

وزنه‌های بالانسینگ با ممان اینرسی مینیمم

نوشته :

منصور نیکخواه بهرامی

استادپار دانشکده فنی

چکیده :

شکل وزنه‌های بالانسینگ براساس دو خصوصیت بدست می‌آید . یکی اینکه وزنه بالانسینگ دارای اندازه مینیمم باشد و دیگری ممان اینرسی حول محور دوران باید مینیمم باشد . درحالت دوم آنالیز تغییرات برای بدست آوردن این شکل اپتیمم بکاربرده شده است . درپایان نمودارهایی ارائه شده‌است که توسط آن طراح می‌تواند ابعاد لازم را برای وزنه‌های بالانسینگ براساس هر دو حالت فوق معین کند .

لیست علائم بکاربرده شده :

b	ضخامت وزنه بالانسینگ
h	فاصله (به شکل ۱ رجوع شود)
w	نصف پهنا (به شکل ۳ رجوع شود)
D	قطر وزنه بالانسینگ
M	جرم
Rc	فاصله شعاعی وزنه بالانسینگ (به شکل ۱ رجوع شود)
W	وزن
γ	وزن مخصوص وزنه بالانسینگ
θ	زاویه قطبی
θ_1	زاویه (به شکل ۳ مراجعه شود)
g	شتاب ثقل
r	فاصله شعاعی درمختصات قطبی (به شکل ۱ رجوع شود)
G	ممان استاتیکی که باید بالانس شود

I	سمان اینرسی وزنه بالانسینگ
R	شعاع وزنه بالانسینگ
R_0	بزرگترین شعاع خارجی وزنه بالانسینگ
α	زاویه (به شکل ۵ مراجعه شود)
λ	ضریب ثابت
θ_0	زاویه (به شکل ۳ مراجعه شود)

مقدمه :

ضمن حرکت چرخشی سریع و یا حرکت رفت‌آمدی، جرمهای نامتعادل اغلب باعث بوجود آمدن تنش زیاد، بارهای یاطاقانی و ارتعاش شدید می‌شوند. برای کاهش دادن این نتایج نامطلوب ناشی از جرمهای نامتعادل اغلب از وزنه‌های بالانسینگ استفاده می‌کنند. در بعضی از ماشین‌ها مانند موتورهای احتراق داخلی و کمپرسورهای پیستونی از وزنه‌های بالانسینگ همیشه استفاده می‌شود.

طراح که درانتخاب شکل وزنه‌های بالانسینگ آزادی عمل دارد معمولاً برای کاربردهای مختلف شکل‌های مختلفی را مورد استفاده قرار می‌دهد. برای مثال، طرز اتصال وزنه بالانسینگ به بدنه عامل مهمی در تعیین شکل است یعنی از اینکه آیا وزنه‌ها جزئی از میل‌لنگ و یا قطعاتی جداگانه هستند که به بدنه متصل شده‌اند. محدودیت‌های دیگری نیز مانند محدودیت‌های ابعادی درانتخاب شکل وزنه‌های بالانسینگ وجود دارد.

علاوه بر آنچه که گفته شد فرکانس چرخشی اولیه سیستم دوار که بستگی زیاد به سمان اینرسی جرمهای دوار دارد درانتخاب شکل وزنه بالانسینگ مؤثر است. برای اینکه بتوان این فرکانس طبیعی را هرچه ممکن است بالانگهداشت نقصان اینرسی جسم دوار اهمیت زیاد پیدامی‌کند، مخصوصاً درموتورهای با سرعت زیاد. از آنجا که جرمهای بالانسینگ ممکن است قسمت اعظم یک سیستم دوار را تشکیل بدهند، محاسبات وزنه‌های بالانسینگ براساس سمان اینرسی مینیمم حول محور دوران حائز اهمیت است.

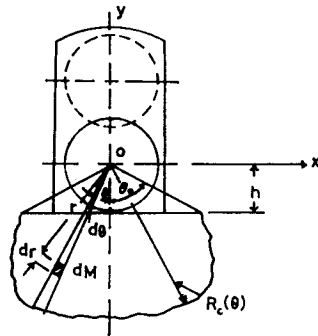
بنابراین می‌توان پیشنهاد کرد که طرح وزنه‌های بالانسینگ براساس سمان اینرسی مینیمم و یا اندازه مینیمم باید صورت بگیرد.

وزنه‌های بالانسینگ با سمان اینرسی مینیمم

در شکل (۱) مقطع یک وزنه بالانسینگ با شکل نامعین که به قسمت زیربدنه میل‌لنگ متصل گشته نشان داده شده است. ضخامت و جرم مخصوص جنس وزنه بالانسینگ مشخص است. شکل وزنه بالانسینگ باید طوری معین شود که مرکز جرم مجموعه بدنه میل‌لنگ و وزنه بالانسینگ در مرکز دوران

یعنی نقطه O قرار گیرد. اگر بدنه مهبل لنگ نسبت به محور y متقارن باشد و همان استاتیکیک آن حول محور x برابر C باشد وزنه بالانسینگ نیز باید نسبت به محور y متقارن بوده و در رابطه زیر صدق کند .

$$C = \int_{(M)} r \cos \theta \, dM \quad (1)$$



شکل (۱) - وزنه بالانسینگ

شکل اپتیمم برای وزنه بالانسینگ برای کاربرد خاصی مطابق آنچه که قبلاً گفته شد آنچه‌ان شکلی است که همان اینرسی جرمی آن

$$I = \int r^2 \, dM \quad (2)$$

حول محور دوران مینیمم باشد .

تابع $R_c(\theta)$ که انتگرال فوق را مینیمم می‌نماید با استفاده از روش آنالیز تغییرات (Variation Calculus of) بدست می‌آید . مینیمم کردن انتگرال فوق را با شرایط جانبی به فرم معادله (۱) مسئله ایزوپرامتریکی (Isoperimetric) مینامند (مرجع ۲) .

تابع $y = f(x)$ که انتگرال

$$I = \int_a^b F(x, y, y') \, dx \quad (3)$$

را تحت شرط جانبی

$$C = \int_a^b G(x, y, y') \, dx \quad (4)$$

ماکزیمم ویا مینیمم مینماید ازحل معادله اویلر (Euler) بدست می‌آید . یعنی ،

$$\frac{\partial}{\partial y} (F + \lambda G) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y'} \right] = 0 \quad (5)$$

به شرطی که تابع $F(x, y, y')$ و مشتق اول آن در فاصله $a < x < b$ پیوسته باشد.

الف - طرح وزنه بالانسینگ وقتی بسطح میل لنگ متصل است

اگر وزنه بالانسینگ بسطح صاف یک ماشین دوار مثلاً بدنه میل لنگ (Crank web) متصل

شود (شکل ۱)، سپس مسئله بوسیله معادلات زیر تعریف میگردد:

$$C = r \int_0^{\theta_0} \int_{h/\cos\theta}^{Rc} r^r \cos\theta \gamma b \, dr \, d\theta = \frac{r\gamma b}{r} \int_0^{\theta_0} \left(R_C^r \cos\theta - \frac{h^r}{\cos^r\theta} \right) d\theta \quad (6)$$

و:

$$I = r \int_0^{\theta_0} \int_{h/\cos\theta}^{Rc} \frac{\gamma b}{g} r^r \, dr \, d\theta = \frac{\gamma b}{r g} \int_0^{\theta_0} \left(R_C^g - \frac{h^g}{\cos^g\theta} \right) d\theta \quad (7)$$

که در آن C یک مقدار ثابت و I باید مینیمم شود. بنابراین با توجه به اینکه:

$$F = R_C^g - \frac{h^g}{\cos^g\theta} \quad (8)$$

و:

$$G = R_C^r \cos\theta - \frac{h^r}{\cos^r\theta} \quad (9)$$

معادله اوپلر بصورت زیر درمیآید:

$$4R_C^r + r\lambda R_C^r \cos\theta = 0 \quad (10)$$

یا:

$$R_C = -\frac{r}{4} \lambda \cos\theta \quad (11)$$

چون در $\theta = \theta_0$:

$$R_C = \frac{h}{\cos\theta_0}$$

و:

$$\lambda = - \frac{4}{3} \frac{h}{\cos^2 \theta_0} \quad (12)$$

پس خواهیم داشت :

$$Rc = \frac{h}{\cos^2 \theta_0} \cos \theta \quad (13)$$

معادله اخیر معادله دایره در مختصات قطبی است . این دایره از نقطه O گذشته و قطر آن :

$$D = \frac{h}{\cos^2 \theta_0}$$

است . برای بدست آوردن زاویه θ_0 که برای محاسبه قطر D وزنه بالانسینگ لازم است ، از معادله (۶) انتگرال گرفته و مقدار θ را محاسبه می‌نمائیم . پس از تنظیم معادله منتهجه خواهیم داشت :

$$\frac{C}{h^2 \gamma b} = \frac{\sin \theta_0}{\gamma \cos^2 \theta_0} + \frac{\sin \theta_0}{4 \cos^2 \theta_0} + \frac{\theta_0}{4 \cos^2 \theta_0} - \frac{2 \sin \theta_0}{3 \cos^2 \theta_0} \quad (14)$$

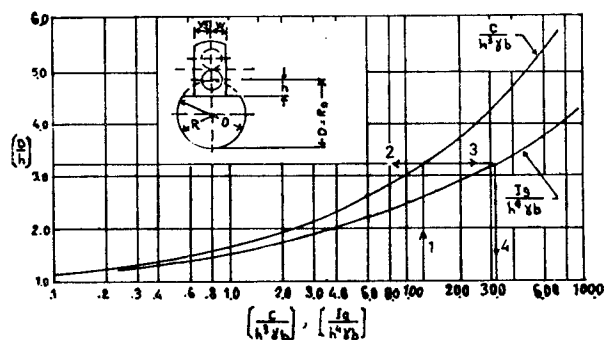
و:

$$\frac{D}{h} = \frac{1}{\cos^2 \theta_0} \quad (15)$$

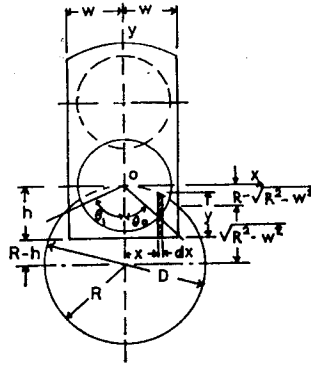
حال همان اینرسی وزنه بالانسینگ مربوطه از معادله (۷) بدست می‌آید :

$$\frac{gI}{h^4 \gamma b} = \frac{\sin \theta_0}{8 \cos^2 \theta_0} + \frac{3}{16} \frac{\sin \theta_0}{\cos^2 \theta_0} + \frac{3}{16} \frac{\theta_0}{\cos^2 \theta_0} - \frac{\sin \theta_0}{6 \cos^2 \theta_0} - \frac{\cos \theta_0}{3 \cos^2 \theta_0} \quad (16)$$

نمودارهایی جهت پیدا کردن پارامترهای به بعد معادلات (۱۴) و (۱۶) در شکل (۲) نشان داده شده‌اند .



شکل (۲) - نمودارهایی برای پیدا کردن شعاع و همان اینرسی وزنه بالانسینگ



شکل (۳) - وزنه بالانسینگ دایره‌ای شکل

ب - وزنه بالانسینگ متصل به یک قسمت باریک مستطیلی

اگر وزنه بالانسینگ به قطعه باریک موتور بعرض w و ضخامت b (مطابق شکل ۳) متصل باشد، سپس راه حل تقریبی برای شکل ایتیمم وزنه بالانسینگ با ادامه معادله دایره رابطه (۱۳) بصورت شکل (۳) بدست می آید .

برای لنگرهای حول محور X خواهیم داشت :

$$C = \gamma b \left[\pi R^r - \int_0^w \left(yh - \frac{y^r}{r} \right) dx \right] \quad (17)$$

که در آن مطابق (شکل ۳)

$$y = \sqrt{R^2 - X^2} - (R - h) \quad (18)$$

است . پس رابطه (۱۷) میشود

$$\frac{C}{w^r \gamma b} + \left(\frac{h}{w} \right)^r = \left(\frac{R}{w} \right)^r \pi + \int_0^w \left(\frac{R}{w} \right)^r - \left(\frac{R}{w} \right) \sqrt{\left(\frac{R}{w} \right)^2 - \left(\frac{x}{w} \right)^2} - \frac{1}{r} - \left(\frac{R}{w} \right)^r \arcsin \left(\frac{w}{R} \right) \quad (19)$$

حال رابطه بالا را می توان برای $\frac{R}{w}$ حل کرد .

ممان اینرسی را می توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$I = \frac{\gamma b \gamma}{g} \left[\int_0^{\theta_0} \int_{h/\cos\theta}^{\gamma R \cos\theta} r^2 dr d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{w/\sin\theta}^{\gamma R \cos\theta} r^2 dr d\theta \right] \quad (20)$$

حل آن عبارتست از:

$$\frac{gI}{w^2 \gamma b} = \left[\frac{gI}{w^2 \gamma b} \right]^* - \left[\frac{gI}{w^2 \gamma b} \right]**$$

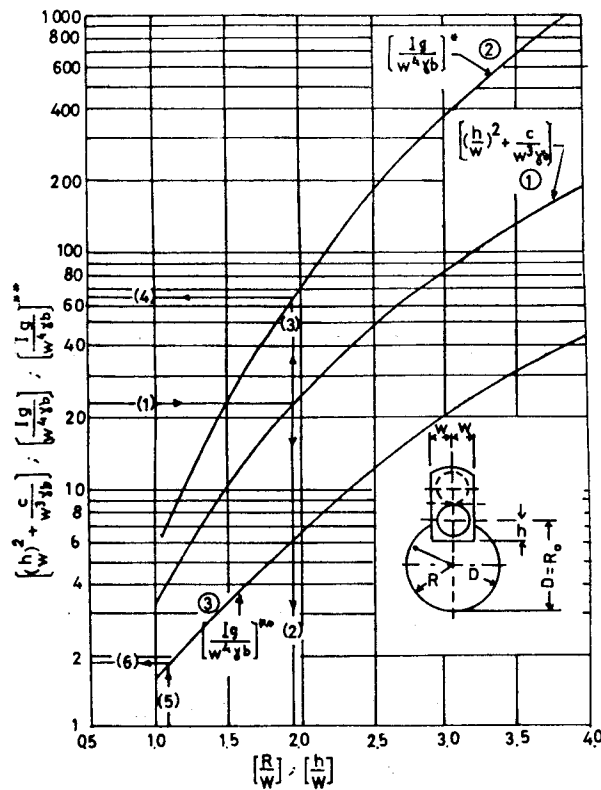
که در آن

$$\left[\frac{gI}{w^2 \gamma b} \right]^* = \left(\frac{R}{w} \right)^2 (\gamma \cos^2 \theta_1 \sin \theta_1 + \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \gamma \theta_1) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\cos \theta_1}{\gamma \sin^2 \theta_1} + \frac{\gamma \cos \theta_1}{\gamma \sin \theta_1} \right)$$

$$\left[\frac{gI}{w^2 \gamma b} \right]** = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{h}{w} \right)^2 \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin^2 \theta_0} + \frac{\gamma \sin \theta_0}{\cos \theta_0} \right) + \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} + \frac{\gamma \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right] \quad (21)$$

$$\theta_0 = \arctan \frac{w}{h} \quad (22)$$

$$\theta_1 = \arctan \frac{1}{\left(\frac{R}{w} \right) - \sqrt{\left(\frac{R}{w} \right)^2 - 1}} \quad (23)$$



شکل (۴) — نمایش نمودارهایی برای تعیین شعاع و سماں اینرسی وزنه بالانسینگ

نمودارهایی برای محاسبه پارامتر $\frac{R}{w}$ وزنه بالانسینگ و همچنین دوپرامتر اینرسی که برای محاسبه ممان اینرسی کل لازم هستند در شکل (ع) نشان داده شده است .

وزنه بالانسینگ با اندازه مینیمم

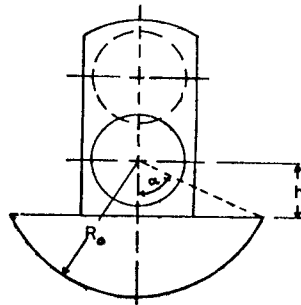
در موتورهای خاصی ممکن است وزنه بالانسینگ بر اساس شعاع خارجی مینیمم طرح شود . در این صورت اگر میل لنگ با اندازه کافی عریض باشد توصیه می شود از فرمی که در شکل (ه) نشان داده شده استفاده شود .

شعاع خارجی وزنه بالانسینگ میشود ،

$$R_o = \sqrt{\left(\frac{1350 \cdot C}{22b}\right)^{2/3} + h^2} \quad (24)$$

ممان اینرسی مربوطه را میتوان از رابطه زیر حساب کرد .

$$\frac{gI}{\gamma b} = \frac{\alpha}{0.73} \frac{R_o^4}{2} - \frac{h^4}{2} \tan \alpha \left(1 + \frac{\tan^2 \alpha}{3}\right) \quad (25)$$



شکل (ه) - وزنه بالانسینگ بشکل قطعه دایره

مثال :

در مثال زیر نشان داده خواهد شد که چگونه شکل وزنه بالانسینگ انتخاب شده در اندازه لازم و ممان اینرسی اثر می گذارد .

وزنه بالانسینگ که به بدنه میل لنگ متصل می باشد با مشخصات زیر طرح شده است:

$C = 4680$ اینچ - پوند

$h = 175$ اینچ

$b = 125$ اینچ

$$w = 1.46 \quad \text{اینج}$$

$$\gamma = 0.28 \quad \text{پوند بر مکعب اینج}$$

دو وزنه یکسان برای هر میل لنگ بکار برده شده است .

۱- برای وزنه بالانسینگ نشان داده شده در شکل (۲) داریم :

$$\frac{C}{2h^2\gamma b} = \frac{468}{2 \times 0.36 \times 0.28 \times 1.125} = 120$$

با استفاده از نمودارهای شکل (۳) خواهیم داشت :

$$\frac{I_g}{h^4\gamma b} = 313 \quad \text{و} \quad \frac{D}{h} = 319$$

بنابراین :

$$D = 319 \times 1.75 = 558 \quad \text{اینج}$$

$$I = \frac{313 \times 94 \times 0.28 \times 1.25}{386} = 0.267 \quad \text{پوند - اینج - مجذور ثانیه}$$

۲- برای وزنه بالانسینگ نشان داده شده در شکل (۴) داریم

$$\frac{h}{w} = \frac{1.75}{1.46} = 1.2$$

و :

$$\left(\frac{h}{w}\right)^2 + \frac{C}{w^2\gamma b} = 1.44 + \frac{468}{2 \times 3.112 \times 0.28 \times 1.25} = 229.4$$

از شکل (۴) خواهیم داشت :

$$\frac{R}{w} = 180$$

بنابراین :

$$D = 0.4 \quad \text{اینج} \quad \text{و} \quad R = 27 \quad \text{اینج}$$

با استفاده از مقادیر :

$$\left(\frac{R}{w}\right) = 120 \quad \text{و} \quad \left(\frac{R}{w}\right) = 180$$

می توان مقادیر دو پارمتر اینرسی را از منحنی های (۲) و (۳) در شکل (۴) مشاهده کرد . یعنی :

$$\left[\frac{I_g}{w^4\gamma b}\right]^* = 60 \quad \text{و} \quad \left[\frac{I_g}{w^4\gamma b}\right]** = 18$$

بنابراین :

$$I = \frac{w^4 \gamma b}{g} (60 - 1.8) = \frac{4.04 \times 0.28 \times 1.25}{386} \times 63.2 = 0.251 \quad \text{پوند - اینچ - مجذور ثانیه}$$

۳- بالاخره برای وزنه نشان داده شده در شکل (۵) مقادیر R_o و R_o و R_o اینرسی میشوند :

$$R_o = \sqrt{\left(\frac{1.0 \times 4.68}{2 \times 1.25 \times 0.28} \right)^{2/3} + (1.75)^2} = 2.96 \quad \text{اینچ}$$

$$\cos \alpha = \frac{1.75}{2.96} \quad ; \quad \alpha = 69.23' \quad ; \quad \tan \alpha = 2.608$$

$$I = \frac{1.25 \times 0.28}{386} \left[\frac{69.615}{573} \times \frac{4.96^4}{2} \times \frac{1.07^4}{2} \times 2.608 \left(1 \times \frac{2.608^2}{3} \right) \right] = 0.296 \quad \text{پوند - اینچ - مجذور ثانیه}$$

برای مقایسه ، شعاع خارجی و R_o اینرسی برای سه شکل فوق و برای سه شکل دیگر که اغلب در عمل کاربرد دارد (مرجع ۳) در جدول (۱) نشان داده شده است . با مراجعه به جدول و مقایسه ردیف ۱ و ۲ و ۳ ملاحظه می شود که کاهش در شعاع به اندازه ۶.۴ اینچ و یا در حدود ۱۲٪ همراه با افزایش ۰/۱۰ پوند - اینچ - مجذور ثانیه و یا در حدود ۴۰٪ در R_o اینرسی است .

بنابراین اگر اندازه وزنه بالانسینگ اهمیت داشته باشد بهتر است که شکل شماره ۳ (جدول ۱)

انتخاب شود چون افزایش در R_o اینرسی فقط ۱۸٪ است .

جدول (۱) - شعاع خارجی و R_o اینرسی و R_o بالانسینگ باشکلهای مختلف

$$h = 1.75 \quad \text{اینچ} \quad ; \quad w = 1.46 \quad \text{اینچ} \quad ; \quad b = 1.25 \quad \text{اینچ}$$

$$c = 4.68 \quad \text{پوند - اینچ} \quad ; \quad \gamma = 0.28 \quad \text{پوند بر مکعب اینچ}$$

No	R_o in	I_{gw} (lb-in-sec ²)	CONFIGURATION
1	5.40	0.251	
2	5.58	0.267	
3	4.96	0.296	
4	5.02	0.290	
5	4.83	0.320	
6	4.76	0.352	

نتیجه :

معادلات (۱۶) و (۲۱) و (۲۰) نشان می‌دهند که ممان اینرسی جرمی یک وزنه بالانسینگ با پهنا و وزن مخصوص آن نسبت معکوس دارد . بنابراین باید سعی شود که وزنه بالانسینگ از مواد سنگین و درحد امکان عریض ساخته شود . اگر امکانات اجازه دهد باید سعی شود از آلیاژهای سنگین که مطابق گفته بالا نتایج بهتری را دربرمیگیرد در وزنه‌های بالانسینگ استفاده نمود . اگر مواد بکاربرده شده در ساخت وزنه بالانسینگ چدن و یا فولاد باشد که هر دو عملاً دارای وزن مخصوص یکسان هستند در اینصورت از شکل ردیف ۱ برای ممان اینرسی مینیمم و از ردیف ۶ برای اندازه مینیمم می‌باید استفاده شود . در هر صورت پهنای وزنه باید در حد امکان بزرگ انتخاب شود .

فهرست مراجع

- 1 — Hertrich, F. R. — Minimum Inertia Counterweights . Machine Design Vol . 35, No. 6, 1963, pp. 160—4 .
- 2 — Weinstock, R. — Calculus of Variations . New York, McGraw — Hill, 1952 .
- 3 — Weiss, K. — Optimum Design of Balance Weights . Automobile Eng. , Vol. 59, No. 1, Jan. , 1969, pp. 9 — 11 .