صفحهٔ گرد طره‌ای تحت‌تأثیر بار و لنگر شعاعی خطی یکنواخت

نوشتهٔ :

محمد حسین کاشانی ثابت

استاد دانشکدهٔ فنی

۱ـ خلاصهٔ مقاله ـ دراین مقاله تغییر شکل و تنش های صفحه های گرد طره‌ای که تحت تأثیر بار خطی همواری مؤثر بین مرکز و تکیه گاه صفحه باشد بدست آمده و نیز حالتی که صفحه تحت‌تأثیر لنگر شعاعی خطی‌ای بشدت ثابت و واقع بین مرکز صفحه و تکیه گاه و یا بین تکیه گاه و محیط باشد ، حل شده است .

بعلاوه در پایان مقاله کار برد این نوع بارگزاریها ذکر شده است .

۲ـ مقدمه ـ در شمارهٔ هشتم دورهٔ دوم نشریهٔ دانشکده فنی تغییرشکل و تنش های صفحه های گرد طره‌ای که تحت‌تأثیر بار خطی هموار و واقع بین تکیه گاه و لبه و همچنین تحت تأثیر لنگری شعاعی در طول لبه باشد بوسیلهٔ نویسنده این مقاله تعیین گردید . چون گاهی اتفاق میافتد که بار خطی‌هموار بین مرکز و تکیه گاه صفحه مؤثر است ، لذا داشتن جواب مسئله دراین حالت در طرح و محاسبهٔ این قبیل صفحه ها لازم میباشد . هم‌چنین تعیین خیز و تنش های چنین صفحه هائی که تحت‌تأثیر لنگر خمشی ثابتی در واحد طول باشد دارای کار برد مهندسی و حل آن دراین مقاله ذکر شده است .

درحل و بحث این حالات مانند حالات سابق فرض میشود که ضخامت صفحه اندك و ثابت و جسم صفحه دارای حالت ارتجاعی ، همگن و ایزوتروپ است و پیوستگی میان صفحه و تکیه گاه آن وجود ندارد .

کار برد نتایج بدست آمده از این حالات بارگزاری متعدد است . بعنوان مثال میتوان صفحهٔ گرد طره‌ای را ذکر کرد که درطول لبه بجای آنکه آزاد باشد برتکیه گاه ساده‌ای قرار داشته و یا گیردار باشد . هم‌چنین وقتیکه بین صفحهٔ طره‌ای و تکیه گاه آن پیوستگی وجود داشته و یا این قبیل صفحه هابطور جزئی بار گزاری جانبی شده باشد .

نتیجهٔ جالب دیگری که از جوابهای صفحه وقتیکه تحت‌تأثیر بار خطی همواری است میتوان گرفت بررسی حالتی است که صفحه تحت‌تأثیر لنگر شعاعی خطی همواری باشد که بااستفاده از اصل اجتماع اثر قواو رعایت تکنیک خاصی میتوان به نتایج حاصله از حل مستقیم این مسأله رسید.

۳ـ یادآوری مجدد اصطلاحات و علائم :

$a=$ شعاع تکیه گاه گرد

$b=$ شعاع لبهٔ صفحه

$c=$ شعاع دایره‌ایکه در طول محیط آن نیرو یا لنگری بکمیت ثابت در واحد طول اثر میکند

$D=$ صلبیت خمشی صفحه $=\dfrac{Eh^{3}(1-\nu^{2})}{12}$

$h=$ ضخامت صفحه

$E=$ ضریب ارتجاعی جسم صفحه

$\nu=$ ضریب پوآسون

$M_r=$ لنگر خمشی شعاعی در واحد طول که در صفحهٔ $r-z$ اثر میکند $=D\left(\dfrac{d\varphi}{dr}+\nu\dfrac{\varphi}{r}\right)$

$M_t=$ لنگر خمشی مماسی در واحد طول که در صفحهٔ $t-z$ اثر میکند $=D\left(\dfrac{\varphi}{r}+\nu\dfrac{d\varphi}{dr}\right)$

$p=$ بار خطی هموار برحسب کیلوگرم برواحد طول

$V=$ نیروی برشی در واحد طول که موازی با محور z و درسطحی عمود بر امتداد شعاع اثر می کند

$M_0=$ لنگر خمشی مؤثر در واحد طول

$q=$ بار در واحد سطح

$r=$ شعاع ـ متغیر مطلق

$W=$ تغییر شکل سطح میانگین صفحه

$\varphi=$ زاویهٔ مماس برمنحنی تغییر شکل

$b/a=\beta$

٤ـ معادلهٔ دیفرانسیل صفحه برحسب φ

بطوریکه در مراجع [۱ تا ٤]* مذکوراست معادلهٔ دیفرانسیل صفحه برحسب φ بصورت زیرمیباشد:

$$\frac{d^{2}\varphi}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^{2}}=\frac{V}{D} \qquad (1)$$

* ـ اعداد داخل ابروها شمارهٔ مرجع‌ها را در فهرست مراجع بیان میکنند.

که در آن φ ، r ، V و D دارای معانی بیان شده در بالا است.

در مقالات سابق ذکر شد که جواب معادلهٔ (۱) از حاصلجمع جواب معادلهٔ متجانس و جواب خصوصی مسئله بدست میآید.

جواب معادلهٔ متجانس بصورت زیر نوشته میشود :

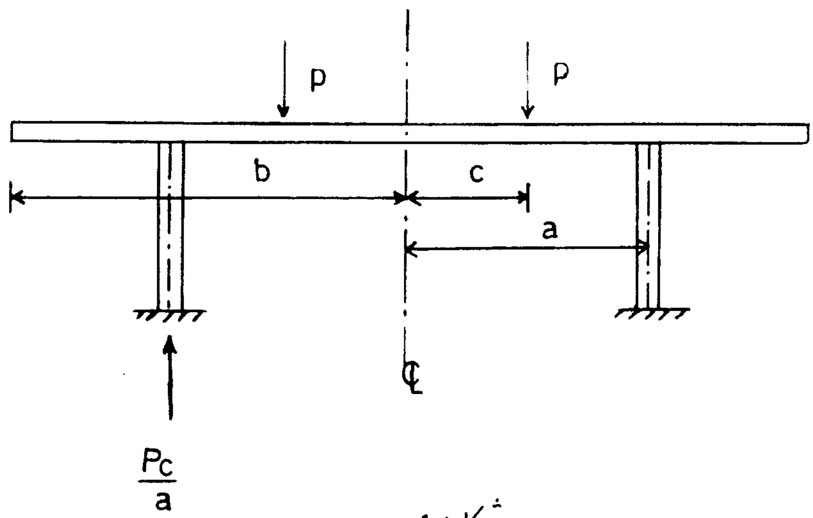
$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} \qquad (۲)$$

که A و B ثابت‌های انتگراسیون میباشد.

جواب خصوصی مسئله بستگی بحالت بارگزاری دارد که با بیان کردن V برحسب بارهای خارجی آنگاه باید آنرا بدست آورد.

در سه حالتی که ذیلاً ذکر میگردد از معادلهٔ (۲) استفاده خواهد شد.

۵-۱- حالت اول - صفحهٔ طره‌ای تحت تأثیر بار خطی همواری واقع بین مرکز و تکیه‌گاه



شکل (۱)

بطوریکه از شکل (۱) استنباط میگردد صفحه در اینحالت بارگزاری از سه ناحیهٔ متمایز بشرح زیر تشکیل شده است :

ناحیهٔ اول : $0 < r < c$ که در آن

$$V_1 = 0$$

است. پس دراین ناحیه φ_1 بصورت زیر نوشته میشود :

$$\varphi_1 = Ar + \frac{B}{r}$$

که از روی شرط $\varphi_1=0$ بازای $r=0$ در مورد مقدار معین φ_1 ، ثابت $B=0$ و φ_1 بعبارت زیر خواهد بود :

$$\varphi_1=Ar$$

$$Mr_1=Mt_1=DA(1+v)$$

ناحیهٔ دوم $c<r<a$ که در آن :

$$V_2=-\frac{pc}{r}$$

و φ_2 با توجه بآنچه که در مقالات سابق اینجانب ذکر شد بصورت زیر نوشته میگردد :

$$\varphi_2=Fr+\frac{G}{r}-\frac{pc}{2D}\,r\ln r$$

که در آن F و G ثابتهای انتگراسیون است.

عبارت Mr_2 و Mt_2 بشرح زیر میباشد :

$$Mr_2=D\left[(1+v)F-(1-v)\frac{G}{r^2}-\frac{pc}{2D}(1+v)\ln r-\frac{pc}{2D}\right]$$

$$Mt_2=D\left[(1+v)F+(1-v)\frac{G}{r^2}-\frac{pc}{2D}(1+v)\ln r-\frac{pc}{2D}v\right]$$

ناحیهٔ سوم : $a<r<b$ که در آن :

$$V_3=0$$

و φ_3 ، Mr_3 و Mt_3 بترتیب بعبارتهای زیر است :

$$\varphi_3=Hr+\frac{I}{r}$$

$$Mr_3=D\left[(1+v)H-(1-v)\frac{I}{r^2}\right]$$

$$Mt_3=D\left[(1+v)H+(1-v)\frac{I}{r^2}\right]$$

که H و I نیز ثابتهای انتگراسیون میباشد.

بااستفاده از شرایط پیوستگی وحدی پنجگانهٔ زیر :

$$\varphi_1(c)=\varphi_2(c) \qquad \text{(الف)}$$

$$Mr_1(c)=Mr_2(c) \qquad \text{(ب)}$$

(ج) $$\varphi_2(a)=\varphi_3(a)$$

(د) $$Mr_2(a)=Mr_3(a)$$

(ه) $$Mr_3(b)=0$$

ثابتهای انتگراسیون و لنگرهای خمشی شعاعی و مماسی محاسبه میگردد و بعبارتهای زیر خواهد بود :

$$A=\frac{pc}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)-2\ln c/a\right]$$

$$F=\frac{pc}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)+1+2\ln a\right]$$

$$G=-\frac{pc^3}{4D}$$

$$H=\frac{pc}{4D}\cdot\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)$$

$$I=\frac{pc}{4D}\,(a^2-c^2)$$

و :

(۳) $$Mr_1=Mt_1=\frac{pc}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)-2(1+\nu)\ln c/a\right]\quad,\quad 0<r<c$$

(۴) $$Mr_2=\frac{pc}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}-1+\frac{c^2}{r^2}\right)+2(1+\nu)\ln a/r\right]$$

(۵) $$Mt_2=\frac{pc}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}+1-\frac{c^2}{r^2}\right)+2(1+\nu)\ln a/r\right]\quad,\quad c<r<a$$

(۶) $$Mr_3=\frac{pc}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}-\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)$$

(۷) $$Mt_3=\frac{pc}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)\quad,\quad a<r<b$$

تبصره ـ عبارت‌های Mr_1 ، Mt_1 ، Mr_3 و Mt_3 دراین حالت‌بارگزاری درست بهمان‌صورتهائی است که درحالت بار خطی هموار که واقع بین تکیه‌گاه و لبه باشد در مقالهٔ قبلی اینجانب منتشر شده در شماره هشتم دورهٔ دوم مجلهٔ دانشکده فنی مورخ مهرماه ۱۳٤٦ بامعادلات (۱٦) و (۱۸ الف و ب) بدست آمده بود .

۵ـ۱ـ۱ـ محاسبهٔ تغییر شکل W

با توجه بآنکه

$$W = -\int \varphi dr + K$$

میباشد لذا با استفاده از شرایط پیوستگی وحدی زیر K و بالنتیجه W بشرح زیر بدست میآید :

$$W_1(c) = W_2(c) \tag{و}$$

$$W_3(a) = 0 \tag{ز}$$

$$W_2(a) = W_3(a) \longrightarrow W_3(a) = 0 \tag{ح}$$

و :

$$W_1 = \frac{pca^2}{8D}\left\{\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{c^2}{b^2}\right)\right]\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}\right)\ln\frac{c}{a} + 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\right\} \tag{8}$$

$$W_2 = \frac{pca^2}{8D}\left\{\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{c^2}{b^2}\right) + 2\right]\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + 2\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}\right)\ln\frac{r}{a}\right\} \tag{9}$$

$$W_3 = \frac{pca^2}{8D}\left\{\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right) - 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\ln\frac{r}{a}\right\} \tag{10}$$

۵ـ۲ـ حالت دوم ـ صفحهٔ طره‌ای تحت‌تأثیر لنگر شعاعی ثابت M_0

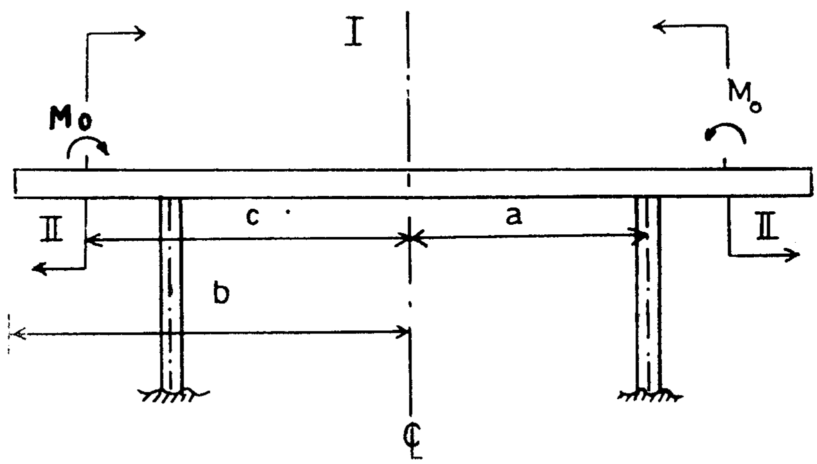
فرض میکنیم لنگر خمشی شعاعی ثابت M_0 در واحد طول برمحیط دایره‌ای بشعاع c اثر کند ، دراین صورت دو حالت تشخیص میگردد :

(الف) ـ شعاع c بین a و b واقع است

(ب) ـ شعاع c بین صفر(مرکزصفحه)و a قرار دارد

۵ـ۲ـ۱ـ حالت (الف) ـ دراین حالت $a<c<b$ است.

باتوجه بشکل (۲) دو ناحیهٔ متمایز دراین صفحهٔ طره‌ای تشخیص میگردد :



شکل (۲)

ناحیه اول : $0<r<c$

که در آن $V_I=0$ و φ_I ، Mr_I و Mt_I بصورت زیر نوشته میشود :

$$\varphi_I=Ar$$

$$Mr_I=Mt_I=D(1+\nu)A=\text{مقداری ثابت}$$

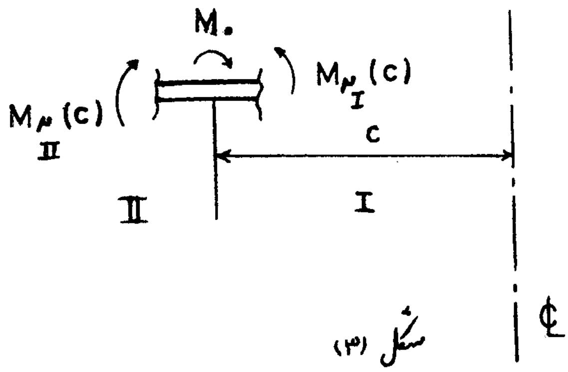
ناحیهٔ دوم : $a<r<b$

که در آن $V_{II}=0$ و φ_{II} ، Mr_{II} و Mt_{II} بعبارتهای زیر خواهد بود :

$$\varphi_{II}=Er+\frac{F}{r}$$

$$Mr_{II}=D\left(\frac{d\varphi_{II}}{dr}+\frac{\nu}{r}\varphi_{II}\right)=D\left[(1+\nu)E-(1-\nu)\cdot\frac{F}{r^2}\right]$$

$$Mt_{II}=D\left(\frac{\varphi_{II}}{r}+\nu\frac{d\varphi_{II}}{dr}\right)=D\left[(1+\nu)E+(1-\nu)\frac{F}{r^2}\right]$$



شکل (۳)

برای تعیین ثابتهای A ، E و F از شرط ناپیوستگی درکمیت لنگر خمشی شعاعی در فصل مشترک نواحی I و II وشرط پیوستگی φ دراین مقطع ونیز شرط حدی استفاده میگردد.

شرط جهش[1] یا ناپیوستگی درکمیت لنگر خمشی شعاعی در مقطع $c=r$ ازنوشتن معادلهٔ تعادل لنگرهای شعاعی برای جسم آزاد شکل (۳) بشرح زیر بدست میآید :

$$Mr_{II}(c)+M_0-Mr_I(c)=0 \qquad \text{(الف)}$$

و از شرط پیوستگی φ درمقطع $c=r$ داریم :

$$\varphi_I(c)=\varphi_{II}(c) \qquad \text{(ب)}$$

و از شرط حدی :

۱- Jump Condition

(ج) $$Mr_{II}(b)=0$$

ازآنچه گذشت سه معادله بشرح زیر بدست میآید که از حل آنها ثابتهای A ، E و F محاسبه میگردد.

$$A-E+\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{F}{c^2}=\frac{M_0}{D(1+\nu)}$$

$$A-E-\frac{F}{c^2}=0$$

$$E-\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{F}{b^2}=0$$

عبارت‌های A ، E و F بصورت زیر میباشد:

$$A=\frac{M_0}{2D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{c^2}{b^2}+1\right]$$

$$E=\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{M_0}{2D}$$

$$F=\frac{M_0c^2}{2D}$$

لنگرهای خمشی شعاعی و مماسی برای هریک از این دو ناحیه بعبارتهای زیر است:

(۱۱) $$Mr_I=Mt_I=\frac{M_0}{2}\left[(1-\nu)\frac{c^2}{b^2}+(1+\nu)\right]\quad,\quad 0<r<c$$

(۱۲) $$Mr_{II}=\frac{M_0(1-\nu)}{2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)$$

(۱۳) $$Mt_{II}=\frac{M_0(1-\nu)}{2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}Mr_{II}\\Mt_{II}\end{matrix}\right\}\quad,\quad c<r<b$$

برای محاسبهٔ خیز در هرناحیه باز با توجه بانتگرال:

$$W=-\int\varphi dr+K$$

و رعایت شرایط زیر:

(د) $$W_I(a)=0$$

(ه) $$W_I(c)=W_{II}(c)$$

ثابتهای انتگراسیون محاسبه میگردد و مآلاً W_I و W_{II} بعبارتهای زیر نتیجه میشود:

(۱٤) $$W_I=\frac{M_0a^2}{4D}\left(1+\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{c^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\quad,\quad 0<r<c$$

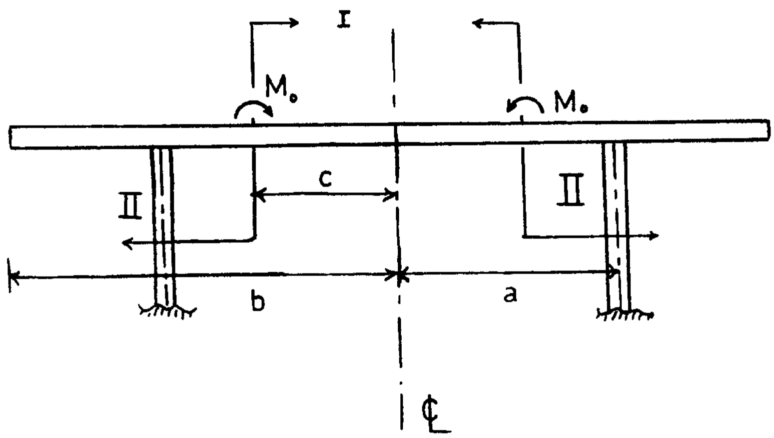
$$W_{II}=\frac{M_\circ a^2}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{c^2}{a^2}\left(1+2\ln r/c\right)\right] \quad , \quad c<r<b \qquad (15)$$

تبصره ـ از معادله‌های (۱۲) و (۱۳) داریم :

$$Mr_{II}+Mt_{II}=\frac{M_\circ(1-\nu)c^2}{b^2}=\text{مقداری ثابت}$$

۵-۲-۲- حالت (ب) ـ در این حالت $\circ<c<a$ است.

با توجه بشکل (٤) باز در این حالت دو ناحیهٔ متمایز تشخیص داده میشود :



شکل (۴)

ناحیهٔ اول : $\circ<r<c$

که در آن $V_I=\circ$ و φ_I ، Mr_I و Mt_I بعبارتهای زیر خواهد بود :

$$\varphi_I=A'r$$

$$Mr_I=Mt_I=D(1+\nu)A'=\text{مقداری ثابت}$$

ناحیهٔ دوم : $c<r<b$

که در آن $V_{II}=\circ$ و φ_{II} ، Mr_{II} و Mt_{II} بشرح زیر نوشته میشود :

$$\varphi_{II}=E'r+\frac{F'}{r}$$

$$Mr_{II}=D\left[(1+\nu)E-(1-\nu)\frac{F}{r^2}\right] \quad \text{و} \quad Mt_{II}=D\left[(1+\nu)E+(1-\nu)\frac{F}{r^2}\right]$$

چون‌عبارتهای φ ، Mr و Mt در حالت‌های (الف) و (ب) برحسب ثابتهای A ، E ، F و A' ، E' ، F' بیک صورت است وبعلاوه شرایط ناپیوستگی در لنگر خمشی شعاعی ، پیوستگی در φ وشرط حدی بیک‌شکل

است لذا دراین حالت برای A' ، B' و C' سه معادله شبیه بآنچه که در حالت(الف) برای A ، B و C نتیجه شده بود بدست میآید که بآلمال مقدار A' ، E' و F' بترتیب بصورت عبارتهای A ، E و F نوشته میشود. لذا Mr_I ، Mt_I بصورت معادلهٔ (۱۱) و Mr_{II} و Mt_{II} بترتیب بصورت معادله های (۱۲) و (۱۳) خواهد بود. لیکن در محاسبهٔ خیز یکی‌از شرایط در دو حالت (الف) و (ب) با هم متفاوت است یعنی دراین حالت داریم :

$$W_{II}(a) = 0$$

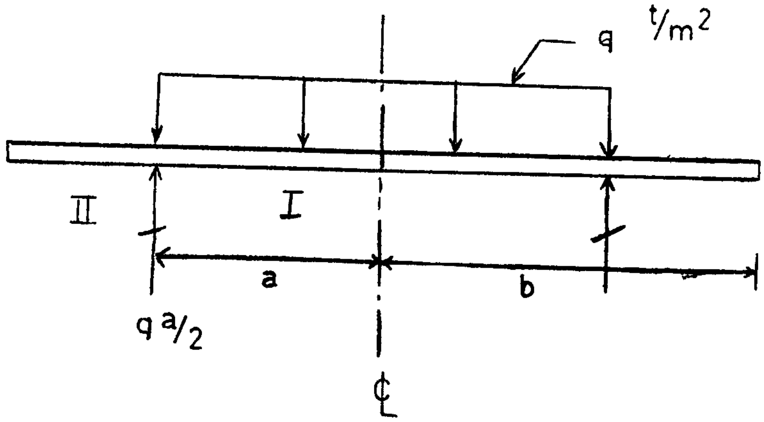
درصورتیکه درحالت (الف) داشتیم $W_I(a) = 0$. از اینروباستفاده از روش پیشین و رعایت این شرط ونیز شرط پیوستگی خیز نواحی I و II درمقطع‌بشعاع $c = r$ ، کمیت W_I و W_{II} محاسبه میگردد و عبارت آنها چنین خواهد بود :

$$W_I = \frac{M_0 a^2}{4D}\left[\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{c^2}{b^2}+1\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)-1+\frac{c^2}{a^2}\left(1-2\ln c/a\right)\right], \quad 0 \leqslant r \leqslant c \tag{۱۶}$$

$$W_{II} = \frac{M_0 a^2}{4D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)-2\frac{c^2}{a^2}\ln r/a\right], \quad c \leqslant r \leqslant b \tag{۱۷}$$

۶ـ کار برد نتایج بدست‌آمده از بارگزاری حلقوی

۶ـ۱ـ بارگزاری جانبی جزئی ـ صفحه‌طره‌ای شکل (۵) و (۷) را در نظر میگیریم که بطورجانبی بشدت ثابت q در واحد سطح درقسمت داخل یاخارج آن بارگزاری شده باشد. نخست شکل (۵) رامورد توجه ترار میدهیم.



شکل (۵)

دراین حالت بارگزاری صفحه دارای دو ناحیه متمایز I و II بشرح زیر است :

ناحیهٔ I : $0 < r < a$

ناحیهٔ II : $a < r < b$

برای محاسبهٔ Mr_{II} ، Mt_{II} و W_{II} کافی است بترتیب بجای :

$$p=qdc$$

در معادلهٔ (۶) ، (۷) و (۱۰) قرار داده و آنرا میان $c=0$ و $a=c$ بشرح زیر انتگره کرد :

$$Mr_{II}=\int_0^a \frac{qc}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}-\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)dc$$

$$Mt_{II}=\int_0^a \frac{qc}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)dc$$

$$W_{II}=\int_0^a \frac{qca^2}{8D}\left\{\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)-2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\ln r/a\right\}dc$$

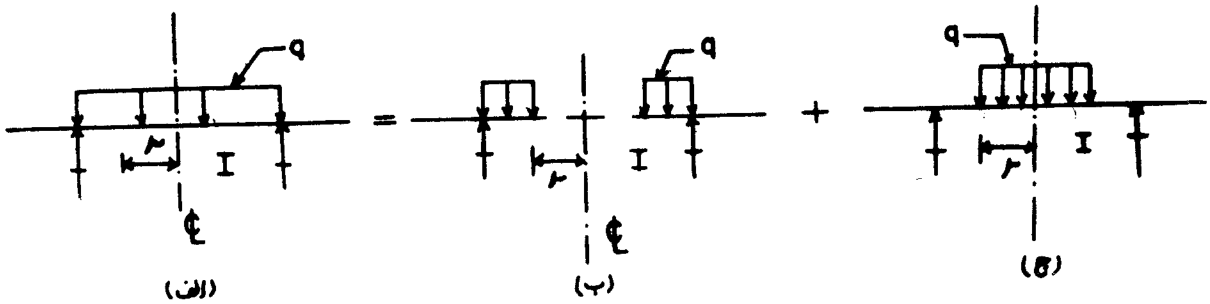
که از آن عبارتهای زیر نتیجه میشود :

$$Mr_{II}=\frac{-qa^2(1-\nu)}{16}\left(\frac{a^2}{r^2}-\frac{1}{\beta^2}\right) \tag{۱۸}$$

$$Mt_{II}=-\frac{qa^2(1-\nu)}{16}\left(-\frac{a^2}{r^2}-\frac{1}{\beta^2}\right) \tag{۱۹}$$

$$W_{II}=\frac{-qa^4}{32D}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{r^2}{a^2}-1\right)+2\ln\frac{r}{a}\right] \tag{۱۰}$$

برای محاسبه Mr_I ، Mt_I و W_I میتوان حالت بارگزاری (الف) شکل (۶) را بقاعدهٔ اجتماع اثر قوا



شکل (۶)

بدو حالت (ب) و (ج) همین شکل تجزیه کرد. دراینصورت Mr_I ، Mt_I و W_I هریک از دو انتگرال ترکیب میگردد که بشرح زیر است :

$$Mr_{I}=\int_{r}^{a}(\text{معادلهٔ (۳) با } qdc=p)+\int_{0}^{r}(\text{معادلهٔ (۴) با } qdc=p)$$

$$Mt_{I}=\int_{r}^{a}(\text{معادلهٔ (۳) با } qdc=p)+\int_{0}^{r}(\text{معادلهٔ (۵) با } qdc=p)$$

$$W_{I}=\int_{r}^{a}(\text{معادلهٔ (۸) با } qdc=p)+\int_{0}^{r}(\text{معادلهٔ (۹) با } qdc=p)$$

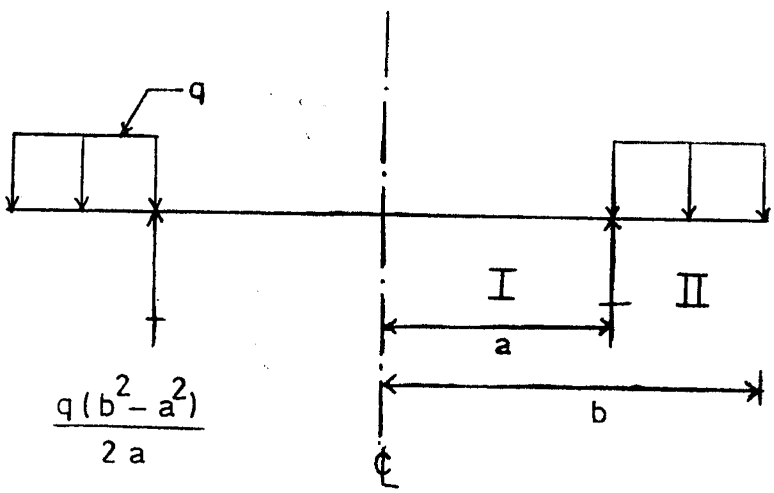
پس از اجرای انتگراسیون وساده کردن نتیجه که شرح آن مطول وصفحات زیادی از مجله را اشغال خواهد کرد عبارت‌های زیر نتیجه میگردد :

(۲۱) $$Mr_{I}=\frac{qa^{2}}{16}\left[\frac{1-\nu}{\beta^{2}}+2(1+\nu)-(3+\nu)\frac{r^{2}}{a^{2}}\right]$$

(۲۲) $$Mt_{I}=\frac{qa^{2}}{16}\left[\frac{1-\nu}{\beta^{2}}+2(1+\nu)-(1+3\nu)\frac{r^{2}}{a^{2}}\right]$$

(۲۳) $$W_{I}=\frac{qa^{4}}{64D}\left[\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{2}{\beta^{2}}+4\right)\left(1-\frac{r^{2}}{a^{2}}\right)-\left(1-\frac{r^{4}}{a^{4}}\right)\right]$$

فرمولهای (۲۱) ، (۲۲) و (۲۳) که بدینطریق بدست آمده است با فرمولهای مستخرج از کار Kalmanok روسی که محتملاً بطریقهٔ مستقیم آنها را بدست آورده است (زیرا طرز حل مشارالیه دراختیار اینجانب نیست



شکل (۷)

که اظهار نظر شود) مطابقت‌دارد، اگرچه‌شکل ظاهری آنها که در صفحهٔ ۵۷۶ مرجع ششم این مقاله بدون طرز اثبات ذکر شده است باشکل این معادله ها یکسان نمیباشد.

حال شکل(۷) را مورد توجه قرار میدهیم که برقسمت خارجی صفحهٔ طره‌ای بار همواری بشدت q در واحد سطح اثر میکند.

دراین حالت باز دو ناحیهٔ متمایز برای صفحه تشخیص میشود:

ناحیهٔ I : $\circ < r < a$

برای تعیین Mr_I ، Mt_I و W_I بایستی در معادله های(۱۶ و ۱۷) مقالهٔ اینجانب منتشر شده در شمارهٔ هشتم دورهٔ دوم نشریهٔ دانشکده فنی که در صفحات ۱۰۱ و ۱۰۲ همین شماره قید شده بجای $qdc = p$ قرار داده و آنرا میان a و b انتگره کرد:

$$Mr_I = Mt_I = \int_a^b \frac{qc}{\text{٤}}\Big[(\text{١} - v)\Big(\frac{\text{١}}{\beta^{\text{٢}}} - \frac{c^{\text{٢}}}{b^{\text{٢}}}\Big) - \text{٢}(\text{١} + v)\ln c/a \Big] dc$$

$$W_I = \int_a^b \frac{qc}{\text{٨}D}\Big[\frac{\text{١} - v}{\text{١} + v}\Big(\frac{\text{١}}{\beta^{\text{٢}}} - \frac{c^{\text{٢}}}{b^{\text{٢}}}\Big) - \text{٢}\ln c/a \Big](a^{\text{٢}} - r^{\text{٢}}) dc$$

پس‌از اجرای‌انتگراسیون و ساده کردن نتیجه عبارت‌های زیر حاصل میگردد:

$$Mr_I = Mt_I = -\frac{qa^{\text{٢}}}{\text{١٦}}\Big[\frac{\text{١} - v}{\beta^{\text{٢}}} + \text{٤}(\text{١} + v)\beta^{\text{٢}}\ln\beta - \beta^{\text{٢}}(\text{١} + \text{٣}v) + \text{٤}v\Big] \qquad (\text{٢٤})$$

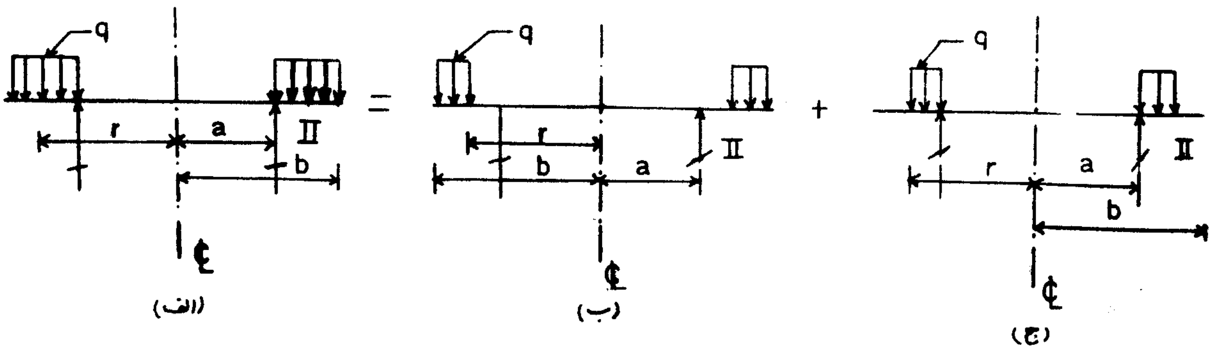
$$W_I = -\frac{qa^{\text{٤}}}{\text{٣٢}D(\text{١} + v)}\Big[\frac{\text{١} - v}{\beta^{\text{٢}}} + \text{٤}(\text{١} + v)\beta^{\text{٢}}\ln\beta - \beta^{\text{٢}}(\text{١} + \text{٣}v) + \text{٤}v\Big]\Big(\text{١} - \frac{r^{\text{٢}}}{a^{\text{٢}}}\Big) \qquad (\text{٢٥})$$

ناحیهٔ II : $a < r < b$

برای محاسبهٔ Mr_{II} ، Mt_{II} و W_{II} مانند حالت قبل میتوان حالت بارگزاری شکل (۸ ـ الف) را بقاعدهٔ اجتماع اثر قوا بدو حالت شکلهای (۸ـب و ج) تجزیه کرد. بدین ترتیب این مقادیر هریک از حاصلجمع دو انتگرال بشرح زیر بدست میآید:

$$Mr_{II} = \int_r^b \frac{qc}{\text{٤}}\Big[(\text{١} - v)\Big(\frac{\text{١}}{\beta^{\text{٢}}} - \frac{c^{\text{٢}}}{b^{\text{٢}}} - \frac{a^{\text{٢}}}{r^{\text{٢}}} + \text{١}\Big) - \text{٢}(\text{١} + v)\ln c/r\Big] dc +$$

$$\int_a^r \frac{qc}{\text{٤}}(\text{١} - v)\Big(\frac{\text{١}}{\beta^{\text{٢}}} - \frac{c^{\text{٢}}}{b^{\text{٢}}} - \frac{a^{\text{٢}}}{r^{\text{٢}}} + \frac{c^{\text{٢}}}{r^{\text{٢}}}\Big) dc$$



شکل (۸)

که عبارت‌های زیر انتگرال اول و دوم بترتیب معادله‌های (۱۷ الف) و (۱۸ الف) مقالهٔ قبلی اینجانب است که فوقاً بدان اشاره شد و دراین عبارات بجای p باز qdc قرار داده شده است.

هم‌چنین Mt_{II} را میتوان از مجموع دو انتگرال بشرح زیر بدست آورد :

$$Mt_{II}=\int_r^b \frac{qc}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{r^2}-1\right)-2(1+\nu)\ln c/r\right]dc+$$

$$\int_a^r \frac{qc}{4}(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{r^2}-\frac{c^2}{r^2}\right)dc$$

که عبارت‌های زیر انتگرال‌های فوق بترتیب معادله‌های (۱۷ ب) و (۱۸ ب) مقالهٔ قبلی اینجانب بشرح بالا میباشد.

عبارت‌های نهائی Mr_{II} و Mt_{II} چنین خواهد بود :

$$Mr_{II}=-\frac{qa^2}{16}\left[\frac{1-\nu}{\beta^2}+(3+\nu)\frac{r^2}{a^2}-(3+\nu)\beta^2+(1-\nu)(2\beta^2-1)\frac{a^2}{r^2}-2(1-\nu)-4(1+\nu)\beta^2\ln r/a+4(1+\nu)\beta^2\ln\beta\right] \tag{۲۶}$$

$$Mt_{II}=-\frac{qa^2}{16}\left[\frac{1-\nu}{\beta^2}+(1+3\nu)\frac{r^2}{a^2}+(1-5\nu)\beta^2-(1-\nu)(2\beta^2-1)\frac{a^2}{r^2}-2(1-\nu)-4(1+\nu)\beta^2\ln r/a+4(1+\nu)\beta^2\ln\beta\right] \tag{۲۷}$$

هم‌چنین W_{II} از دو انتگرال زیر تشکیل شده است :

$$W_{II}=\int_{r}^{b}\frac{qc}{8D}\left\{\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)-2-2\ln c/r\right](a^2-r^2)-2r^2\ln r/a-2a^2\ln r/a\right\}dc$$

$$+\int_{a}^{r}\frac{qc}{8D}\left\{\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)(a^2-r^2)+2(c^2-a^2)(1+\ln r/a)-2(c^2+a^2)\ln c/a\right\}dc$$

که عبارت‌های زیر این انتگرالها بترتیب از معادله‌های (۲۰) و (۲۱) مقالهٔ قبلی اینجانب با رعایت $qdc=p$ نتیجه شده است.

پس‌از اجرای انتگراسیون‌ها، نتیجه نهائی به عبارت زیر خواهد بود:

$$(28)\quad W_{II}=-\frac{qa^4}{64D(1+\nu)}\left\{\left[\frac{2(1-\nu)(1-2\beta^2)}{\beta^2}+2(3+\nu)\beta^2+8(1+\nu)\beta^2\ln\beta\right]\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)+\left(1-\frac{r^4}{a^4}\right)(1+\nu)+4(1+\nu)(2\beta^2-1)\ln r/a+8(1+\nu)\beta^2\frac{r^2}{a^2}\ln r/a\right\}$$

تبصره ـ معادله‌های (۲۴)، (۲۵)، (۲۶) و (۲۸) باعبارات قید شده در صفحهٔ ۵۷۰ مرجع‌ششم این مقاله مطابقت دارد ولی در عبارت $M\theta_{II}$ فرمولر مذکور در فوق که همان Mt_{II} مقالهٔ اینجانب است علامت جلوی جملهٔ $\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)(1-2\beta^2)(1-\nu)$ مثبت قید شده که باید منفی باشد تا با معادلهٔ (۲۷) یکسان گردد و با بررسی، این اشتباه را از جدول‌شماره ۴۷ صفحهٔ ۵۹۱ همین مرجع نیز میتوان استنباط کرد.

درصورتیکه بارگزاری جزئی تمام ناحیهٔ I یا II را شامل نباشد بااستفاده از روش فوق‌الذکرو رعایت حدود انتگرالها که با توجه بمنطقهٔ بارگزاری باید تعیین گردد لنگرهای خمشی و خیز را میتوان محاسبه کرد.

۲-۶ـ حال صفحه طره‌ایرا درنظر میگیریم که در محیط دایرهٔ بشعاع $c=r$ تحت‌تأثیر لنگرشعاعی ثابتی بکمیت M_o در واحد طول باشد.

اگر $a<c<b$ باشد مسئله مانند حالت (۵-۲-۱) خواهد بود که دراینجا منظور حل این‌مسئله بااستفاده‌ازروش‌وتکنیکی‌است که درمقالهٔ‌اینجانب‌چاپ‌شده درشمارهٔ‌هشتم دورهٔدوم نشریهٔ‌دانشکدهٔ فنی‌توضیح گردیده است.

فرض میکنیم که صفحهٔ طره‌ای تحت‌تأثیر دو بار خطی هموار باشد:

- یکی بشدت p و با جهت از فوق به تحت در طول محیط دایرهٔ بشعاع c که برحسب Kg/m بیان گردد،

ـ دیگری بشدت p_1 و با جهت از تحت بفوق درطول محیط دایرهٔ بشعاع d بطوریکه $d<c$ و

$p_1 = p\frac{c}{d}$ باشد.

دراینصورت بار درطول قوسی از دو دایره بشعاع c و d که زاویهٔ مرکزی آنها $d\theta$ باشد بترتیب

برابر با :

$$dF_1 = cd\theta p$$

$$dF_2 = dd\theta p_1 = \frac{pcd}{d}(d\theta) = pcd\theta$$

است یعنی :

$$dF_2 = dF_1$$

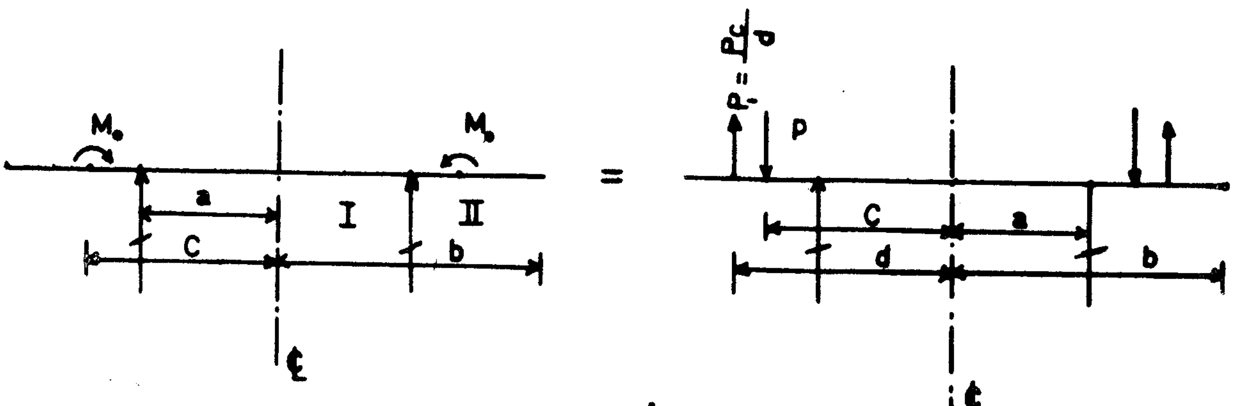
خواهد بود.

حال اگر d به c نزدیک گردد بطوریکه :

$$\text{حد}(d-c)p = M_0$$

باشد،دراینصورت حالت بارگزاری (٥-٢-١) را میتوان مستقیماً باستفاده از اصل اجتماع اثر بارهای p و p_1

که جوابهای آنها قبلاً بدست آمده است ، نتیجه گرفت.



(الف) شکل (۹) (ب)

برای محاسبهٔ Mr_I و Mt_I با توجه بمعادلهٔ (۱۶) مقالهٔ سابق اینجانب داریم :

$$Mr_I = Mt_I = -\frac{p_1 d}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{d^2}{b^2}\right)-2(1+\nu)\ln d/a\right]$$

$$+p\frac{c}{4}\left[(1-\nu)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}-2(1+\nu)\ln c/a\right]\right.$$

چون :

$$p_1=pc/d$$

است لذا :

$$Mr_I=Mt_I$$

را میتوان چنین نوشت:

$$Mr_I=Mt_I=\frac{p(d-c)}{4}\left[(1-v)\ \frac{c}{b^2}\cdot\frac{d^2-c^2}{d-c}+2(1+v)\frac{c}{d-c}\ \ln\ d/c\right]$$

وقتیکه d به سمت c میل کند :

$$\text{حد}\ p(d-c)=M_0$$

و اگر d/c را برابر X بگیریم در حد نسبت زیر برابر واحد خواهد بود :

$$\text{حد}\ \frac{c\ln d/c}{d-c}=\text{حد}\ \frac{1}{d/c-1}\ln d/c=\text{حد}\left(\frac{\ln X}{X-1}\right)_{X\to 1}=\left(\frac{\frac{1}{X}}{1}\right)_{X\to 1}=1$$

و بقاعدهٔ l'Hôpital این حد برابر مشتق صورت برمشتق مخرج برحسب X ، یعنی واحد خواهد بود . پس داریم :

$$Mr_I=Mt_I=\frac{M_0}{4}\left[(1-v)\ \frac{2c^2}{b^2}-2(1+v)\ \right]=\frac{M_0}{2}\left[(1-v)\ \frac{c^2}{b^2}+(1+v)\right]$$

و این همان معادلهٔ ($_{11}$) است که در بند (۵-۲-۱) بدست آوردیم .

حال نشان خواهیم داد که معادلهٔ ($_{17}$ الف) مقالهٔ قبلی اینجانب بشرح زیر منجر بعبارت بالا خواهد شد :

$$Mr_2(\text{ناشی از}\ p)+Mr_2(\text{ناشی از}\ p_1)=\frac{pc}{4}\left[(1-v)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}-\frac{a^2}{r^2}+1\right)-2(1+v)\ln c/r\right]$$

$$-\frac{pcd}{4d}\left[(1-v)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{d^2}{b^2}-\frac{a^2}{r^2}+1\right)-2(1+v)\ln d/r\right]$$

$$»\quad+\quad»\quad=\frac{pc}{4}\left[(1-v)\,\frac{d^2-c^2}{b^2}+2(1+v)(\ln d-\ln r-\ln c+\ln r)\right]$$

$$=\frac{pc}{4}\left[(1-v)\,\frac{d^2-c^2}{b^2}+2(1+v)\ln d/c\right]$$

اگر این حاصل را در $(d-c)$ ضرب و برآن تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$»\quad+\quad»\quad=\frac{p(d-c)}{4}\left[(1-v)\,\frac{c}{b^2}\,(d+c)+2(1+v)\frac{\ln d/c}{d/c-1}\right]$$

که عیناً عبارت بالائی است و مآلاً حدهردو یکی خواهد بود. از این بحث این نتیجه حاصل میشود که عبارت Mr و Mt در ناحیهٔ $\circ<r<a$ و $a<r<c$ درحالت حد بیک صورت بیان میشود یعنی ایندو منطقه تعلق بیک ناحیه دارد و این همان نتیجه‌ایست که قبلاً بدست آورده بودیم.

اکنون این موضوع را برای $W_۲$ نیز بررسی میکنیم وبدین منظور نخست حد $W_۱$ را که همان W_I است بدست میآوریم. بااستفاده از معادله (۹ ۱) مقالهٔ سابق اینجانب داریم:

$$W_I=W_۱(p\ \text{ناشی از})+W_۱(p_۱\ \text{ناشی از})=\frac{pc}{۸D}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\left(\frac{۱}{\beta^۲}-\frac{c^۲}{b^۲}\right)-۲\ln\ c/a\right](a^۲-r^۲)$$

$$-\frac{pcd}{۸Dd}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\left(\frac{۱}{\beta^۲}-\frac{d^۲}{b^۲}\right)-۲\ln\ d/a\right](a^۲-r^۲)$$

$$\text{»}\qquad+\qquad\text{»}\qquad=\frac{pc}{۸D}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\cdot\frac{۱}{b^۲}\,(d^۲-c^۲)+۲\ln d/c\right](a^۲-r^۲)$$

اگر این عبارت را در $(d-c)$ ضرب و برآن تقسیم کنیم حد جملهٔ داخل ابروها مانند عبارت قبل خواهد بود یعنی:

$$W_I=\frac{M_\circ}{۸D}\left(\frac{۱-v}{۱+v}\cdot\frac{۲c^۲}{b^۲}+۲\right)(a^۲-r^۲)$$

پس عبارت W_I بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$W_I=\frac{M_\circ a^۲}{۴D}\left(\frac{۱-v}{۱+v}\cdot\frac{c^۲}{b^۲}+۱\right)\left(۱-\frac{r^۲}{a^۲}\right)$$

این عبارت همان رابطهٔ (۴ ۱) است که قبلاً محاسبه کرده بودیم.

بازمیتوان نشان داد که حد $W_۲$ ناشی از بارهای p و $p_۱$ بعبارت W_I بالا منجر میگردد زیرا با توجه بمعادلهٔ (۰ ۲) مقالهٔ قبلی اینجانب:

$$W_۲(p\ \text{ناشی از بار})+W_۲'(p_۱\ \text{ناشی از بار})=\frac{pc}{۸D}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\left(\frac{۱}{\beta^۲}-\frac{c^۲}{b^۲}\right)-۲-۲\ln\ c/a\right](a^۲-r^۲)$$

$$+۲r^۲\ln a/r+۲a^۲\ln a/r-\frac{pcd}{۸D}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\left(\frac{۱}{\beta^۲}-\frac{d^۲}{b^۲}\right)-۲-۲\ln b/a\right](a^۲-r^۲)$$

$$+۲r^۲\ln a/r+۲a^۲\ln a/r=\frac{pc}{۸D}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\cdot\frac{۱}{b^۲}(d^۲-c^۲)+۲\ln d/c\right](a^۲-r^۲)$$

پس حد این عبارت مانند W_I خواهد بود.

حال بااستفاده ازمعادلهٔ (۱ ۲) مقالهٔ سابق اینجانب میتوان W_{II} را بدست آورد:

$$W_{II}=\frac{pc}{8D}\left\{\frac{1-v}{1+v}\cdot\frac{d^2-c^2}{b^2}(a^2-r^2)-2(d^2-c^2)(1+\ln r/a)\right.$$
$$\left.-2(d^2+a^2)\ln a/d+2(c^2+d^2)\ln a/c\right\}$$

با ضرب این عبارت در $(d-c)$ و تقسیم برآن داریم :

$$W_{II}=\frac{p(d-c)}{8D}\left\{\frac{1-v}{1+v}\cdot\frac{c}{b^2}(d+c)(a^2-r^2)-2c(d+c)(1+\ln r/a)\right.$$
$$\left.+\frac{2c}{d-c}(d^2+a^2)\ln d/a+\frac{2c(c^2+a^2)}{d-c}\ln a/c\right\}$$

$$W_{II}=\frac{p(d-c)}{8D}\left\{\frac{1-v}{1+v}\cdot\frac{c(d+c)}{b^2}(a^2-r^2)-2c(d+c)(1+\ln r/a)\right.$$
$$\left.-\frac{2c}{d-c}(d^2+a^2)\ln a+\frac{2c}{d-c}(c^2+a^2)\ln a-\frac{2c}{d-c}(c^2+a^2)\ln c\right\}$$

$$W_{II}=\frac{p(d-c)}{8D}\left\{\cdots-\cdots+\frac{2c}{d-c}(d^2+a^2)\ln d-\frac{2c}{d-c}(d^2-c^2)\ln a\right.$$
$$\left.-\frac{2c}{d-c}(c^2+a^2)\ln c\right\}$$

$$W_{II}=\frac{p(d-c)}{8D}\left\{\cdots-\cdots+\frac{2cd^2\ln d-2c^3\ln c}{d-c}-2c(d+c)\ln a\right.$$
$$\left.+\frac{2ca^2}{d-c}(\ln d-\ln c)\right\}$$

$$\text{حد}\; p(d-c)_{d\to c}=M_0\;,\quad \text{حد}\; c(d+c)_{d\to c}=2c^2\;,\quad \text{حد}\; \frac{c(\ln d/c)}{d-c}_{d\to c}=1$$

پس :

$$W_{II}=\frac{M_0}{8D}\left\{\frac{1-v}{1+v}\cdot\frac{2c^2}{b^2}(a^2-r^2)-4c^2(1+\ln r/a)-4c^2\ln a+2a^2\right.$$
$$\left.+\frac{2cd^2\ln d-2c^3\ln c}{d-c}\right\}$$

حال باید حد جملهٔ آخری را پیدا کرد :

$$A=\frac{2cd^2\ln d-2c^3\ln c}{dc}=2\frac{d^2\ln d-c^2\ln c}{d/c-1}=2c^2\frac{d^2/c^2\ln d-\ln c}{d/c-1}$$
$$=2c^2\frac{d^2/c^2\ln d-d^2/c^2\ln c+d^2/c^2\ln c-\ln c}{d/c-1}=2c^2\frac{d^2/c^2\,\mathrm{ind}/c}{d/c-1}+2c^2\ln c\frac{d^2/c^2-1}{d/c-1}$$
$$=2c^2\left[\frac{d^2/c^2\ln d/c}{d/c-1}+\left(\frac{d}{c}+1\right)\ln c\right]_{d\to c}$$

باستفاده از قاعدهٔ l'Hôpital داریم :

$$\text{حد}\ \frac{d^2/c^2 \ln d/c}{d/c-1}_{d\to c} = \left(\frac{2d/c \ln d/c + d^2/c^2 \times \frac{1}{d/c}}{1}\right)_{d\to c} = \frac{2\ln 1 + 1}{1} = 1$$

پس حد جملهٔ A برابر با $2c^2(1+2\ln c)$ و W_{II} بشرح زیر خواهد بود :

$$W_{II}=\frac{M_\circ a^2}{4}\left[\frac{1-v}{1+v}\cdot\frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)-2\frac{c^2}{a^2}-\frac{2c^2}{a^2}\ln r/a-\frac{2c^2}{a^2}\ln a+1+\frac{c^2}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2c^2}{a^2}\ln c\right]$$

یا :

$$W_{II}=\frac{M_\circ a^2}{4D}\left[\frac{1-v}{1+v}\cdot\frac{c^2}{a^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)-\frac{c^2}{a^2}-2\frac{c^2}{a^2}\ln r/c+1\right]$$

و این همان معادلهٔ (۱۰) است که قبلاً محاسبه شده بود.

اکنون باستفاده از معادلهٔ (۸ الف) مقالهٔ پیشین اینجانب ، Mr_{II} بشرح زیر بدست میآید :

$$Mr_{II}=\frac{pc}{4}(1-v)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}-\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)-\frac{pcd}{4d}(1-v)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{d^2}{b^2}-\frac{a^2-d^2}{r^2}\right)$$
$$=\frac{pc(1-v)}{4}\left(\frac{d^2-c^2}{b^2}-\frac{d^2-c^2}{r^2}\right)=\frac{pc(1-v)}{4}(d^2-c^2)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)$$
$$=\frac{p(d-c)(1-v)}{4b^2}(d+c)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)$$
$$Mr_{II}=\frac{M_\circ(1-v)}{2}\frac{c^2}{b^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)$$

این عبارت همان رابطهٔ (۱۲) قبلی است.

بروش مشابهی با استفاده از معادلهٔ (۸ ب) مقالهٔ سابق اینجانب ، Mt_{II} بدست خواهد آمد :

$$Mt_{II}=\frac{pc}{4}(1-v)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2-c^2}{r^2}\right)$$
$$-\frac{pcd}{4d}(1-v)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{d^2}{b^2}+\frac{a^2-d^2}{r^2}\right)$$
$$=\frac{p(d-c)}{4}(1-v)c(d+c)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r^2}\right)$$
$$Mt_{II}=\frac{M_\circ(1-v)}{2}\frac{c^2}{b^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)$$

این عبارت نیز همان رابطهٔ (۱۳) میباشد.

با طرز کار مشابهی میتوان حالت (۵-۲-۲) را از حالت (۵-۱) نتیجه گرفت و نگارنده این نتیجه‌را بدست آورده است‌ولی برای احتراز از اطناب کلام وتکرارازذکر آن خودداری میشود ولی مشتاقان درصورت تمایل میتوانند برای اطلاع از محاسبات باینجانب مراجعه فرمایند.

۶-۲-۱-حالت خاص - وقتیکه $b=c$ باشد دراینصورت قسمت داخل و خارج صفحه کلاً یک ناحیه را تشکیل میدهد و شکل عبارات Mr_I ، Mr_{II} و Mt_I ، Mt_{II} یکی خواهد بود و از معادلهٔ (۱۱) این مقاله داریم:

$$Mr=Mt=Mr_I=Mt_I=\frac{M_\circ}{۲}\ (۱-v+۱+v)=M_\circ\ ,\ O.K.$$

بمعادلهٔ (۹) مقالهٔ سابق اینجانب رجوع شود.

و از معادلهٔ (۱۴) این مقاله داریم:

$$W=\frac{M_\circ a^۲}{۴D}\left(۱+\frac{۱-v}{۱+v}\right)\left(۱-\frac{r^۲}{a^۲}\right)\quad ,\quad \circ\leqslant r\leqslant b$$

یا:

$$W=\frac{M_\circ a^۲}{۲D(۱+v)}\left(۱-\frac{r^۲}{a^۲}\right)$$

این عبارت همان رابطهٔ (۱۱ الف) مقالهٔ قبلی اینجانب است.

برای محاسبهٔ خیز درلبهٔ صفحه باید در عبارت بالا بجای r $b=r$ قرار داد که از آن عبارت زیر بدست میآید:

$$(W)_{r=b}=\frac{M_\circ a^۲}{۲(۱+v)}\ (۱-\beta^۲)$$

همچنین از رابطهٔ (۱۵) این مقاله با رعایت $c=b=r$ خواهیم داشت:

$$W(b)=\frac{M_\circ a^۲}{۲D}\left[\frac{۱-v}{۱+v}\ (۱-\beta^۲)-۲\beta^۲\ln(۱)+۱-\beta^۲\right]=\frac{M_\circ a^۲}{۲D(۱+v)}\ (۱-\beta^۲)\ \ ,\ O.K.$$

۶-۲-۲- اگر $a=c$ باشد از معادله‌های (۱۱-۱۵) و نیز (۱۶ و ۱۷) نتایج زیر بدست میآید:

$$Mr_I=Mt_I=\frac{M_\circ}{۲}\left[\ (۱-v)\ \frac{۱}{\beta^۲}+(۱+v)\right]\qquad (۲۹)$$

$$W_I=\frac{M_\circ a^۲}{۴D}\left(\frac{۱-v}{۱+v}\cdot\frac{۱}{\beta^۲}+۱\right)\left(۱-\frac{r^۲}{a^۲}\right)\qquad (۳۰)$$

$$(۳۱)\qquad Mr_{II}=\frac{M_{\circ}}{۲}(۱-\nu)\frac{۱}{\beta^{۲}}\left(۱-\frac{b^{۲}}{r^{۲}}\right)\quad,\quad a<r\leqslant b$$

$$(۳۲)\qquad Mt_{II}=\frac{M_{\circ}}{۲}(۱-\nu)\frac{۱}{\beta^{۲}}\left(۱+\frac{b^{۲}}{r^{۲}}\right)\quad,\quad a<r\leqslant b$$

$$(۳۳)\qquad W_{II}=\frac{M_{\circ}a^{۲}}{۴D}\left[\frac{۱-\nu}{۱+\nu}\cdot\frac{۱}{\beta^{۲}}\left(۱-\frac{r^{۲}}{a^{۲}}\right)-۲\ln r/a\right]\quad,\quad a\leqslant r\leqslant b$$

اگر پیوستگی میان صفحهٔ طره‌ای و تکیه گاه آن وجود داشته باشد و برصفحه بار جانبی اثرکند درآنصورت مسئله را میتوان بدو حالت تجزیه کرد یکی وقتیکه میان صفحه طره‌ای و تکیه گاه آن پیوستگی وجود نداشته و فقط بار خارجی اثرکند دیگر حالتی که بار خارجی وجود نداشته و فقط اثر پیوستگی که عموماً لنگریست در محاذات تکیه گاه مؤثر باشد و آنگاه از شرایط حدی و پیوستگی و رعایت اجتماع اثر قوا حل نهائی‌مسئله را بدست آورد. بشرط آنکه تکیه گاه استوانه‌ای معروض بکمانه نباشد ولی اگر تکیه گاه صفحه استوانهٔ پوسته‌ای نازك و معروض بکمانه باشد درآنصورت بدست آوردن حل دقیق مسئله متعذر خواهد بود زیرا هنوز موضوع کمانه در پوسته ها مورد مطالعه میباشد.

۶-۳- ممکن است لبهٔ صفحهٔ طره‌ای بجای آنکه آزاد باشد برتکیه گاه ساده‌ای متکی بوده یا آنکه گیردار باشد، دراینصورت هرحالت‌را میتوان بدو صفحهٔ‌طره‌ای‌تجزیه کرد که‌لبهٔ‌آن آزاد بوده و بریکی‌فقط‌نیروی واکنش یانیروی واکنش باضافه‌لنگرگیرداری مؤثر باشد. چون‌حل‌این‌قبیل‌صفحات‌طره‌ای‌داده‌شده است‌باتوجه بآنکه تغییرمکان در $r=b$ و یا تغییرمکان و دوران در لبه باید صفر باشد میتوان نیروی واکنش یانیروی واکنش و لنگرگیرداری در محیط خارجی صفحه‌را محاسبه کرد و آنگاه با یافتن این مجهولات‌بقاعدهٔ اجتماع اثر قوا خیز و تنش ها را بدست آورد.

فهرست مراجع

۱- مقالات اینجانب منتشر شده درشماره‌های دوم تاهشتم دورهٔ دوم نشریهٔ دانشکده فنی دانشگاه تهران مورخ اردیبهشت ۱۳۴۴ تا مهرماه ۱۳۴۶ .

2 – Sergev , S. , and Kashani—Sabet , M . H. « Strength and Deflection of Circular Uniformly Loaded Slab Supported Between Center and Periphery» . U.S.A. : Journal of the American Concrete Institute, Proceedings V. 60, No. 2 , Feb. 1964.

3 — Prof. Sergev , S. et Dr. Kashani — Sabet , M.H. «Contraintes et Deflexions dans les dalles Circulaires , Chargées Uniformément et Appuyeés entre le Centre etla Périphérie , » Paris : Revue de Béton Armé No. 66 Avril — Mai 1966 , Société des Editions André Guerrin.

4 — Timoshenko , S. , and Woinowsky — Krieger , S. « Theory of Plates and Shells , » Newyork : Mc Graw — Hill 1959.

5 — Kalmanok , A.S. «Design of Plates , » Moscou , 1959.

6 — Grekow , A. , Isnard , V. , et Mrozowicz , P. « Formulaire del'Ingénieur, Méthodes Pratiques de Calcul d' Ouvrages de Génie Civil , » Paris : Editions Eyrolles , 61 Boulevard Saint — Germain. 1964.

7 — Timoshenko , S . « Strength of Materials , » . D . Van Notrand Co . , Inc . Princeton , New Jersey, 3rd Edition, 1956.