تعیین توزیع درجه حرارت در عایق کابلهای سه‌فاز در حین عبور جریان اتصال کوتاه

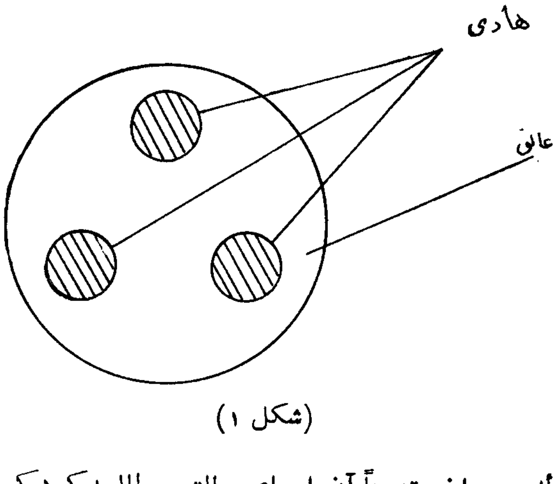
قسمت دوم

نوشتهٔ :

امیر منصور میری

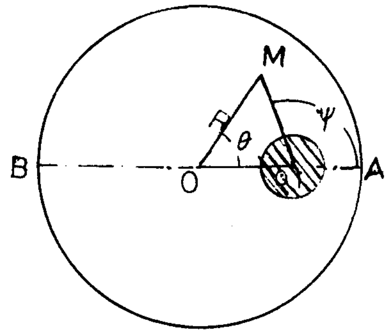
دانشیار دانشکده فنی

در اینجا غلاف هادی وماده‌ٔ پرکننده بین غلاف داخلی وخارجی را از یک جنس می گیریم درنتیجه مسأله به تعیین چگونگی توزیع حرارت درعایق کابلی منجر می گردد که هادیهای آن نسبت به محور کابل متقارن بوده و مقطع کابل بصورت دایره می‌باشد (شکل ۱) .



(شکل ۱)

برای حل این مسأله میتوان مقدمتاً آن‌را برای حالتی مطالعه کرد که کابل فقط دارای یک هادی باشد (شکل ۲) ومحور کابل برمحور هادی منطبق نباشد. سپس نتایج حاصله را برای حالت مذکور دربالا تعمیم داد .



(شکل ۲)

مفروضات مسأله : شعاع هادیرا با r و مرکز آن را با O_1

شعاع کابل را با R و مرکز آن را با O

ضریب هدایت حرارتی هادی را با K_L

ضریب هدایت حرارتی عایق را با K

ضریب انتقال حرارت را از عایق به فضا با h

و فاصلهٔ O_1O را با d

نشان می‌دهیم .

درمختصات قطبی فاصله نقطه دلخواه M از O را با ρ و زاویهٔ OM با OO_1 را با θ نشان می‌دهیم (شکل ۲) . دراین دستگاه معادله $\Delta\varphi=0$ [۱] بصورت :

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0$$

نوشته می‌شود .

با استفاده از روش جدا کردن متغیرها ورعایت فورمول $\varphi=R(\rho)\,\Theta(\theta)$ بدومعادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم :

$$\Theta''+\lambda\Theta=0 \qquad \text{و} \qquad \rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0$$

با توجه به $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$ باید داشته باشیم $\lambda=n^2$ و درنتیجه :

$$\Theta_n(\theta)=A_n\operatorname{Cos} n\theta+B_n\operatorname{Sin} n\theta$$

معادله دیگر یک معادله اویلر* است که جوابهای آن به ازای $n\neq 0$ بصورت :

[۱] تعیین توزیع درجه حرارت درعایق کابلهای سه فاز درحین عبور جریان اتصال کوتاه قسمت اول نشریه دانشکده فنی شماره ۱۸ .

* Euler

$$R_n = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}$$

و به ازای $n=0$ بصورت :

$$R_0(\rho) = A_0 + B_0 \log \rho$$

می‌باشد .

جواب کلی معادله $\Delta\varphi=0$ بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$\varphi(\rho,\theta) = A_0 + B_0 \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \rho^n + B'_n \rho^{-n}] \cos n\theta \tag{۲}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [A''_n \rho^n + B''_n \rho^{-n}] \sin n\theta$$

حال مسأله را درشرایط خاصی مطالعه می‌کنیم .

اولاً چون با تبدیل θ به $-\theta$ مقدار φ تغییر نمی‌کند (تقارن نسبت به محور x ها) داریم $B''_n = A''_n = 0$ و از اینجا عبارت (۲) بصورت :

$$\varphi(\rho,\theta) = A_0 + B_0 \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}] \cos n\theta \tag{۳}$$

درمی‌آید .

ثانیاً رابطه تبادل حرارت از عایق به فضای خاوج یعنی فورسول نیوتن را درنظر می‌گیریم :

$$-K \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_R = h[\varphi]_R$$

می‌دانیم که دراین فرمول h ضریب انتقال حرارت از عایق به فضا است وتعبیر این رابطه چنین‌است: تبادل حرارتی درنقاطی از جدار کابل که درجهٔ حرارتش نسبت به فضای خارج بیشتر است به نسبت بیشتری انجام می‌گیر . چون در روی دایره $\rho=R$ داریم :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_R = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right]_{\rho=R}$$

لذا مشتق رابطه (۳) به‌صورت :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right]_{\rho=R} = \frac{B_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n R^{n-1} - B_n R^{-n-1}) \cos n\theta$$

و درنتیجه رابطه نیوتن بصورت :

$$-K\left[\frac{B_0}{R}+\sum_{n=1}^{\infty} n(A_nR^{n-1}-B_nR^{-n-1})\operatorname{Cos} n\theta\right]$$

$$=h\left[A_0+B_0\log R+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nR^n+B_nR^{-n})\operatorname{Cos} n\theta\right]$$

درمی‌آید. از مساوی قراردادن ضرائب جملات مربوطه درطرفین تساوی اخیر خواهیم داشت :

$$\frac{-KB_0}{R}=h(A_0+B_0\log R)\implies A_0=-B_0\left(\frac{-K}{hR}+\log R\right)$$

و نیز :

$$h[A_nR^n+B_nR^{-n}]=-Kn(A_nR^{n-1}-B_nR^{-n-1})\implies A_n=B_n\frac{nK-hR}{nK+hR}R^{-2n}$$

چون این مقادیر را درعبارت φ بگذاریم خواهیم داشت :

$$\varphi(\rho,\theta)=-B_0\left(\frac{-K}{hR}+\log R\right)+B_0\log\rho+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(\rho^{-n}+\frac{nK-hR}{nK-hR}\cdot R^{-2n}\cdot\rho^{n}\right)\operatorname{Cos} n\theta$$

ثالثاً شرط حدی ثابت بودن درجهٔ حرارت درسطح هادی را درنظر میگیریم :

برای این منظور دستگاه مختصات جدیدی اختیار می‌کنیم که درآن مرکز هادی مبداء و محور قطبی همان خطالمرکزین OO_1 باشد . دراین دستگاه مختصات یک نقطه را با (x,ψ) نمایش می‌دهیم. لذا معادله $\triangle\varphi=0$ دراین دستگاه بصورت زیر درمی‌آید :

$$\varphi(x,\psi)=a_0+b_0\log x+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nx^n+b_nx^{-n})\operatorname{Cos} n\psi \qquad (6)$$

با رعایت شرط حدی $\varphi|_{x=r}=\varphi_0$ در رابطه اخیر مقادیر زیر بدست می‌آید :

$$a_0+b_0\log r=\varphi_0\implies a_0=\varphi_0-b_0\log r$$

$$a_nr^n+b_nr^{-n}=0\implies a_n=-b_nr^{-2n}$$

بنابراین تابع (۶) چنین نوشته می‌شود :

$$\varphi(x,\psi)=\varphi_0-b_0\log r+b_0\log x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x^{-n}-x^nr^{-2n})\operatorname{Cos} n\psi$$

اکنون برای تلفیق شرایط ثانیاً و ثالثاً از فرمول‌های :

$$\begin{cases} x^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho \,\mathrm{Cos}\,\theta \\ x \,\mathrm{Sin}\,\psi = \rho \,\mathrm{Sin}\,\theta \end{cases}$$

که از مثلث OMO_1 (شکل ۲) بدست می‌آید استفاده می‌کنیم و تابع اخیر را برحسب ρ و θ می‌نویسیم و از مساوی قرار دادن آن با تابع $\varphi(\rho, \theta)$ به تعیین ضرایب B_n وهمچنین b_n می‌پردازیم .

بی‌آنکه لطمه‌ای به کلی بودن مسئله زده شود می‌توان بازاء $\psi=0$ و $\theta=0$ درتابع مزبور را مساوی‌هم قرار داد .

بازاء $\rho > d$ دراینجا بین ρ و x رابطه زیر برقرار است .

$$x = \rho - d$$

با استفاده از بسط $\log x\,,\, x^{-n}$ به سری ومساوی قرار دادن ضرائب ρ^{-p} درطرفین تساوی داریم :

$$B_p = -\frac{b_0 d^p}{p} + \sum_{n=1}^{p} \binom{p-1}{p-n} d^{p-n} b_n$$

دیده میشود که اگر فرض کنیم $B_p = B'_p d^p$ و $b_n = b'_n d^n$ عبارت فوق بصورت ساده :

$$B'_p = -\frac{b_0}{p} + \sum_{n=1}^{p} \binom{p-1}{p-n} b'_n \qquad \text{(a)}$$

که مستقل از d است تبدیل می‌شود .

همینطور اگر تساوی دوتابع را بازاء $\rho = x$ بررسی کنیم با قرارداد فوق نتیجه می‌شود :

$$\sum_{n+k=p} \left(b'_n + (-1)^{n+1} B_n\right) \beta_{n,k} = 0 \qquad \text{(b)}$$

که درآن $\beta_{n,k}$ ضریب $\mathrm{Cos}\, n\,\theta$ دربسط $\mathrm{Cos}^k\theta$ می‌باشد .

به کمک روابط (a) و (b) هردو دسته ضرائب تعیین می‌شود .

درمورد کابلهای سه فازی (یا بطورکلی n فازی) تابع φ علاوه برآنکه باید درشرایط فوق صدق نماید لازم است دارای تقارن مرکزی مرتبه سوم (یا بطورکلی مرتبه n) هم باشد یعنی درعبارت $\varphi(\rho, \theta)$

که دربالا تعیین شد فقط جملاتی که اندیس‌آنها مضربی از ۳ (یابطورکلی n) می‌باشد باقی بمانند* وبقیه از بین بروند . لذا دراینمورد داریم :

$$\varphi(\rho,\theta)=-B_{\circ}\left(\frac{-K}{hr}+\log R\right)+B_{\circ}\log\rho+\sum_{n=1}^{\infty}b_{3n}\left(\rho^{-3n}+\frac{3rK-h\rho}{3rK+hR}R^{-6n}\rho^{3n}\right)d^{3n}\cdot \mathrm{Cos}\,3n\theta$$

این تابع، تابع توزیع‌حرارت درناحیه $d<\rho\leqslant R$ می‌باشد . چنانچه دیده می‌شوداگر d بسمت‌صفر میل کند تابع $\varphi(\rho,\theta)$ بصورت اول درآمده مستقل از θ خواهد بود .

بازاء $\rho<d$ ، ضرایب سری صفر شده و توزیع مقدار حرارت طبق دوجمله اول رابطهٔ اخیرصورت می‌گیرد .

نتیجه‌ایکه از این بررسی بدست می‌آید اینستکه اولاً بهمان‌طریق که درمورد کابل یک فازی هم محور درشماره ۱۸ دانشکده فنی توضیح داده شد از مقدار جریان اتصال کوتاه و ابعاد هندسی و مشخصات الکتریکی و شرایط ضرایب موجود درعبارت $\varphi(\rho,\theta)$ بدست می‌آید و بدین‌ترتیب توزیع حرارت درعایق کابل مشخص میگردد . منحنی‌های تراز بازاء $\rho>d$ از نوع کلی لمنیسکات بوده و درناحیه $\rho<d$ با منظورکردن مشخصات الکتریکی کابلهای سه فاز حرارت تقریباً یکسان است .

---

* چون دراین‌مورد برای معادله $\Delta\varphi=0$ جوابی را باید بدست آورد که ضمناً دارای تقارن رتبه ۳ باشد یعنی با تبدیل θ به $\theta+\frac{2\pi}{3}$ و $\theta+\frac{4\pi}{3}$ مقدار آن تغییر نکند وبعبارت دیگر .

$$3\,\varphi(\rho,\theta)=\varphi(\rho,\theta)+\rho\left(\rho,\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\varphi\left(\rho,\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

باشد وچون عبارت :

$$\mathrm{Cos}\,n\theta+\mathrm{Cos}\left(n\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{Cos}\left[n\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

هرگاه n مضرب ۳ باشد برابر ۳ و درغیراینصورت برابر صفر میشود لذا باین نتیجه میرسیم که B_n هرگاه n مضرب ۳ نباشد صفر است .