{q}_8^2+\dot{q}_9^2)$$

و مقادیر حرکت توسط روابط :

$$P_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad i=1,2,\dots,9$$

و یا روابط معادل آن بشرح زیر داده می‌شوند :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = m_2 \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_7 \\ P_8 \\ P_9 \end{bmatrix} = m_3 \begin{bmatrix} \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \\ \dot{q}_9 \end{bmatrix}$$

و یا اگر [K] بزرگترین عدد کامل کمتر و یا مساوی K باشد :

$$P_i = m_k \dot{q}_k \qquad k = \left[\frac{i+2}{3}\right] \qquad i=1,\dots,9$$

هامیلتونین[۱] سیستم عبارتست از :

$$H = \sum_{i=1}^{9} P_i \dot{q}_i - L$$

که درآن L تابع لاگرانژین[۲] و برابر $L=T-V$ است . دراینجا V تابع پتانسیل دستگاه است . حذف سرعتها از هامیلتونین نتیجه میدهد :

۱ — Hamiltonian

۲ — Lagrangian function

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\frac{P_i^2}{m_k}+V$$

ومعادلات حرکت عبارتند از :

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1,2,\ldots,9$$

و تابع پتانسیل دستگاه چنین است :

$$V=-G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}}+\frac{m_2 m_3}{r_{23}}+\frac{m_3 m_1}{r_{31}}\right)=-F$$

درجهٔ آزادی این مسئله ۹ است چونکه هرنقطهٔ مادی ۳ درجه آزادی ( سه مختصات آن ) دارد . معادلات دیفرانسیل بدست آمده ۱۸ عدد هستند . لاگرانژ نشان داد که با درنظرگرفتن نکات زیر این دستگاه ۱۸ معادله قابل تبدیل به ۶ معادله میباشند .

۱- چون نیروی خارجی بدستگاه وارد نمی‌شود پس مرکز جرم دستگاه دارای سرعت یکنواخت‌روی خطی راست خواهد بود :

$$\sum_{i-1}^{3} m_i \dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{a} \implies \sum_{i-1}^{3} m_i \mathbf{r}_i=\mathbf{a}t+\mathbf{b}$$

این دومعادلهٔ برداری معادل ۶ معادلهٔ جبری و ۶ عدد ثابت انتگرال گیری ( تصاویر **a** و **b** ) بوده و تعداد معادلات را به ۱۲=۶—۱۸ عدد تقلیل میدهند .

۲- مقدار لنگر حرکتی دراینجا ثابت است و میتوان این مطلب را باینصورت نوشت :

$$\sum_{i-1}^{3} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{c}$$

این رابطهٔ برداری معادل سه رابطهٔ جبری همراه با سه عدد ثابت انتگرال گیری ( مختصات **c** ) بوده وتعداد معادلات را به ۹=۳—۱۲ عدد میرساند .

۳- علاوه بر ۹ انتگرال نامبرده شده اصل بقاء انرژی دهمین و آخرین انتگرال را خواهد داد که بوسیلهٔ آن تعداد معادلات به ۸ تقلیل پیدا می‌کند . تقلیل بیشتر توسط عملی باسم حذف رئوس[1] وحذف زمان انجام میگیرد .

---

۱ — Elimination of the nodes

با ده رابطهٔ بالا و دوحذف نابرده شده دستگاه ۱۸ معادله اولیه به ۶ = ۲ − ۱۰ − ۱۸ تقلیل پیدا می‌کند. عملاً این تقلیل کار ساده‌ای نیست ودراینجا داده نخواهد شد. برای تشریح بیشترخواننده میتواند به کتاب Wittaker ( مرجع [۵] ) مراجعه نماید.

معادلات حرکت اکنون بطور صریح داده می‌شود تا حالت خاص مورد مطالعه از روی‌آن قابل استخراج باشد. نیروی وارد بجرم $m_1$ ازطرف‌جرم $m_2$ برابر $-Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}}$ و ازطرف جرم $m_3$ برابر $Gm_1 m_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}}$ بوده وبنابراین :

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G\left( -m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}} + m_1 m_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}} \right)$$

و یا با تقسیم دوطرف بر $m_1$ خواهیم داشت :

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = G\left( -m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}} + m_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}} \right)$$

و مشابهاً برای سایر نقاط نتیجه میشود :

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = +G\left( -m_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r^3_{23}} + m_1 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}} \right)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = +G\left( -m_1 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}} + m_2 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r^3_{23}} \right)$$

این معادلات حالت کلی سه تودهٔ مادی $m_1$ ، $m_2$ و $m_3$ را که فقط تحت نیروی جاذبهٔ نیوتنی خود حرکت می‌کنند نشان‌میدهد. جالب توجه است که جرم $m_1$ درمعادلهٔ اول و $m_2$ درمعادلهٔ دوم و $m_3$ درمعادلهٔ سوم وجود ندارد . جملات دست راست هرمعادله نیروی وارده به واحد جرم هریک از جرمها را دراثروجود جرمهای دیگری میرساند .

اکنون تقلیل جرم $m_3$ اثر آن را روی اجرام $m_1$ و $m_2$ کم خواهد کرد درحالیکه درحرکت‌خود آن اثری نخواهد داشت . درحالتیکه $m_3$ درمقابل $m_1$ و $m_2$ خیلی کوچک باشد و بتوان فرض کرد $m_3 \to o$ دومعادلهٔ اولیه بصورت زیر درخواهند آمد :

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_{21}}{r^3_{21}}$$

البته دراینجا فرض نشده که $m_3=0$ است زیرا که دراینصورت نمیتوان معادلهٔ سوم حرکت را برحسب $\ddot{\mathbf{r}}_3$ بدست آورد ( چون درآنجا دوطرف معادله را تقسیم بر $m_3$ کردیم ) . در واقع فرض دراینجا براین‌مبنا است که $m_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}}$ درمقابل $m_2 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}}$ و $m_3 \frac{\mathbf{r}_{23}}{r^3_{23}}$ درمقابل $m_1 \frac{\mathbf{r}_{12}}{r^3_{12}}$ صرفنظر کردنی هستند . دراین‌صورت دومعادلهٔ آخری برای $\ddot{\mathbf{r}}_1$ و $\ddot{\mathbf{r}}_2$ معادلات تقریبی ومعادلهٔ سوم برای $\ddot{\mathbf{r}}_3$ دقیق خواهد بود . درجهٔ تقریب بستگی به بزرگی وکوچکی مقادیر صرفنظر کردنی نسبت به مقادیر گرفته شده دارد .

حل معادلات بالا برای $\ddot{\mathbf{r}}_1$ و $\ddot{\mathbf{r}}_2$ مقادیر $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ را داده و جانشینی آنها در معادلهٔ برای $\ddot{\mathbf{r}}_3$ حرکت جرم سوم را معین خواهد کرد . عدم دخالت جرم سوم درحرکت دو جرم دیگر همان محدودیتی است که برای حالت خاص درنظر گرفته شد . درچنین حالتی که جرم سوم در حرکت دوجرم دیگر دخالتی ندارد میتوان معادلهٔ آخری را بصورت کلی :

$$\ddot{\mathbf{r}}_3=g(m_1 , m_2 , \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3)$$

نوشت که درآن $\mathbf{r}_3$ تابع یک مجهول یعنی زمان‌است، $m_1$ و $m_2$ اعداد ثابت و $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ توابع مشخص زمانند . تابع g دراین رابطه میدان نیرو را مشخص می‌کند که معمولاً میدان جاذبهٔ نیوتنی است. البته شرایط اولیهٔ جرم سوم برای حل این رابطه ضروری است .

تقسیم‌بندی حالات خاص را با درنظر گرفتن مطالب گفته شده و رابطهٔ بالا میتوان بدین‌ترتیب انجام داد :

۱- برحسب تابع g میتوان حالت خاص تحت قانون جاذبهٔ نیوتن و یا غیرآن را درنظر گرفت .

۲- درحالت خاص نیوتنی ، برحسب شرایط اولیهٔ $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ میتوان صحبت ازحالت‌های خاص با هریک از مسیرهای مقاطع مخروطی برای $m_1$ و $m_2$ نمود . درحالت خاص بحث شده مسیر دایره‌ای برای $m_1$ و $m_2$ درنظر گرفته شده بود .

۳- برحسب شرایط اولیه برای جرم سوم حرکت‌صفحه‌ای یا حرکت سه بعدی را میتوان مشخص کرد . البته درحالت نیوتونی دوجرم اولیه همیشه دارای حرکت صفحه‌ای خواهند بود و اگر بردارهای سرعت ومکان‌اولیهٔ جرم سوم نیز درهمان‌صفحه باشدحرکت این‌جرم نیز درهمان‌صفحه انجام خواهد گرفت .

٤- بالاخره طبقه‌بندی دیگری میتوان برحسب $\frac{m_2}{m_1}$ انجام‌داد . مثلاً درمسئلهٔ خاص کپنهاگن[1] این نسبت واحد گرفته شده است .

۱ —The Copenhagen restricted Problem

تا کنون بیش از هرحالتی حرکت نیوتونی با مسیر دایره‌ای و دریک صفحه که قبلاً مورد بررسی قرار گرفت ، مطالعه شده ولی درحرکت نیوتونی‌مسیرهای دیگر نیز غیر از دایره وهمچنین حرکات سه بعدی تا اندازه‌ای موردمطالعه قرار گرفته‌اند .

## مناطقی که امکان حرکت وجود دارد

یکی از مواردی که میتوان از انتگرال ژاکوبی استفاده کرد تعیین مناطق حرکت است . همانطور که دیدیم این انتگرال بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$V^2 = 2\Omega(x , y) - C$$

درصورتیکه درنقطه $(x_\circ , y_\circ)$ از مسیر ، سرعت درامتداد آن $V_\circ$ باشدخواهیم داشت :

$$C = 2\Omega(x_\circ , y_\circ) - V_\circ^2$$

و از آنجا سرعت درنقطهٔ کلی بامختصات $(x , y)$ عبارت خواهد بود از :

$$V^2 = 2\Omega(x , y) - C = 2\Omega(x , y) - 2\Omega(x_\circ , y_\circ) + V_\circ^2$$

برای وجود حرکت بایستی $V^2 > 0$ باشد و بنابراین فقط در مناطقی حرکت وجود خواهد داشت که $\Omega > \frac{C}{2}$ باشد و باالعکس اگر درنقطهٔ $P(x , y)$ داشته باشیم $\Omega(x , y) \leqslant \frac{C}{2}$ حرکت دراین نقطه غیرممکن خواهد بود . بنابراین ملاحظه می‌شود که دومنطقه‌ای که دریکی ازآنها حرکت وجود ندارد و در دیگری امکان حرکت هست توسط منحنی‌های $\Omega(x , y) = \frac{C}{2}$ جدا می‌شوند. روی این‌منحنی‌ها سرعت برابر صفر است و باین جهت به منحنی‌های سرعت صفر و یا منحنی‌های هیل[1] موسومند .

برای تعیین مناطق ممکن حرکت بایستی منحنی‌های $\Omega = \frac{C}{2} = \text{Const.}$ را رسم کنیم و برحسب مقادیر مختلف $C$ حالتهای مختلف مشاهده می‌شود :

الف ـ وقتی $C \longrightarrow \infty$ و بنابراین مقدار $\Omega$ نیز بزرگ خواهد بود . این حالت درصورتی پیش میآید که یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد :

$$r_1 \longrightarrow 0 \text{ ویا } r_2 \longrightarrow 0 \qquad \text{یا} \qquad r_1 \longrightarrow \infty \text{ ونیز } r_2 \longrightarrow \infty$$

بنابراین‌منحنی‌های سرعت صفر تقریباً دوایری دور $P_1$ و $P_2$ هستند که بابزرگ شدن $C$ این‌دوایر کوچک شده و بطرف صفر میل می‌کنند و بطوریکه اگر $C_2 > C_1$ باشد منحنی مربوط به $C_2$ داخل منحنی مربوط

---

۱ — Hill's Curves

به $C_1$ خواهد بود . روی این دومنحنی خواهیم داشت :

$$V^2=2\Omega_{C_1}(x,y)-C_1=0$$

$$V^2=2\Omega_{C_2}(x,y)-C_2=0$$

و بنابراین :

$$2\Omega_{C_2}(x,y)=C_2>C_1=2\Omega_{C_1}(x,y)$$

$$\Omega_{C_2}(x,y)>\Omega_{C_1}(x,y)=\frac{1}{2}C_1$$

بنابراین اگر حرکت نقطه‌ای طوری داده شده باشد که عدد ثابت ژاکوبی آن $C_1$ باشد در داخل منحنی :

$$2\Omega(x,y)=\frac{C_1}{2}$$

رابطهٔ :

$$V^2=2\Omega(x,y)-C_1>0$$

برقرار بوده و امکان حرکت در داخل این منحنی وجود دارد. نقطهٔ مادی $P_3$ از داخل این منحنی‌نمیتواند خارج شود چون اگر روی آن منحنی برسد دارای سرعت صفر خواهد بود . درصورتیکه $r_1 \longrightarrow \infty$ و در نتیجه $r_2 \longrightarrow \infty$ میتوان نوشت :

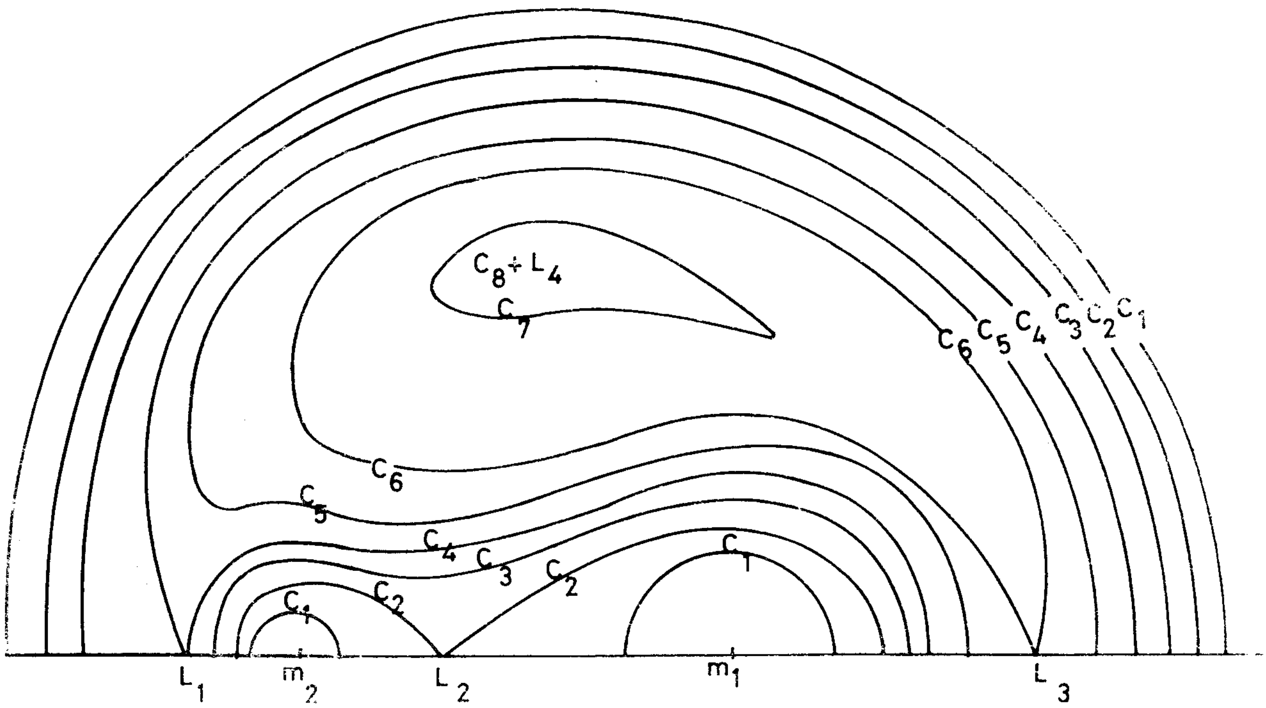
$$V^2=r^2-C \quad و \quad \Omega\approx\frac{r^2}{2} \quad و \quad r_1\approx r_2=r$$

منحنی‌های سرعت صفر را بادوایر $r=\sqrt{C}=C_1$ میتوان تقریب گرفت‌دراین‌صورت ازدیاد $C$ باعث‌ازدیاد $r$ شده و بنابراین منطقهٔ ممکن حرکت خارج ازمنحنی سرعت صفر خواهد بود و نقطهٔ مادی هیچوقت نمیتواند ازمرز این منحنی گذشته و به نقاط $P_1$ و $P_2$ نزدیک شود . دراین حالت نقطهٔ $P_3$ هیچگاه قمر هیچکدام از نقاط $P_1$ و $P_2$ محسوب نخواهد شد .

بتدریج که $C$ نقصان پیدا کند دومنحنی سرعت صفر دور نقاط $P_1$ و $P_2$ بزرگتر شده و بالاخره در نقطهٔ $L_2$ یکدیگر را تلاقی می‌کنند درعین‌حال منحنی سرعت صفر خارجی نیزکوچکتر می‌شود . نقصان بیشتر $C$ باعث تداخل دومنحنی سرعت صفر دور $m_1$ و $m_2$ شده وحرکت داخل آن که بصورت منحنی واحدی درآمده ممکن می‌شود وبنابراین قمر یکی از نقاط $m_1$ و $m_2$ ممکن است به داخل منحنی نقطهٔ دیگر رفته و قمر آن نیز قرارگیرد. فضای محل اتصال این دومنحنی سرعت صفر به پنجره[1] موسوم است. اهمیت

۱ — Window

این حالت درحرکت اقمار مصنوعی دور زمین و ماه واضح است . مشاهده می‌شود که بازهم نقطهٔ $P_3$ به منطقهٔ خارجی که امکان حرکت درآن هست راه ندارد . نقصان بیشتر C باعث تلاقی منحنی‌های داخلی و خارجی سرعت صفر درنقطهٔ $L_3$ ویا $L_1$ ( بسته به مقدار $\mu$ ) می‌شود . ( نقطهٔ تلاقی درطرف جرم کمتر قرار دارد. دراینجا ما فرض‌می‌کنیم $m_2 < m_1$ ) . تقلیل بیشتر C باعث بازشدن منطقه داخلی واتصال مناطق داخلی وخارجی درنقطهٔ $L_1$ و ایجاد پنجره و منفذ فراری برای نقطهٔ $P_3$ به‌خارج از حوزهٔ $m_1$ و $m_2$ می‌شود . باکم‌کردن C ازاین به بعد منطقهٔ غیرممکن باریکتر شده و بالاخره فصل مشترك آن با محور دونقطهٔ $P_1$ و $P_2$ نقطهٔ $L_3$ میشود . نقصان بیشتر C باعث جدا شدن مناطق غیرممکن حرکت در دوطرف محور $P_1 P_2$ گشته وبتدریج دراثر تقلیل C این‌مناطق کوچکتر شده وبالاخره بازاء $C=3$ منطقهٔ غیرممکن به‌صفر میرسد و برای $C \leqslant 3$ حرکت‌درتمام فضا ممکن می‌شود. برای $\mu < \frac{1}{2}$ منحنی‌های سرعت صفر مطابق ش ٤ خواهند بود .




ش ۴

## حالت کلی مسئله سه توده مادی

دراینجا پارامتر اصلی انرژی کلی دستگاه h است . حالت مثبت انرژی را میتوان از اول ندیده گرفت چون انرژی مثبت باعث ازهم گسیختن سیستم می‌شود . دراین حالت ، یا هرسه نقطه مادی روی مسیرهای هذلولی ازهم دورمیشوند یعنی $t \longrightarrow |\, r_{ij} \,|$ که آن‌را میتوان انفجار[1] نامید و یا اینکه

---

۱ — Explosion

دونقطه مثلاً نقاط ۱ و ۲ تولید یک جفت می کنند $|r_{12}| < a$ و فاصلهٔ نقطهٔ سوم ازآن‌دوزیاد می‌شود طوریکه $t \longrightarrow r_{23}$ و $r_{13}$ . این‌حالت‌اخیر را میتوان حالت بیضوی - هذلولی[۱] ویاحالت فرار[۲] نامید. این حالات با حالت حرکت دو تودهٔ مادی درحوزهٔ ثقل خود مطابقت داردکه درآنجا نیز $h > o$ به معنی فرار دونقطه ازحوزهٔ یکدیگر است . ولی این تشابه بین حرکت سه توده و دوتودهٔ مادی کامل نیست زیرا که $h < o$ دراین‌دو یک نتیجه را نمیدهد .

درصورتیکه $h < o$ چند حالت اتفاق می‌افتد . درحالت اول که به آن میتوان حرکت محدود[۳] گفت توده‌های مادی بیکدیگر نزدیک و دور می‌شوند طوریکه همیشه $r_{ij} < a$ . حالت دیگر دفع[٤] است که درآن دونقطه تشکیل یک جفت داده و نقطهٔ سوم دارای یک حرکت بیضوی است . درحالت اخیر در صورتیکه انرژی دستگاه بیشتر شود نقطهٔ سوم ممکن است روی یک مسیر هذلولی از جفت دورشود . دراین صورت مانند حالت مثبت انرژی $h > o$ حالت فرار و یا حالت بیضوی - هذلولی پیش میآید .

به‌این طبقه بندی البته بایستی حالت $h = o$ را اضافه نمود ولی این حالت که حرکت بیضوی - هذلولی و یا سهموی - هذلولی $(r_{ij} \longrightarrow t^{2/3})$ میدهد زیاد مورد توجه نیست زیراکه مقدار ثابت انرژی دراین‌حالت محدود و معین است .

طبقه بندی حرکت ازنظر بیرکهف با درنظرگرفتن مومان اینرسی I دستگاه یعنی تغییرات $I(t)$ صورت میگیرد. دراین طبقه بندی فرار مترادف با $I \longrightarrow \infty$ است . حرکت محدود و مسیرهای متناوب مربوط به محدود بودن یکنواخت $I(t)$ است . درحالت خاص دفع که نقطهٔ سوم از دونقطهٔ دیگر فاصله گرفته و بازگشت مینماید مومان‌اینرسی $I(t)$ بصورت یک تابع نوسانی ظاهرمیشود. البته تمام این‌حرکات برای $h < o$ میتواند اتفاق بیفتد . یکی از نتایج مهمی که درظرف چند سال گذشته بدست آمده این است که درطبقه بندی بالا نسبت تعداد حالات فرار به مجموع تعداد حالات دیگر بسیار زیاد است و باین ترتیب تقریباً همیشه و حداقل بعد از مدت زمان زیاد فرار اتفاق می‌افتد .

## مختصات ژاکوبی[۵]

مختصاتی که توسط لاگرانژ و ژاکوبی معرفی شدند معادلند با استدلال لاگرانژ برای تقلیل ۱۸ معادلهٔ ذکر شده به ۱۲ . در ش ۵ مختصات ژاکوبی عبارتند از $\mathbf{r}$ و $\rho$ که اولی دوجرم $m_1$ و $m_2$ را

---

۱ — Hyperbolic-Elliptic

۲ — Escape

۳ — Interplay

٤ — Ejection

۵ — Jacobian Coordinates

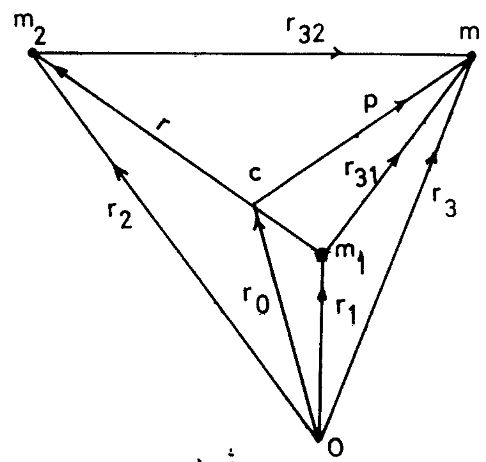
بهم متصل کرده ودومی ازمرکز جرم این دو به نقطهٔ مادی سوم $m_3$ وصل‌شده است. برای بیان معادلات حرکت برحسب این دو متغیر بایستی $\mathbf{r}_{21}$ ، $\mathbf{r}_{32}$ و $\mathbf{r}_{31}$ برحسب این متغیرها نوشته شوند.

$$\mathbf{r}_{21}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{r} \qquad |\,\mathbf{r}\,|=r_{21}=r$$

$$\mathbf{r}_{32}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_\circ+\rho=\rho-\frac{m_1}{\mu}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_{31}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{\mu}\mathbf{r}+\rho$$

$$\mu=m_1+m_2$$




ش ۵

بعلاوه چون O مرکز جرم سه نقطه است داریم :

$$\mu\,\mathbf{r}_\circ+m_3\,\mathbf{r}_3=o$$

و بعلاوه با استفاده از روابط :

$$M=m_1+m_2+m_3 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{r}_3=\mathbf{r}_\circ+\rho$$

میتوان نوشت :

$$\mathbf{r}_3=\frac{\mu}{M}\rho \qquad \text{و} \qquad \mathbf{r}_\circ=-\frac{m_3}{\mu}\mathbf{r}_3$$

معادلات حرکت سه نقطهٔ مادی باینصورت نوشته میشوند :

$$\ddot{\mathbf{r}}_1=G\frac{m_2}{r^3_{12}}\mathbf{r}_{21}+G\frac{m_3}{r^3_{31}}\mathbf{r}_{31}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2=G\frac{m_3}{r^3_{23}}\mathbf{r}_{32}+G\frac{m_1}{r^3_{12}}\mathbf{r}_{12}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = G\frac{m_1}{r^3_{13}}\mathbf{r}_{13} + G\frac{m_2}{r^3_{23}}\mathbf{r}_{23}$$

تفاضل معادلهٔ اول ازمعادلهٔ دوم نتیجه میدهد :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_3\left(\frac{\mathbf{r}_{32}}{r^3_{32}} - \frac{\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}}\right) + \frac{G}{r^3_{12}}(m_1\mathbf{r}_{12} - m_2\mathbf{r}_{21})$$

و یا :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + Gm_3\left(\frac{\rho - \frac{m_1}{\mu}\mathbf{r}}{r^3_{32}} - \frac{\rho - \frac{m_2}{\mu}\mathbf{r}}{r^3_{31}}\right)$$

جانشینی درمعادلهٔ سوم حرکت نتیجه میدهد :

$$\frac{\mu}{M}\ddot{\rho} = -G\left(\frac{m_1\mathbf{r}_{31}}{r^3_{31}} + \frac{m_3\mathbf{r}_{32}}{r^3_{32}}\right)$$

و یا :

$$\ddot{\rho} = -\frac{M}{\mu}G\left[\frac{m_1\left(\rho + \frac{m_2}{\mu}\mathbf{r}\right)}{r^3_{31}} + \frac{m_2\left(\rho - \frac{m_1}{\mu}\mathbf{r}\right)}{r^3_{32}}\right]$$

درصورتیکه تابع برداری $f(A)$ باین‌صورت تعریف شود :

$$f(A) = \frac{A}{|A|^3}$$

و فرض کنیم :

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{\mu} \qquad و \qquad \alpha_2 = \frac{m_2}{\mu}$$

روابط بالا را میتوان باین‌صورت نوشت :

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu f(\mathbf{r}) = (M-\mu)[f(\rho - \alpha_1\mathbf{r}) - f(\rho + \alpha_2\mathbf{r})]$$

$$\ddot{\rho} = -M[\alpha_2 f(\rho - \alpha_1\mathbf{r}) + \alpha_1 f(\rho + \alpha_2\mathbf{r})]$$

مطلب قابل توجه اینکه چون :

$$F = G\left(\frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}\right) = F(\mathbf{r}, \rho)$$

میتوان نتیجه گرفت که :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{g_1}\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{g_1}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{g_2}\frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\rho}{|\rho|} = \frac{1}{g_2}\frac{\partial F}{\partial \rho}$$

که درآن :

$$g_1 = \frac{m_1 m_2}{\mu} \qquad g_2 = \frac{m_3 \mu}{M}$$

دراینجا منظور از $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}$ مشتق F نسبت به $\mathbf{r}$ و درجهت آن است .

درصورتیکه رابطهٔ اول را در $\dot{\mathbf{r}}$ و رابطهٔ دوم را در $\dot{\rho}$ ضرب کرده و با هم جمع کنیم رابطهٔ انرژی بدست میآید .

$$g_1\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} + g_2\dot{\rho}\ddot{\rho} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial F}{\partial \rho}\dot{\rho}$$

و یا :

$$\frac{1}{2}\left(g_1\dot{\mathbf{r}}^2 + g_2\dot{\rho}^2\right) = F + h$$

با درنظرگرفتن اینکه انرژی سینیتیک (حرکتی) دستگاه برابر است با :

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 + m_3\dot{r}_3^2\right)$$

وبا نوشتن $\mathbf{r}_1$ ، $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ برحسب $\mathbf{r}$ و $\rho$ ملاحظه خواهد شد که :

$$T = \frac{1}{2}\left(g_1\dot{r}^2 + g_2\dot{\rho}^2\right)$$

و بنابراین h مقدار کل انرژی را نشان میدهد .

اکنون ممان اینرسی سه تودهٔ مادی را که ازاین به بعد درمحاسبات ما نقش مهمیرا بازیخواهد کرد درنظر میگیریم :

$$I = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2$$

میتوان نشان داد که ممان اینرسی نسبت به مرکز جرم O برابر است با :

$$\Phi = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \frac{m_i m_j}{M} r_{ij}^2$$

این جمله به تابع ژاکوبی[1] موسوم است. چون مبدأ مختصات انتخاب شده O درمرکز جرم است بنابراین $I=\Phi$ خواهد بود .

با جانشینی مختصات ژاکوبی در رابطهٔ بالا برای $\Phi$ میتوان نشان داد که :

$$I=\Phi=g_1\mathbf{r}^2+g_2\rho^2$$

**معادلهٔ ژاکوبی ولاگرانژ[2]**

این معادله که دردینامیک سیارات مورداستفاده قرارمیگیرد اولین بار توسط لاگرانژ وبرای حرکت سه نقطهٔ مادی درسال ۱۷۷۲ داده شده است . معادله را میتوان بصورت :

$$\ddot{I}=2(2T-F)$$

نوشت و با دومرتبه مشتق گرفتن از I وجانشین کردن مقادیر $\ddot{\mathbf{r}}$ و $\ddot{\rho}$ برحسب F بدست میآید . با درنظر گرفتن $h=T-F$ میتوان نوشت :

$$\ddot{I}=2(F+2h)$$

$$\ddot{I}=2(T+h)$$

از روی معادلهٔ لاگرانژ ژاکوبی ملاحظه میشود که اگر $h>o$ باشد :

$$\ddot{I}\geqslant 2h>o \quad \text{و} \quad I\geqslant 2ht^2+bt+c$$

و بنابراین با زیاد شدن t مومان اینرسی و ازآنجا حداقل یکی ازفواصل $r_{ij}$ نیز زیاد خواهد شد :

$$t\longrightarrow\infty \implies I\longrightarrow\infty \implies r_{ij}\longrightarrow\infty$$

نظیر همین استدلال را برای $h=o$ میتوان کرد . بعلاوه اگر r محدود بوده و $I\longrightarrow\infty$ ازآنجا که :

$$I=g_1 r^2+g_2\rho^2$$

بایستی $\rho\longrightarrow\infty$ . بدین معنی که اگر یک جفت تشکیل‌شود $(r<\alpha)$ و $I\longrightarrow\infty$ حالت فرار پیش خواهد آمد . اگر جفت تشکیل نشود $I\longrightarrow\infty$ و $(r,\rho)\longrightarrow\infty$ مربوط بحالت انفجار است .

درنتیجه اگر دستگاه دارای مقدار انرژی مثبت باشد $\ddot{I}\geqslant 2h>o$ بوده و منحنی $I(t)$ ازطرف پائین محدب است .

---

۱ —Jacobian function

۲ — The Lagrange-Jacobi equation

اگر سیستم با $h > o$ حرکت خود را در $t=o$ شروع کند خواهیم داشت:

$$I(o) > o \qquad \dot{I}(o) \gtrless o \qquad \ddot{I}(o) > o$$

وچون :

$$\dot{I}(o) = 2\left[g_1\, \mathbf{r}(o) \cdot \dot{\mathbf{r}}(o) + g_2\, \rho(o) \cdot \dot{\rho}(o)\right]$$

ملاحظه می‌شود که $\dot{I}(o)$ ممکن است مثبت ، منفی و حتی بدون اینکه سرعت‌های اولیه صفر باشند، برابر صفر باشد . برای $h=o$ نیز شبیه این حالات اتفاق میافتد .

درصورتیکه انرژی کل منفی باشد یعنی $h < o$ خواهیم داشت :

$$I(o) > o \qquad \dot{I}(o) \gtrless o \qquad \ddot{I}(o) \gtrless o$$

و درصورتیکه سرعتهای اولیه صفر باشند :

$$\dot{I}(o) = o \qquad T(o) = o \qquad \ddot{I}(o) = 2h < o$$

و منحنی $I(t)$ ازطرف پائین مقعر است و حالت انقباض[۱] سه نقطهٔ مادی اتفاق‌میافتد . درعین‌حال T و F زیاد می‌شوند و در زمانی‌که $F+2h=o$ و یا $F=-2h=2\mid h \mid$ است $\ddot{I}=o$ خواهد بود. بعد ازاین $\ddot{I}>o$ و منحنی I ازطرف پائین محدب خواهد بود . بنابراین بعد ازمدتی‌که ممان اینرسی به حداقل خود $I_{min}$ رسید جهت عکس پیش‌میآید وانقباض نقاط تبدیل به‌دورشدن[۲] آنها ازهم خواهد شد. دراین حالت $F+2h$ شروع به نقصان‌کرده و بعد ازاینکه درنقطه‌ای به صفر رسید دومرتبه منفی شده و منحنی $I(t)$ مقعر ازپائین خواهد شد و این حرکات متناوباً اتفاق خواهند افتاد .

اکنون انقباض را بدون درنظرگرفتن $\dot{I}(o)=o$ بررسی می‌کنیم . وقتی‌که I بحداقل خود میرسد مقدار F زیاد و نقاط مادی نزدیک یکدیگرند . بعد از این F نقصان پیدا می‌کند ولی تا وقتی‌که $F>2\mid h \mid$ است مقدار $\ddot{I}$ مثبت باقی خواهد ماند . چون با زیاد شدن $r_{ij}$ مقدار F کوچکتر می‌شود

$$r_{ij} \longrightarrow \infty \implies F \longrightarrow o$$

بنابراین زمانی میرسدکه $F=2\mid h \mid$ و بعد ازآن $F<2\mid h \mid$ و بنابراین $\ddot{I}<o$ خواهد بود . تنها درصورتی F میتواند همیشه بزرگتر از $2\mid h \mid$ بماندکه یک جفت تشکیل شود. بنابراین درصورت $h<o$ حالت انفجار ( یعنی $r_{ij} \longrightarrow \infty$ برای تمام نقاط ) اتفاق نمی‌افتد .

---

۱ — Contraction　　۲ — Expansion

فرض کنیم دوجرم $m_1$ و $m_2$ تشکیل یک جفت بدهند . دراینجا $\ddot{I}>0$ معادل است با

$$F=G\left(\frac{m_1 m_2}{r}+\frac{m_2 m_3}{r_{23}}+\frac{m_3 m_1}{r_{31}}\right)>2|h|$$

این نامساوی درصورت کوچک بودن $r$ بقدر کافی حتی با وجود $r_{23}$ و $r_{11}$ خیلی بزرگ نیز میتواند برقرار باشد و دراین‌حالت $F_{min}>2|h|$ خواهد بود .

درصورتیکه $\rho$ و درنتیجه $r_{31}$ و $r_{23}$ بطرف بی‌نهایت میل کند خواهیم داشت

$$F_{min}=G\frac{m_1 m_2}{r_{max}}$$

که درآن $r_{max}=a(1+e)$ اوج دونقطهٔ مادی درمسیر خود میباشد . شرط قرار دراین حالت معادل است با :

$$G\frac{m_1 m_2}{a(1+e)}>2|h|$$

و یا معادلاً :

$$a<\frac{G m_1 m_2}{2|h|(1+e)}$$

درصورتیکه مسیر دایره باشد $e=0$ بوده و نامساوی زیر بدست میآید :

$$a_1<\frac{G m_1 m_2}{2|h|}$$

### نامساویساندمن[1]

درصورتیکه بردار $\mathbf{H}$ لنگرحرکتی[2] دستگاه ومقدار آن $H$ فرض شوند، نامساوی ساندمن برحسب ممان اینرسی $I$ و انرژی حرکتی بدین‌طریق نوشته میشود :

$$H^2<2IT-\frac{1}{4}\dot{I}^2$$

برای اثبات این رابطه میتوان نوشت :

$$H=|\mathbf{H}|=|\sum m_i \mathbf{r}_i\times \mathbf{V}_i|\leqslant\sum m_i r_i V_i|\sin\alpha_i|=\sum\sqrt{m_i}\,r_i\sqrt{m_i}\,V_i|\sin\alpha_i|$$

---

۱ — Sundman's Inequality    ۲ — Angular Momentum

دراینجا $\alpha_i$ زاویهٔ بین دوبردار $\mathbf{r}_i$ و $\dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{V}_i$ است . با استفاده از نامساوی کوشی[1] خواهیم داشت :

$$H^2 \leqslant \sum m_i r_i^2 \sum m_i V_i^2 \sin^2 \alpha_i$$

ازطرفی :

$$I = \sum m_i \mathbf{r}_i^2$$

$$\dot{I} = 2\sum m_i \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 2\sum m_i r_i V_i \cos\alpha_i = 2\sum \sqrt{m_i}\, r_i \sqrt{m_i}\, V_i \cos\alpha_i$$

و درصورتیکه برای بار دوم از نامساوی کوشی استفاده کنیم نتیجه میشود :

$$\frac{1}{4}\dot{I}^2 < \sum m_i r_i^2 \sum m_i V_i^2 \cos^2\alpha_i$$

مجموع دونامساوی بدست آمده برای $H^2$ و $\frac{1}{4}\dot{I}^2$ نتیجهٔ مطلوب را خواهد داد . اگر از رابطهٔ لاگرانژ و ژاکوبی $\ddot{I}=2(T+h)$ و نامساوی ساندمن $T$ را حذف کنیم نتیجه میشود :

$$H^2 < (\ddot{I} - 2h)I - \frac{1}{4}\dot{I}^2$$

وصورت ضعیف‌تر این نامساوی را میتوان بعبارت زیر نوشت :

$$H^2 < (\ddot{I} - 2h)I$$

فرم مفید دیگری از نامساوی ساندمن را میتوان با تقسیم دوطرف بر $I>0$ و ضرب آن در $\frac{2}{\sqrt{I}}$ بدست آورد .

$$0 \leqslant \left(\ddot{I} - 2h - \frac{H^2}{I} - \frac{\dot{I}}{4I}\right)\frac{2}{\sqrt{I}} = Z$$

و درصورتیکه فرض کنیم :

$$L = \frac{1}{\sqrt{I}}(\dot{I}^2 + 4H^2) - 8h\sqrt{I}$$

میتوان نشان داد :

$$\frac{dL}{dt} = Z\frac{dI}{dt} \qquad Z>0$$

۱ — Cauchy's Inequality

چون دراین تساوی $Z>o$ است بنابراین اگر I قوس‌صعودی‌را طی‌کند L تنزل نمی‌کند و اگر I درحال نزول باشد مسلماً L قوس صعودی را نمی‌پیماید.

اکنون حالت سادهٔ نامساوی ساندمن را درنظر میگیریم .

$$H^2<(\ddot{I}-2h)I$$

و یا :

$$\frac{H^2}{I}+2h<\ddot{I}$$

و :

$$\frac{H^2}{2|h|}-I<\frac{\ddot{I}I}{2|h|} \qquad h<o$$

و :

$$I_C-I<\frac{I}{2|h|}\ddot{I} \qquad \left(I_C=\frac{H^2}{2|h|}=\text{ممان‌اینرسی بحرانی}\right)$$

بنابراین تا وقتی $I<I_C$ باشد $\ddot{I}$ مثبت است ولی درصورتیکه $I>I_C$ باشد $\ddot{I}$ بزرگترازیک عدد منفی‌است و هیچ قضاوتی درمورد آن نمیتوان کرد .

اکنون نامساوی را درحالت اصلی آن درنظر میگیریم :

$$I_C-I+\frac{\dot{I}^2}{8|h|}<\frac{\ddot{I}I}{2|h|}$$

و بنابراین تا زمانی‌که :

$$I<I_C+\frac{\dot{I}^2}{8|h|}$$

باشد $\ddot{I}$ مثبت خواهد بود .

در اینجا ما ازهمان حالت سادهٔ نامساوی ساندمن و درقسمتی از منحنی که $I\leqslant I_C$ بوده و بازاء $I=I_1$ مشتق ممان اینرسی‌صفرمی‌شود ( $\dot{I}=o$ )استفاده می‌کنیم. این نقطه البته یک‌می‌نیمم I با $\ddot{I}>o$ خواهدبود. منحنی دردو طرف$I_1$ بالامیرود تادرنقطه‌ای‌دیگر مثلاً $I=I_2$ حالت $\dot{I}=o$ بوجودآید. از روی حالت انتهائی نامساوی‌ساندمن میتوان استدلال کرد که درصورت $h<o$ نامساوی $L_1<L_2$ نتیجه روابط :

$$I_{min}=I_1<I_2 \quad \text{و} \quad \dot{I}_1=\dot{I}_2=o$$

میباشد و بنابراین :

$$\frac{4H^2}{\sqrt{I_1}}+8\,|\,h\,|\,\sqrt{I_1}\leqslant\frac{4H^2}{\sqrt{I_2}}+8\,|\,h\,|\,\sqrt{I_2}$$

و یا :

$$4H^2\,\frac{\sqrt{I_2}-\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1I_2}}\leqslant 8\,|\,h\,|\,(\sqrt{I_2}-\sqrt{I_1})$$

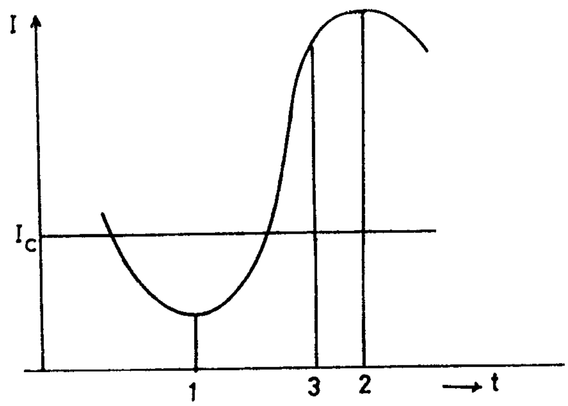
وچون $I_2>I_1$ میتوان با حفظ جهت نامساوی مربع دوطرف را گرفت و درنتیجه :

$$\frac{1}{I_1}\left[\frac{H^2}{2\,|\,h\,|}\right]^2=\frac{I_c^2}{I_1}\leqslant I_2$$

و با درنظرگرفتن $I_1=I_{min}<I_c$ نتیجه خواهد شد :

$$I_1<\frac{I_c^2}{I_1}<I_2$$

بنابراین برای یک $I_1$ معین منحنی $I(t)$ صعود می کند تا وقتی که اقلاً $I=\frac{I_c^2}{I_1}$ بشود و از اینجا ملاحظه میشود که منحنی در دوطرف $I_1$ از $I_c$ مسلماً بالاتر میرود ش ٦ .




ش ٧

اکنون با استفاده از نامساوی ساندمن و درنظرگرفتن اینکه :

$$I_1=I_{min}\quad\text{و}\quad \dot{I}_1=o\quad,\quad I(t)\geqslant I_1$$

و درنتیجه $L_1\leqslant L$ میتوان نوشت :

$$\frac{4H^2}{\sqrt{I_1}}+8\,|\,h\,|\,\sqrt{I_1}\leqslant\frac{4H^2}{\sqrt{I}}+8\,|\,h\,|\,\sqrt{I}+\frac{\dot{I}^2}{\sqrt{I}}$$

و از روی آن نتیجه میشود :

$$\dot{I}^2 > 8\,|\,h\,|\,\sqrt{I}\,(\sqrt{I} - \sqrt{I_1})\left[\frac{I_c}{\sqrt{I_1 I}} - 1\right]$$

اختلاف‌دوطرف نامساوی بالا بستگی به مقدار زیر دارد :

$$\frac{4H^2}{\sqrt{I_1}} - \frac{4H^2}{\sqrt{I}}$$

بنابراین برای یک $I_c$ معین منحنی $I$ تا نقطهٔ معین $I_2$ صعود کرده وچون درنقطهٔ

$$I_3 = \frac{I_c^2}{I_1}$$

مشتق $I$ یعنی $\dot{I}_3$ مثبت است منحنی هنوز قوس صعودی را طی کرده و بالاتر از $I_3$ خواهد رفت . شیب منحنی البته هرچه $I_1$ کمتر باشد بیشتر خواهد بود .

# فهرست منابع

**References**


1 – Birkhoff, G.D. «Dynamical Systems with two degrees of freedom,» Trans. Am. Math. Soe., vol. 18, pp. 199—300 (1917).

2 – Brouwer, D. and G. Clemence, «Methods of Celestial Mechanics,» Academic press, 1961.

3 – Goldstein, H., «Classical Mechanics», Addison-Wesley, (1951).

4 — Pollard, H. « Mathematical Introduction to celestial Mechanics,» Prentice Hall Publ. New Jersey, 1966.

5 — Wittaker, E. T., « Analytical Dynamics», 4th Edition Cambridge University Press (1965).