تقریب خطی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی
و مسئله پایداری (۱)

نوشتهٔ :

دکتر نصرالله تابنده

استادیار دانشکده فنی

چکیده :

در این مقاله بعنوان مثال معادلهٔ دیفرانسیل گسترش جمعیت تحت مطالعه و نقاط استثنائی(نقاط حل) این معادله از نقطه نظر پایداری و ناپایداری مورد بحث قرار گرفته‌اند. طی این مثال ومثالی دیگر نشان داده شده که همیشه خطی کردن معادلات دیفرانسیل غیرخطی نتیجهٔ مطلوب را نخواهند داد. بالاخره در قسمت آخر تعریفات ریاضی پایداری از نقطهٔ نظر لاپلاس لیاپولف و پوانکاره و شرط کافی برای اینکه بتوان معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی را با معادلهٔ دیفرانسیل خطی تقریب گرفت داده شده‌اند.

مقدمه

گرچه پیدا کردن حل معادلات دیفرانسیل خطی مسئله‌ای است که در مورد آن بحث فراوان شده و درواقع مسئله‌ای حل شده است ولی مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل غیرخطی مشکل و در بسیاری از حالات پیدا کردن حل آن غیرممکن است. بنابراین دراین نوع مسائل پیدا کردن اطلاعات کیفی حائز اهمیت زیاد میباشد. ازمطالبی که دراین بحث مورد مطالعهٔ ما قرار میگیرند یکی پایداری حل این نوع معادلات است. مثلاً در تئوری کنترل اتوماتیک مسئله‌ای پیش میآید که آیا اثر تغییر جزئی درشرایط اولیه (تغذیه[۱]) دستگاه دربازده (خروجی[۲]) آن تغییر جزئی (حالت پایدار[۳]) ویا تغییر کلی(حالت ناپایدار[۴]) خواهد بود. مطلبی دیگر که دراین مطالعه پیش میآید مسئلهٔ تقریب گرفتن معادلات غیرخطی است. مثلاً وقتی معادلهٔ غیر خطی حرکت پاندول ساده:

---

۱ — Input ۲ — Output ۳ — Stable ۴ — Unstable

معین ε و بازاء مقادیر کوچک y از $o=f(o)$ بطور سریع تا نقطهٔ ماکزیمم خود ترقی کرده و از آن به بعد درنزدیکی منحنی $\varepsilon=o$ قوس نزولی خود را طی می‌کند. این مسئله نشان میدهد که برای مقادیر کوچک ε حل کامل معادلهٔ (۱) یعنی تابع (۳) فقط برای مقادیر کوچک y حائز اهمیت است.

درمکانیک سیالات فرض میشود که شرط مرزی حرکت سیال غیرلزج این است که مؤلفه سرعت عمود بردیوارهٔ ثابت بایستی برابر صفر باشد ولی درمورد مایع لزج علاوه براین شرط بایستی لغزش سیال نسبت به این دیواره (یعنی سرعت مماسی آن در امتداد این دیواره) برابر صفرباشد.

در مقایسه مثال اخیر با این دو حالت حرکت سیال نتیجه گرفته میشود که حرکت سیال لزج مانند تابع (۳) و حرکت سیال غیرلزج مطابق حل معادلهٔ (٤) یعنی تابع (٥) است. نتیجه‌ای که میتوان گرفت این است که برای اعداد رینولدز بزرگ اثر لزجت فقط درنزدیکی دیوارهٔ ثابت دارای اهمیت است که به‌نام لایهٔ مرزی (۱) نامیده میشود. جریان سیال خارج ازاین لایه را میتوان مانند جریان غیرلزج گرفت.

مثال دیگری که در نظر میگیریم معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به گسترش جمعیت بصورت زیراست:

$$\frac{dA}{dt}=\varepsilon A-\sigma A^{2} \qquad (٦)$$

$$A(o)=A_{o} \qquad (۷)$$

در این رابطه σ و ε اعداد ثابت و مثبت میباشند. گرچه مقادیر منفی برای A_o از نظر ریاضی ممکن‌است ولی از نظر مسئلهٔ فیزیکی A_o بایستی‌مثبت باشد. مثال فیزیکی دیگری که دارای معادلهٔ دیفرانسیل (٦) است مطالعهٔ حالت تبدیل جریان از وضع آرام (۲) به‌وضع مغشوش (۳) است که دراین مورد معادلهٔ فوق معادلهٔ لندو (٤) نامیده میشود. درصورتیکه از جملهٔ σA^2 صرفنظرشود جواب‌معادلهٔ‌دیفرانسیل (٦) باشرط اولیهٔ (۷) عبارتست از $A=A_o e^{\varepsilon t}$ که درآن A بطور اکسپونانسیل ترقی می‌کند ولی درصورتیکه‌جملهٔ غیرخطی نگهداشته شود وضعیت کاملاً متفاوتی بدست خواهد آمد.

دو تابع:

$$A=\frac{\varepsilon}{\sigma}\equiv\varphi_2(t) \quad \text{و} \quad A=\varphi_1(t)\equiv o$$

---

۱ — Boundary Layer   ۲ — Laminar Flow   ۳ — Turbulent Flow

٤ — لندو Landau فیزیک‌دان مشهور روسی که برندهٔ جایزهٔ نوبل درفیزیک درسال ۱۹٦۲ شد.

حل های معادلهٔ دیفرانسیل (۶) میباشند. حال اگر فرض $A_0 \neq o$ و $A_0 \neq \frac{\varepsilon}{\sigma}$ این دو تابع حل معادله باشرایط اولیهٔ داده شده نخواهندبود و دراین صورت میتوان نوشت :

$$\frac{dA}{A(\varepsilon+\sigma A)}=dt$$

ویا :

$$\left[\frac{1}{A}+\frac{\sigma}{\varepsilon-\sigma A}\right]dA=\varepsilon dt$$

و در نتیجهٔ انتگرال گیری خواهیم داشت :

$$log\ |\ A\ |\ -log\ |\ \varepsilon-\sigma A\ |\ =\varepsilon t+K$$

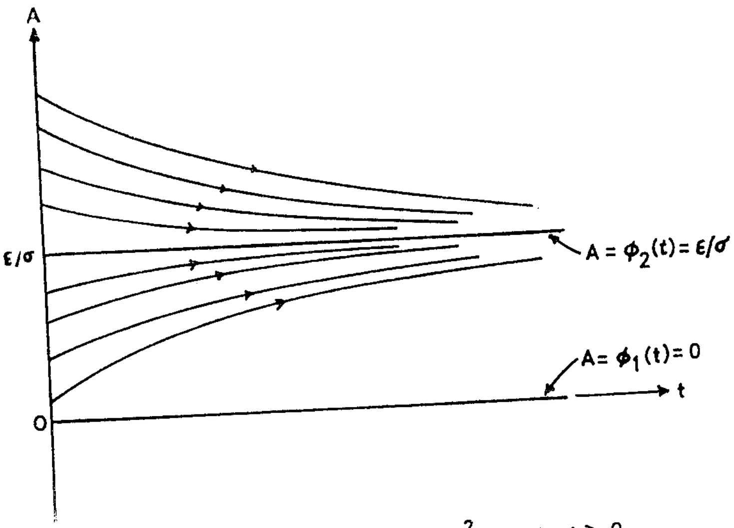
عدد ثابت K بایستی طوری انتخاب شود که شرط اولیهٔ $A(o)=A_0$ برقرار باشد. چون علامت $\varepsilon-\sigma A$ در فواصل $o<A<\frac{\varepsilon}{\sigma}$ و $A>\frac{\varepsilon}{\sigma}$ مختلف است بایستی دوحالت فوق را جداگانه درنظرگرفت، نییجهٔ انتهائی را میتوان دریک رابطه باین ترتیب خلاصه کرد.

$$A=\varphi(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma+[(\varepsilon-\sigma A_0)/A_0]\,e^{-\varepsilon t}} \qquad A_0\neq o$$

گرچه این رابطه حل $A_0=o$ را دربرندارد ولی حل حالت $A_0=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ حالت، خاص آن است. چون بنابه - فرض $\varepsilon>o$ است بنابراین وقتی که t بسمت بی‌نهایت میل کند $e^{-\varepsilon t}$ بسمت‌صفر و A بسمت $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ میل خواهند کرد.

چند حل برای مقادیر مختلف A_0 و از جملهٔ دوحل $A=\varphi_1(t)=o$ و $A=\varphi_2(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ در ش ۲ نشان داده شده‌اند.

بنابراین هرحل معادلهٔ (۶) با هرمقدار اولیهٔ A_0 که شروع شود وقتی $t\longrightarrow\infty$ به مقدار $A=\varphi_2(t)=\frac{\sigma}{\varepsilon}$ نزدیک میشود. این حالت مسئله کیفیتی از آن است که مورد توجه در حل این گونه مسائل است. در اینجا این حالت حد مسئله را بعد از پیدا کردن حل آن نتیجه گرفته‌ایم ولی این مطلب بیشترحائز اهمیت درمسائل مشکلتری است که حتی بدون پیدا کردن حل آن میتوان خاصیت این حالت حدی را بدست آورد. برای توضیح این مطلب برای مسئله حاضر منحنی $\frac{dA}{dt}$ را بصورت تابعی از A رسم می کنیم ش ۳.



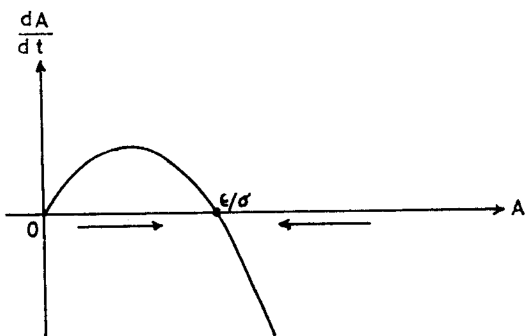
$dA/dt = \varepsilon A - \sigma A^2, \varepsilon > 0, \sigma > 0.$

ش ۲

منحنی یک سهمی است که در آن بازاء $A=0$ و $A=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ داریم $\frac{dA}{dt}=0$.

بعلاوه برای A کوچک $\frac{dA}{dt} < 0$.

بدین‌معنی که اگر $0<A<\frac{\varepsilon}{\sigma}$ باشد مقدار $\frac{dA}{dt}$ مثبت بوده و A قوس صعودی را بطرف $A=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ طی می‌کند. از طرف دیگر درموردیکه $A>\frac{\varepsilon}{\sigma}$ باشد $\frac{dA}{dt}<0$ و A بطرف $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ نـزول



$dA/dt = \varepsilon A - \sigma A^2, \varepsilon > 0, \sigma > 0.$

ش ۲

می‌کند. بدین‌ترتیب وهمانطورکه قبلاً نیز بحث شد وقتیکه $A_0>0$ حل معادلهٔ یعنی A همیشه بطرف $\varphi_2(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ میل خواهد کرد.

دراینجا حل $A=\varphi_1(t)=0$ را مفصل‌تر مورد مطالعه قرار میدهیم. برای نشان دادن منظور کلی ازاین مطالعه، فرض می‌کنیم معادلهٔ دیفرانسیل (۶) نمودار یک دستگاه فیزیکی باشد که بصورت مستطیلی در ش ۴ نشان داده شده است.

اگر $A_0=0$ تغذیهٔ دستگاه باشد بازده عبارت‌خواهدبود از $A=0$. فرض کنیم در اثرخطابجای تغذیهٔ $A_0=0$ مقدار مثبت ولی جزئی $A_0>0$ به دستگاه داده شود. سئوالی که در اینجا مطرح است این

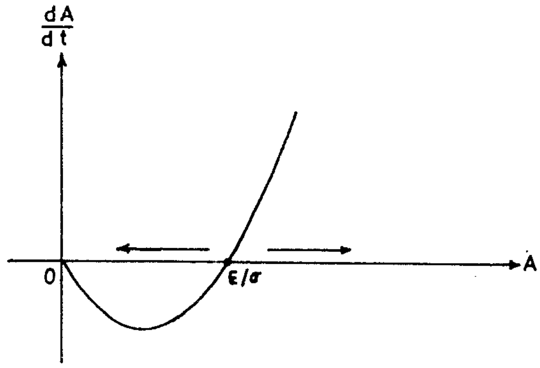
$$\underset{\text{تغذیه}}{A_0} \longrightarrow \boxed{\frac{dA}{dt}=\varepsilon A-\sigma A^2} \xrightarrow{} \overset{\text{بازده}}{A=\phi(t;A_0)}$$

ش ۴

است که آیا بازده دستگاه به $A=0$ نزدیک خواهد بودیا نه؟ بطوریکه از ش ۲ میتوان استنتاج کردجواب این سئوال منفی است و درعوض اینکه A به صفر نزدیک شود بطرف $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ میل مینماید. دراین صورت می‌گویم حل $A=\varphi_1(t)=0$ یک حل ناپایدار است. یعنی اینکه جزئی اختلافی در شرایط اولیه(تغذیهٔ) دستگاه جواب (بازده) دستگاه را به مقدار زیاد تغییرخواهد داد.

اکنون حل $A=\varphi_2(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ را مورد بحث قرار میدهیم. درصورتیکه تغذیه دستگاه $A_0=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ باشد بازده آن نیز $A=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ خواهدبود. اگر خطای کوچکی در تغذیه رخ دهدبازده‌به‌سمت $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ میل کرده و سرعت این نزدیک شدن بصورت اکسپونانسیل خواهد بود. دراین صورت میگوئیم حل $A=\varphi_2(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ یک حل پایدار مجانبی [1] معادلهٔ (۶) میباشد. تعریف دقیق‌تر حالتهای پایدار، ناپایدار مجانبی بعداً داده خواهد شد. بعنوان مثال سوم معادلهٔ دیفرانسیل(۶) و شرط اولیهٔ (۷) را با فرض $\varepsilon>0$ و $\sigma>0$ در نظر میگیریم و بدون حل دقیق معادله بررسی می‌کنیم تا به‌بینیم چه نتایجی از منحنی $\frac{dA}{dt}$ برحسب A میتوان گرفت ش ۵. چون بازاء $0<A<\frac{\varepsilon}{\sigma}$ مقدار $\frac{dA}{dt}$ منفی است بنابراین اگر $0<A_0<\frac{\varepsilon}{\sigma}$ باشد A نزول کرده‌و بطرف $A=\varphi_1(t)=0$ میل خواهد کرد همچنین اگر $A>\frac{\varepsilon}{\sigma}$ باشد $\frac{dA}{dt}$ مثبت‌است و ازآنجا اگر $A_0>\frac{\sigma}{\varepsilon}$ باشد A صعود کرده و باازدیاد t بسمت بی‌نهایت میل مینماید. ازاین بحث نتیجه میگیریم که یک تغییر کوچک مثبت درشرط اولیهٔ $A_0=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ باعث زیاد

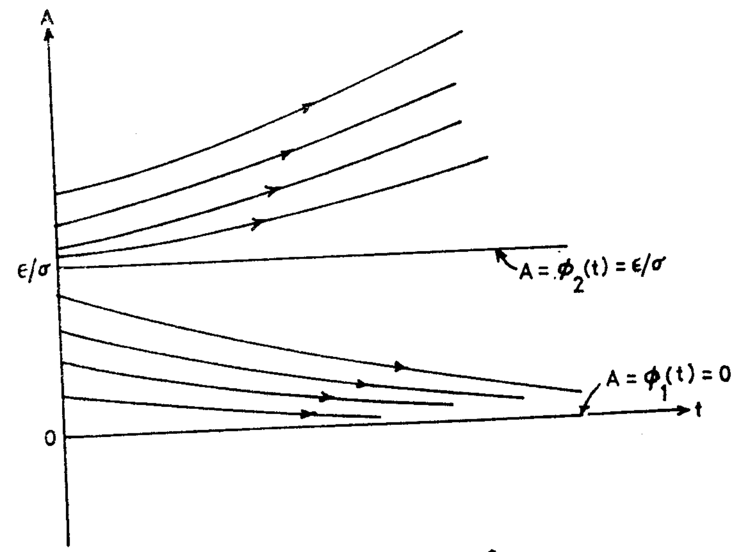
Asymptotically Stable — ۱



$dA/dt = A - \sigma A^2, \epsilon < 0, \sigma < 0.$

ش ۵

شدن A تا بی‌نهایت و تغییر کوچک منفی در آن باعث نزدیک شدن A به صفر شده و حل $A=\varphi_2(t)=\frac{\varepsilon}{\sigma}$ دراین حالت ناپدار است. از طرف دیگر حل $A=\varphi_1(t)=0$ دراین مثال پایدار مجانبی است چون تغییر کوچکی درشرایط اولیه A_0 فقط مقدار A را برای زمانهای اولیه تغییر داده و این مقدار باازدیاد t به‌حل اولیه $\varphi_1(t)$ نزدیک می‌شود. البته این پایداری نسبت به تغییر کوچک درشرط اولیه یعنی نسبت



$dA/dt = \epsilon A - \sigma A^2, \epsilon < 0, \sigma < 0.$

ش ٦

به مقدارهای کمتراز $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ صحیح است واگر اشتباه در تغذیه ویا خطای آن بیش از این مقدارباشد بازده درعوض نزدیک شدن به حل $A=\varphi_1(t)=0$ بسمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. منحنی‌های حل‌های

معادله (۶) برای مقادیر اولیهٔ مختلف A_0 ، $\varepsilon > 0$ و $\sigma > 0$ در ش۶ نشان داده شده‌اند.

معمولا در عمل دستگاهی موجود است که بایستی خروجی (بازده) آن در مقابل یک تغذیهٔ معین و(یا عموماً با جزئی تولرانس در این تغذیه) مقدار مشخص باشد ممکن است که اختلاف در تغذیهٔ دستگاه از تولرانس مجاز بیشتر گردد ولی منظور ما پایداری دستگاه درمقابل جزئی اختلاف درتغذیهٔ دستگاه است. مثلاً فرض کنیم یک کنترل اتوماتیک بایستی قسمت متحرك بال هواپیما را بازاویهٔ خاصی نسبت به آن نگهدارد. و درحرکت عادی هواپیما تغییرات نیروهای وارده ممکن است باعث حرکت و تغییر وضعیت این قسمت شوند ولی برای تغییرهای کوچک کنترل اتوماتیک (مستطیل مثال قبل) آن را بحالت اول برخواهد گرداند (همانطورکه درحالت $\varepsilon > 0$ و $\sigma > 0$ حل $A = \varphi_1(t) = 0$ حالت پایدار بود). ولی اگر هواپیما از طوفان شدیدی عبور نماید تغییر وضع قسمت متحرك بال ممکن است به‌آن حد برسد که کنترل اتوماتیک نتواند آن را بحالت اولیه برگرداند (این درمثال قبلی مربوط به حالت $\varepsilon > 0$ و $\sigma > 0$ و تغییر شرط اولیه به بیش از $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ میباشد). احتمالاً دراین مورد خلبان شخصاً کنترل را در دست خواهد گرفت.

بالاخره‌مسئلهٔ خطی کردن‌معادلهٔ دیفرانسیل (۶) را باصرفنظر کردن از σA^2 درمقابل εA مختصراً مورد بحث قرار میدهیم. درحالت اول ($\varepsilon > 0$ و $\sigma > 0$) درصورتیکه $A_0 = A(0)$ بقدرکافی کوچک باشد و برای زمان کوچک معادلهٔ خطی تقریب نسبتاً خوبی برای معالهٔ غیر خطی خواهد بود ولی برای زمانهای طولانی صحیح نیست که از σA^2 درمقابل εA صرفنظر شود چونکه هرچند که مقدار اولیهٔ A ممکن است کوچک باشد ولی A بطور اکسپونانسیل زیاد شده وجملهٔ σA^2 قابل مقایسه با εA خواهد شد. درحالت دوم ($\varepsilon < 0$ و $\sigma > 0$) حل معادلهٔ خطی $A_0 e^{\varepsilon t}$ بازاء هرمقدار A_0 بسمت صفرمیل می کند وحل معادلهٔ غیرخطی نیزبازاء $A_0 < \frac{\varepsilon}{\sigma}$ بسمت صفر میل مینماید. بنابراین درحالت اول حل مسئله خطی تقریب خوبی (حداقل برای t بزرگ) برای مسئله غیرخطی نیست درصورتیکه درحالت دوم بازاء مقادیر کوچک A_0 یعنی $A_0 < \frac{\varepsilon}{\sigma}$ معادلهٔ خطی تقریب خوبی برای معادلهٔ غیرخطی است.

تعریف ریاضی پایداری - با مثالهای فوق بصورت مقدمه اکنون توجه خواننده را باین جلب می کنم که منظور ازحرکت، ازاین نقطه به بعد ، حل‌معادلهٔ دیفرانسیل و منظور از مسیر،منحنی‌حل‌معادلهٔ دیفرانسیل است. باین‌معنی که معادلهٔ دیفرانسیل را ، برای سادگی بیان ، معادلهٔ حرکت یک نقطه‌مادی فرض می کنیم ؛ البته نتایج و تعریفات در مورد هرسیستم که دارای آن معادلهٔ دیفرانسیل باشد قابل‌قبول خواهد بود.

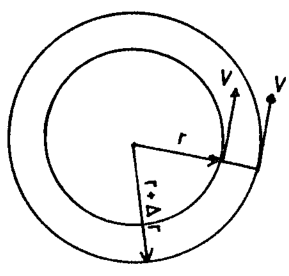
بطور کلی سه تعریف اصلی برای پایداری وجود دارد: پایداری بطریق لاپلاس[۱]، پایداری لیاپونف و پایداری به‌تعریف پوانکاره (یا پایداری مداری[۲]). پایداری به تعریف لاپلاس در واقع محدود بودن را بطور کلی میرساند. دراین تعریف یک سیستم در حالت پایدار است اگر حرکت معین و معلومی را میرساند به‌معنی اینکه وقتی $t \longrightarrow \infty$ حل معادلهٔ دیفرانسیل مقدار معین و محدودی دارد و بی‌نهایت نمیشود. این تعریف برای بسیاری از مطالعات کیفی کافی نیست. ازطرف دیگر پایداری لیاپونف خیلی مشروط است. دراین تعریف حرکت سیستم‌های پایدار بایستی طوری باشد که اگر یکدفعه (مثلاً در $t=0$) نزدیک‌هم باشند همیشه این نزدیکی (کم و بیش) باقی‌بماند. به‌بیان ریاضی حل معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی:

$$\frac{dX}{dt} = F(X,t) \qquad (۸)$$

را پایدار به‌تعریف لیاپونف مینامیم اگر بازاء هرعدد $\varepsilon > 0$ عددی مثل $\delta > 0$ وجود داشته باشد چنانکه اگر $X(t)$ و $Y(t)$ حل‌های معادلهٔ دیفرانسیل (۸) با خاصیت $\| X(0) - Y(0) \| < \delta$ باشند رابطهٔ $\| X(t) - Y(t) \| < \varepsilon$ برای تمام مقادیر $t \geq 0$ برقرار باشد.

البته‌زمان‌اولیهٔ $t=0$ هیچ رل‌اصلی دراین تعریف ندارد و میتوان زمان $t=t_0$ را بجای آن‌انتخاب کرد. ملاحظه میشود که پایداری که در مثال معادلهٔ دیفرانسیل گسترش جمعیت دربارهٔ آن بحث شد پایداری لیاپونف بود.

تعریف‌لیاپونف بسیاری از مطالبی را که هرکس ازپایداری انتظار دارد شامل است ولی‌دربسیاری



ش ۷

از مسائل‌احتیاج به این اندازه محدودیت وجود ندارد. مثلاً نقطه‌ای‌مادی را فرض کنیم که با سرعتی‌ثابت با فاصلهٔ r از نقطهٔ O حول آن حرکت دورانی انجام میدهد. درصورت خطای Δr در شعاع انتخاب‌شدهٔ r رخ دهد مسیر چندان تفاوتی نخواهد کرد ولی مثلاً بعداز زمان $t_0 = \dfrac{\pi r(r+\Delta r)}{2V\Delta r}$ که از پرتاب هردو

Orbital Stability — ۲ Laplace — ۱

از روی یک شعاع می‌گذرد اختلاف زاویهٔ گردش این دونقطه باندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ رادیان است بدین معنی که این حرکت پایدار به تعریف لیانف نخواهد بود. برای رفع اشکال درچنین مسائلی پوانکاره پایداری‌مداری را باین‌طریق‌تعریف کرد که مدار Γ را درحرکت مداری‌نقطه‌ای‌پایدار می‌گوئیم اگر هرمداری که درهمان جهت درنقطه‌ای از نقاط خود با Γ نزدیک باشد درتمام نقاط خویش به آن نزدیک خواهد ماند. دراینجا مدارها بصورت پارامتری وبا پارامتر یکسان (مثلاً پارامتر زمان) باهم مقایسه نمیشوند که بازاء مقدارمعینی از پارامتر بایستی نقاط روی دو مدار بهم نزدیک بمانند (پایداری لیاپونف). از لحاظ هندسی میتوان‌مدار Γ را درفضای n بعدی محصور به لوله‌ای کرد که دارای این خاصیت است که اگر مداری به داخل این لوله نفوذ کرد در داخل آن باقی خواهد ماند. اگراین لوله را بتوان بقدرکافی کوچک گرفت این حالت پایداری مداری طبق تعریف پوانکاره است. درهریک ازاین‌تعریف‌ها پایداری را مجانبی مینامیم اگرمداری که زمانی بقدرکافی نزدیک Γ است وقتی $t\longrightarrow\infty$ بسمت Γ میل‌نماید.

پایداری تعادل ـ درصورتیکه حل معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی:

$$\frac{dX}{dt}=F(X) \tag{۹}$$

ماتریس یک‌ستونی $X(t)$ باشد مولفه های این ماتریس‌یک‌منحنی درفضای‌مربوطه تولید می‌کنند که‌مسیر حرکت (حل معادله) نامیده می‌شود. درصورتیکه ماتریس ثابت $X(t)=C$ حل معادلهٔ بالا باشد به آن نقطهٔ حل[۱] ویا نقطه استثنائی[۲] می گوئیم. این نقطه معادل مسیری است که از یک نقطه تشکیل شده که تابع زمان نیست و بنابراین حالت (نقطهٔ) تعادل دستگاه است. درمثال معادلهٔ دیفرانسیل گسترش جمعیت حل‌های $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ نقاط استثنائی بودند. معادلهٔ(۹) را در C (ویاحالت تعادل C را)پایدار میتامیم اگر $X=C$ یک حل پایدار معادلهٔ (۹) باشد. علی‌الخصوص سیستم خطی:

$$\frac{dX}{dt}=AX \tag{۱۰}$$

را در مبدء پایدار مینامیم اگر $X=O$ یک حل پایدار این معادله‌باشد. اگر C یک نقطهٔ استثنائی‌معادلهٔ (۹) باشد با تغییر متغیر $Y=X-C$ معادله بصورت:

$$\frac{dY}{dt}=F(Y+C)=F^{*}(Y)$$

درمیآید که مبدء $Y=o$ نقطهٔ استثنائی‌آن است. بنابراین میتوان در حالت کلی نقطهٔ استثنائی (حالت‌تعادل) را در مبدء فرض کرد.

Singular Point — ۲ Point Solution — ۱

فرض کنیم C یک نقطهٔ استثنائی معادلهٔ (۹) باشد. ممکن است بتوان طرف راست معادله را بصورت زیر نوشت :

$$F(X)=A(X-C)+G(X) \qquad (۱۱)$$

که در آن A ماتریسی ثابت و $G(X)$ برابر $F(X)-A(X-C)$ است. بعلاوه فرض می کنیم $A\neq 0$ را بتوان طوری انتخاب کرد که :

$$\lim_{X\to C}\frac{\| G(X) \|}{\| X-C \|}=0 \qquad (۱۲)$$

دراینصورت بجا است که معادلهٔ :

$$\frac{dX}{dt}=A(X-C) \qquad (۱۳)$$

را تقریب خطی (۱) معادلهٔ (۹) بنامیم. شرط غیرخطی (۱۲) در واقع بیان این است که وقتی X نزدیک C است فقط قسمت خطی رابطهٔ (۱۱) جملهٔ قابل ملاحظه در $F(X)$ میباشد.

قضیه- اگر تقریب خطی (۱۳) پایدار مجانبی در C باشد معادلهٔ (۹) نیز در C پایدار مجانبی خواهد بود. یعنی شرط کافی برای اینکه $X=C$ حالت تعادل معادلهٔ (۹) باشد این است که این نقطهٔ استثنائی حالت تعادل رابطهٔ (۱۳) باشد.

منابع

1 – Bellman R. Stabity Theory of Differential Equations McGraw – Hill Book Co. Inc. New York 1953

2 – Boyce W.E. and Di Prima R. C. Elementary Differential Eqations John Wilsy Sons Inc. New York 1965

3 – Minorsky N. Introduction to Non linear Mechanics. J.W. Edwards. Ann Arbor Michigan 1947

4 – Struble R. A. Non linear Differential Equations McGraw – Hill Book Co. Inc. 1962

5 – Yuan S.W. Foundations of Fluid Mechanics Prentice – Hall, Inc. New Jer,ey 1967

Linear Approximation — ۱