طرح ومحاسبهٔ دقیق تیرهای سراسری بتنی پیش‌تنیده باارتفاع متغیر

نوشتهٔ

مسعود طلیسچی

M. S. C. از انستیتو تکنولوژیک ایلنوی

مسئول بررسی پروژه‌های راههای فرعی وزارت راه

مقدمه :

درتهیه این‌مقاله فرض شده است که مهندسین ازاساس محاسبات بین پیش‌تنیده وروش Column-Analogy درمحاسبات استاتیکی اطلاع کامل داشته و ازطرفی باکاربرد از طریقهٔ هاردی کراس در تیرهای سرتاسری آشنا میباشند.

بتن پیش‌تنیده اساساً برای‌بدست‌آوردن‌صرفه‌جوئی درهزینه ساختمان‌تیرهای بادهانهٔ بزرگ‌میباشد. با شن وماسه سبک‌وزنی که اخیراً درنقاط مختلف دنیا مخصوصاً امریکا تهیه میشود ووزن‌بتن‌آن در ایالتهای امریکا بین ۱۹۲۰-۱۷۶۰ کیلوگرم بر مترمکعب تغییر میکند ، امکان پوشش دهانه‌های بزرگ بااینطریقه موجود میباشد.

تیرهای سرتاسری و علی‌الخصوص با لنگر اینرسی متغیر در بدست آوردن صرفه جوئی کمک مؤثری مینماید بشکلی که برای‌بارهای سنگین و دهانه‌های بزرگ درساختمانهای مختلف اخیراً در بسیاری ازموارد ازتیرهای بتن پیش‌تنیده مداوم باارتفاع متغیر استفاده مینمایند.

تقسیم لنگرها بطریقهٔ هاردی کراس طریقه ساده‌ای برای بدست آوردن تنش‌ها در مقاطع تیرهای مداوم میباشد. برای‌اینکارلازم‌است که‌لنگرهای گیرداری (F.E.M.) درهرمورد بارگزاری وبرای‌مشخصات تیر موردنظر بدست‌آید.

مشخصات‌تیرسرتاسری (Member Constants) ازقبیل (Stiffness) و (Distribution Factors) برای تیرهای سرتاسری بالنگر اینرسی متغییر قبلامحاسبه شده است ودراین‌خصوص مثلا مؤسسه سیمان‌پرتلند امریکا جداول مفصلی دارد. منظور از این مقاله تهیه لنگرهای گیرداری برای نیروهای پیش تنیدگی بعلت

یکسره بودن کابلهای پیش تنیدگی ومخصوصاً شکل نیمرخ طولی کابل میباشد ودرحقیقت مکمل همان جدولها منتهی برای تیرهای پیش تنیده با کابلهای یکسره میباشد .

علائم اختصاری :

$A = \Sigma \int \frac{ds}{I}$

a = Haunch length

$B = \frac{I_۲ - I}{I_۲}$

c = Horizontal length of beam from mid span to start of haunch in symmetrical case, or from centroid of $\frac{ds}{I}$ values to start of haunch in unsymmetrical case

C_A = Carry-over factor from A to B of straight or haunched beam AB

C_B = Carry-over factor from B to A of straight or haunched beam BA

d = Minimum beam depth

E = KL − g

e_A = Eccentricity of the tendon from N.A. at support

e_B = Eccentricity of the tendon from N.A. at support B, etc.

e_K = Eccentricity of the tendon from N.A. at location of low point of cable

F = Prestressing force

f = Distance centroid of $\frac{ds}{I}$ values to haunched end of beam (in unsymmetrical case)

g = Distance centroid of $\frac{ds}{I}$ to straight end of beam (in unsymmetrical case)

I = Minimum moment of inertia of beam

$I_۱$ = I at center of haunch

$I_۲$ = I at maximum haunch depth

I_u = I at coordinate u, $I_u = \frac{۱}{۱ - \frac{B_u^n}{a^n}}$

$I_y = \Sigma \int \frac{ds}{I} x^۲$

KL = Distance of cable low point from straight end of beam

K_B = Stiffness factor at B

K = Moment at far end of beam BA or BC, due to unit rotation at B (far end fixed)

L = Length of span for an unsymmetrical case or half span for a symmetrical beam

md = Maximum haunch depth

M_s = Static moment at any point x distance from centroid of $\frac{ds}{I}$ values

M_i = Statically indeterminate moment

$$M_y = \Sigma \int \frac{M_s}{I} ds\, x$$

N.A. = Neutral axis

$$n = \frac{\log \frac{r_١ - ١}{Br_١}}{\log .٥}$$

$$r_١ = \frac{I_١}{I}$$

$$r_٢ = \frac{I_٢}{I}$$

s = Any horizontal coordinate along beam axis

x = Horizontal coordinate distance from centroid of $\frac{ds}{I}$ values

y = Vertical coordinate distance tendon centroid profile from N.A.

y′ = Vertical distance N.A. of haunch from N.A. of straight segment

y_B = Distance N.A. from bottom fiber

y_T = Distance N.A. from top fiber

z = Horizontal coordinate measured from left support (unsymmetrical case)

u = Horizontal coordinate measured from start of haunch

w = Load intensity as force per unit length due to tendon curvature

$$W = \Sigma \int \frac{M_s ds}{I}$$

F.E.M. = Fixed End Moment

f_{tp} = Permissible tension in the concrete

f_{cp} = Permissible compression in the concrete

f_s = Allowable tendon stress

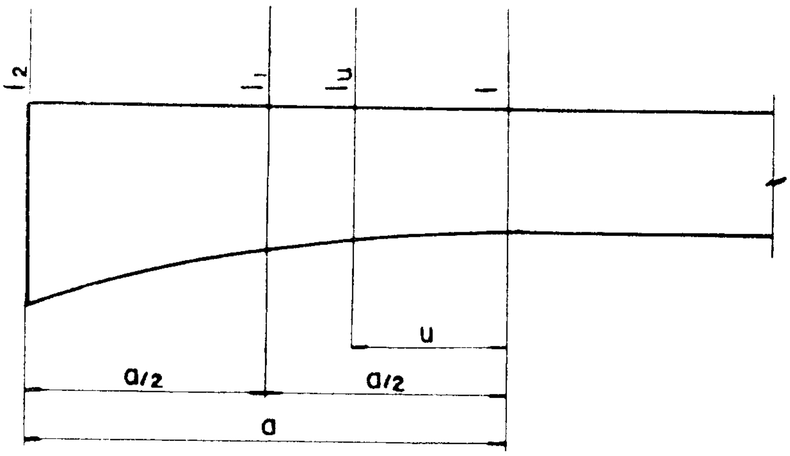
F_O = Initial prestress force

$$Z_B = \frac{I}{Y_B}$$

$$Z_T = \frac{I}{Y_T}$$

A_c = Cross sectional area of concrete

توضیح ـ تیر با ارتفاع متغیر معمولا باشکال ذیل ساخته میشود که ممکن است تغییر ارتفاع خطی بوده و یا بشکل سهمی باشد.



شکل ۱- تیر با ارتفاع متغیر

این نوع تیرها دراصطلاح انگلیسی (Haunched) نامیده میشود.

در این حالت لنگر اینرسی از یک ماکزیموم روی تکیه گاه بیک می‌نیموم در انتهای Haunch کاهش پیدا میکند.

فورمولهائی که ذیلا محاسبه و ارائه میگردد برای همه نوع تیرهای متداول بشکل جعبه توخالی و یا (I) و شکلهای دیگر صحیح میباشد.

برای استفادهٔ از طریقه هاردی کراس دراینمورد اشکال عمده در بدست آوردن لنگرهای گیرداری (F.E.M.) بعلت نیروهای حاصله از پیش‌تنیدگی میباشد.

در این مقاله فورمولهائی برای لنگرهای گیرداری ازطریق Column Analogy بدست‌آمده است.

برای لنگرهای اینرسی تیر در مقاطع با ارتفاع متغیر از فورمولی که قبلا بدست‌آمده و (*Substitute I Curve) است استفاده میشود.

فورمولهای لنگرهای گیرداری (F.E.M.) را برای چهار حالت تیر قرینه با تغییر خطی و تیر قرینه با تغییر سهمی‌وار وتیر غیرمتقارن با تغییرخطی وسهمی‌وار بدست‌آورده‌ایم. درآخر این مقاله یک‌مثال عددی برای نشان دادن طرز کاربرد فورمولها داده شده است.

لنگر اینرسی در تیرهای با ارتفاع متغیر:

درشکل ۱ لنگر اینرسی قسمتهای مختلفهٔ تیر نموده شده‌است که بالنگر اینرسی حقیقی تفاوت‌اندکی دارد.

---

* رجوع شود به مرجع شماره ۱ فهرست مرجع های این مقاله

اگر I_u لنگر اینرسی درمقطع بفاصله U از نقطه‌ایکه مقطع تیر ثابت است باشد و I_1 و I_2 لنگراینرسی درابتدا وانتهای Haunch باشد ، فرض میکنیم که :

$$B = \frac{I_2 - I}{I_2} \qquad (1)$$

دراینصورت :

$$I_u = \frac{I}{1 - B\left(\frac{u}{a}\right)^n} \qquad (2)$$

و با درنظر گرفتن شرایط حدی یعنی :

الف : $I = I_u \quad ، \quad 0 = u$

ب : $I_1 = I_u \quad ، \quad \frac{a}{2} = u$

ج : $I_2 = I_u \quad ، \quad a = u$

و توجه باینکه :

$$\frac{I_1}{I} = r_1$$

و

$$\frac{I_2}{I} = r_2$$

میباشد عدد B بشکل :

$$B = 1 - \frac{1}{r_2}$$

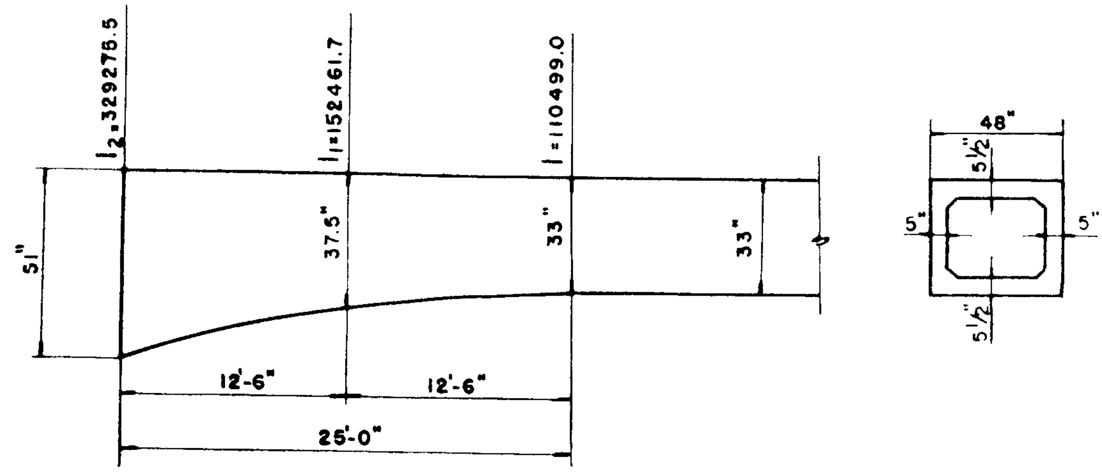
درمیآید و بااستفاده از معادلهٔ (۲) واین شرایط حدی نتیجه خواهیم گرفت :

$$I_u(u=0) = \frac{I}{1 - \frac{I_2 - I}{I_2}\left(\frac{0}{a}\right)^n} = I$$

$$I_u(u=a) = \frac{I}{1 - \frac{I_2 - I}{I_2}\left(\frac{a}{a}\right)^n} = I_2$$

$$I_u\left(u=\frac{a}{2}\right) = \frac{I}{1 - \frac{I_2 - I}{I_2}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = I_1$$

$$n = \frac{\log \frac{r_2(r_1 - 1)}{r_1(r_2 - 1)}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log \frac{1 - \frac{1}{r_1}}{B}}{\log \frac{1}{2}} \qquad (3)$$



شکل ۲- تیر با ارتفاع متغیر با مقطع جعبه‌ای

عدد I_u درهرمقطعی بستگی به‌عدد n و اینعدد هم بستگی بشکل تیر دارد و Shape exponent خوانده میشود.

مثلا برای تیر شکل (۲):

$$\frac{۱}{r_۲} = \frac{I}{I_۲} = \frac{۱۱۰۴۹۹}{۳۲۹,۲۷۵ر۰} = ۰ر۳۳۶$$

$$B = \frac{I_۲ - I}{I_۲} = ۱ - \frac{۱}{r_۲} = ۱ - ۰ر۳۳۶ = ۰ر۶۶۴$$

$$n = ۱ر۲۷۳$$

منحنی لنگر اینرسی برای این تیر با ارتفاع متغیر در شکل ۳ نشان داده شده‌که با مقایسه با لنگر اینرسی حقیقی تفاوت آن ناچیز و درحدود حداکثر ۵٪ میباشد.

معادلات لنگرهای‌گیرداری:

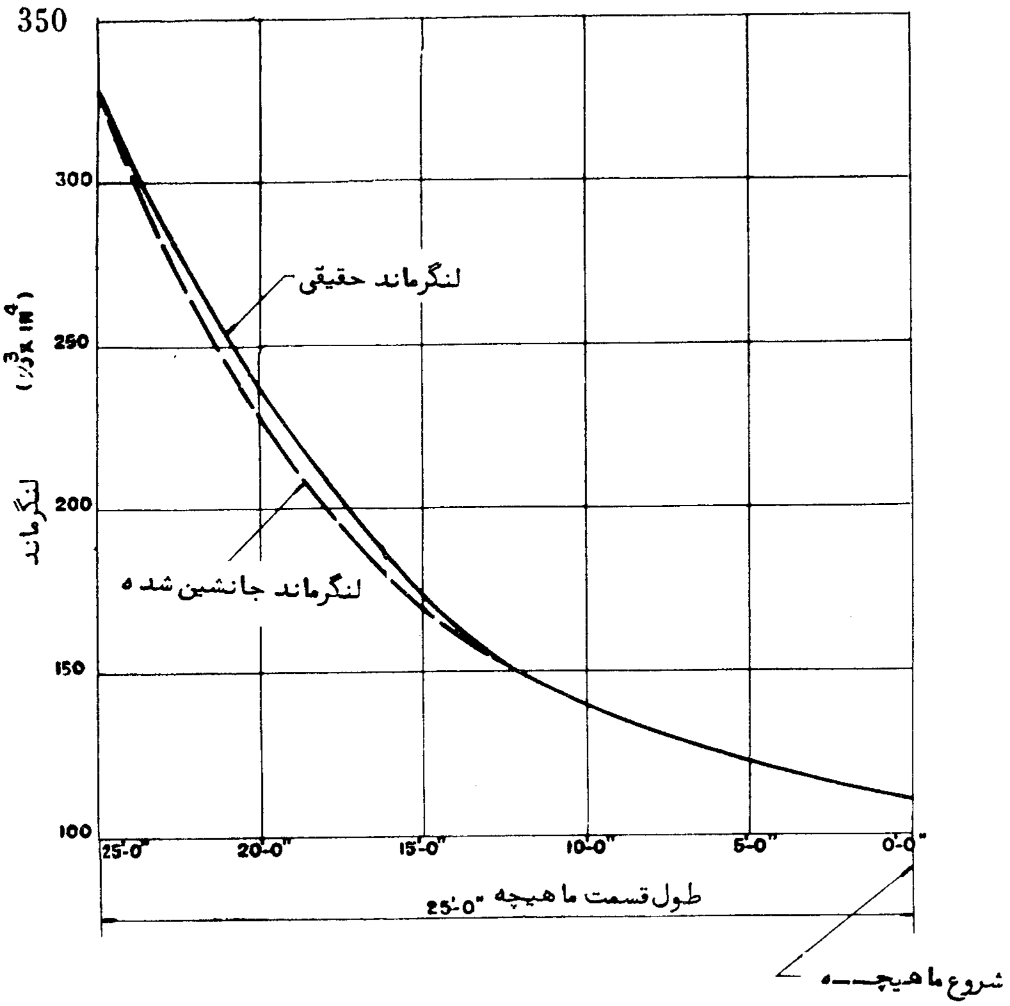
برای بدست آوردن معادلات لنگرهای‌گیرداری تیر را با نیروهای حاصله از پیش‌تنیدگی‌بارگزاری کرده و بوسیله طریقه (Column Analogy) لنگرهای‌گیرداری را بدست میآوریم. درمرحلهٔ اول حالت تیر قرینه باتغییر خطی را مورد توجه قرار میدهیم:

شکل‌های ٤ و ٥ و ٦ وضع تیر و وضع مرکز ثقل کابلهای پیش‌تنیدگی و نیروهای حاصله از وضع و شکل نیمرخ طولی‌کابل را نشان میدهد.

شدت بار در هرنقطهٔ تیر تابعی‌است ازنیروی پیش‌تنیدگی ومشتق‌دوم معادلهٔ منحنی‌کابل‌بصورت زیر میباشد:

$$w = F\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$$

درصورتیکه منحنی‌کابل سهمی باشد معادلهٔ منحنی بادرنظرگرفتن خطوط مختصات نشان‌داده شده



شکل ۳ــ مقایسه لنگرماند حقیقی ولنگرماند جانشین شده

عبارتست از :

$$y = y' = \left[\frac{۳x^۲}{L^۲} - \frac{۲x^۳}{L^۳} \right] (e_K + e_B - \frac{md}{۲}) - e_K \qquad ۰<x<c$$

$$y = y' + \left(\frac{u}{a}\right)\left(\frac{md}{۲}\right) = \left[\frac{۳x^۲}{L^۲} - \frac{۲x^۳}{L^۳} \right] (e_K + e_B - \frac{md}{۲})$$

$$-e_K + \left(\frac{x-c}{a}\right)\left(\frac{md}{۲}\right) \qquad ۰<x<L$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \left[\frac{۶}{L^۲} - \frac{۱۲x}{L^۳} \right] (e_K + e_B - \frac{md}{۲})$$

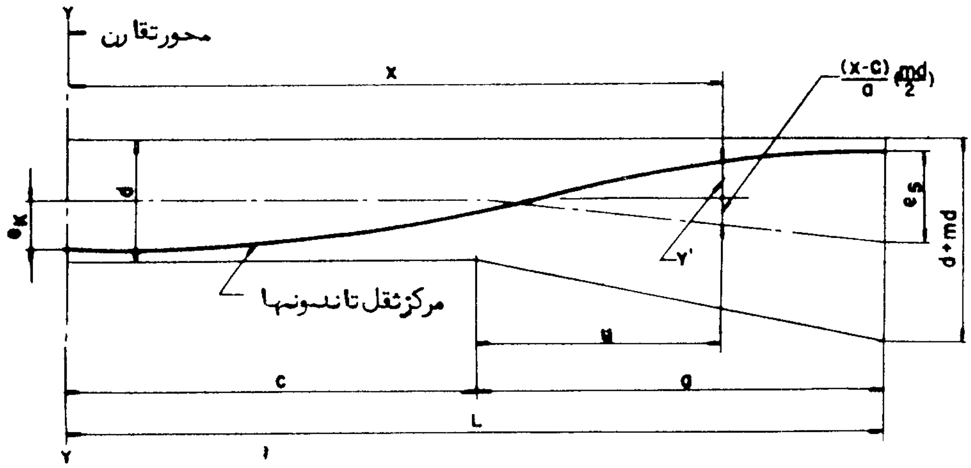
$$w = Fy'' = F\left(\frac{۶}{L^۲} - \frac{۱۲x}{L^۳}\right)(e_K + e_B - \frac{md}{۲})$$

ملاحظه میگردد که منحنی بارگزاری منحنی خطی است و برای $X=۰$ و $X=L$:

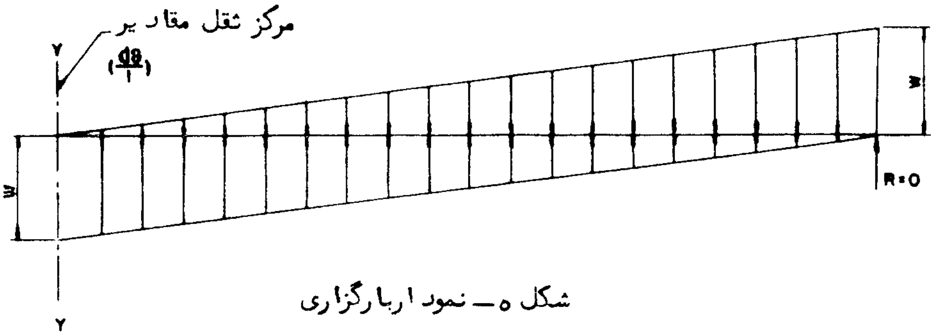
$$w = 6\,\frac{F}{L^2}\left(e_K + e_B - \frac{md}{2}\right)$$

و با علامتهای متفاوت در دو انتها خواهد بود.

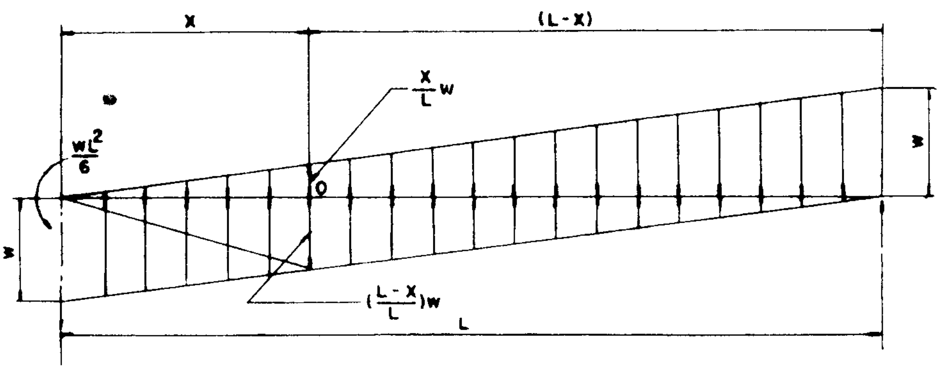
با قرار دادن این بار روی تیر و استفاده از طریقهٔ Column Analogy لنگرهای گیرداری بدست خواهد آمد.



شکل ٤ــ تیرقرینه باماهیچه خطی



شکل ٥ــ نمودار بارگزاری



شکل ٦ــ دیاگرام جسم آزاد

در هرمورد بجای I_u فورمول (۲) جایگزین خواهد شد.

تیر ایزواستاتیک دراینمورد یک تیر ساده روی دو تکیه‌گاه فرض شده است.

فورمول Column Analogy بقرار زیر است:

$$F.E.M. = M_s - (M_i) \tag{۵}$$

$$M_i = \frac{W}{A} + \frac{M_y}{I_y}x + \frac{M_x}{I_x}y$$

زیرا بارها بطور قرینه و در مرکز ثقل تیر اثر میکنند.

برای بدست آوردن لنگر در انتهای تیر که درحقیقت لنگرگیرداری‌است لنگر تیر ساده درانتهای‌تیر را باید در فورمول (۵) جایگزین نمائیم که صفر است بنابراین و باقراردادن عددهای مربوطه ازفورمول (۶) فورمول لنگرگیرداری بدست میآید.

چون نمودار لنگر خمشی بمیانتار ستون نظیر اثر مینماید پس:

$$M_x = \frac{M_s y_{ds}}{I} = 0$$

بعلت تقارن:

$$M_y = 0$$

در انتهای تیر زیرا دستگاه مبنا واجد این شرط است:

$$M_s = 0$$

$$M = -\left(\frac{W}{A}\right)$$

$$A = \frac{۲c}{I} + ۲\int_0^a \frac{du}{I_u}$$

$$I_u = \frac{I}{۱ - B\left(\frac{u}{a}\right)^n}$$

$$\int_0^a \frac{du}{I_u} = \frac{۱}{I}\left(a - \frac{Ba}{n+۱}\right)$$

$$A = \frac{۲c}{I} + \frac{۲}{I}\left(a - \frac{Ba}{n+۱}\right)$$

$$A = \frac{۲}{I}\,\frac{L(n+۱) - aB}{(n+۱)} \tag{۶}$$

$$W = \Sigma \int \frac{M_s dx}{I_x}$$

$$\int_{0}^{c} \frac{M_s dx}{I} = \frac{1}{I}\left[\frac{-wcL^{2}}{6} - \frac{wc^{4}}{12L} + \frac{wc^{3}}{6} \right]$$

$$\int_{0}^{a} \frac{M_s du}{I_u} = \frac{1}{I}\int_{0}^{a} (M_s)\left(1 - \frac{B}{a^n} u^n\right) du$$

$$F.\,E.\,M. = Fe_A + \frac{(n+1)\left(e_K + e_B - \frac{md}{2}\right) F}{2L^{3}[L(n+1) - Ba]}\left\{ \frac{n+4-4B}{(n+4)} a^{4} - \frac{(L-2a)[6B-2(n+3)]}{(n+3)} a^{3} + \frac{(L-a)[12B-6(n+2)]a^{2}}{(n+2)} - \frac{(3L-2a)[2B-2(n+1)]}{(n+1)} a^{2} + (L^{4} + a^{4} - 2a^{3}L) \right\} \tag{10}$$

برای لنگرهای گیرداری درمورد تیرهای غیرقرینه باتغییر مقطع خطی عین عملیات فوق تکرارمیشود منتهی درمورد اخیر تیر ساده مربوطه بشکل تیر طره‌ای انتخاب میشود.

ذیلاً فورمولهای مربوطه بترتیب برای تیرهای غیرقرینه با تغییر ارتفاع خطی وتیر قرینه با تغییر ارتفاع سهمی‌وار و تیر غیر متقارن با تغییر ارتفاع سهمی‌وار داده شده است.

$$A = \frac{L-a}{I} + \left(\frac{a}{I}\right)\left(\frac{n+1-B}{n+1}\right) = \frac{1}{I}\left[\frac{L(n+1)-Ba}{n+1}\right] \tag{14}$$

$$I_y = \frac{1}{I}\left| \frac{g^{3}}{3} + \frac{(f-a)^{3}}{3} + \frac{(n+3)-3B}{3(n+3)} a^{3} + \frac{(f-a)(n+2-2B)}{(n+2)} a^{2} + \frac{(f-a)^{2}(-B+n+1)}{(n+1)} a \right| \tag{15}$$

$$M_s = \left[\left(e_K + e_B - \frac{md}{2}\right) + \frac{e_K(2L-KL)}{KL} \right] F \tag{21}$$

$$W = \frac{Fe_K}{2IKL}\left\{ (KL)^{2} + 3(L-KL-a)(L-2KL-a) + \frac{3[(n+2)-2B]}{(n+2)} a^{2} + \frac{3(B-n-1)(KL+2a-2L)}{(n+1)} a \right\} + \frac{\left(e_K + e_B - \frac{md}{2}\right) F}{I(L-KL)^{3}}\left\{ \frac{1}{2}\left[(KL-g)^{4} - (f-a)^{4} \right] \right. \tag{22}$$

$$+\frac{(۳KL-۶g+۳L)}{۳}[(f-a)^{۳}-(KL-g)^{۳}]+(KL-g)(۳g-۳L)[(f-a)^{۲}$$

$$-(KL-g)^{۲}]+(۲g+KL-۳L)(KL-g)^{۲}[(KL-g)-(f-a)]$$

$$+\frac{۴B-(n+۴)}{۲(n+۴)}a^{۴}-[-۶(f-a)+(۳KL-۶g+۳L)]\frac{۳B-(n+۳)}{۳(n+۳)}a^{۳}$$

$$-[-۶(f-a)^{۲}+۲(۳KL-۶g+۳L)(f-a)$$

$$+۲(KL-g)(۳g-۳L)]\frac{۲B-(n+۲)}{۲(n+۲)}a^{۲}-[-۲(f-a)^{۳}$$

$$+(۳KL-۶g+۳L)(f-a)^{۲}+۲(KL-g)(۳g-۳L)(f-a)$$

$$-(۲g+KL-۳L)(KL-g)^{۲}]\frac{B-(n+۱)}{(n+۱)}a\Big\}$$

$$M_y=\frac{Fe_K}{(K^{۲}L^{۲})(۱۲I)}\Big\{-g^{۴}+(g^{۴}+۳K^{۴}L^{۴}-۴gK^{۳}L^{۳}) \tag{۲۲}$$

$$+۲۴\,KL\Big[\Big(\frac{g}{۲}-\frac{KL}{۴}\Big)(c^{۲}-E^{۲})+\frac{۱}{۳}(c^{۳}-E^{۳})\Big]$$

$$+۲۴\,KL\Big[\frac{(n+۳)-۳B}{۳(n+۳)}a^{۳}$$

$$+\frac{(L-۲a+f-\frac{KL}{۲})(n+۲-۲B)a^{۲}}{۲(n+۲)}$$

$$+\frac{(-B+n+۱)(L-a-\frac{KL}{۲})ca}{(n+۱)}\Big]\Big\}$$

$$+\frac{(e_K+e_B-\frac{md}{۲})F}{I(L-KL)^{۳}}\Big\{-\frac{۲}{۵}\Big[(f-a)^{۵}-(KL-g)^{۵}\Big]$$

$$+\frac{(۳KL-۶g+۳L)}{۴}[(f-a)^{۴}-(KL-g)^{۴}]$$

$$+\frac{۲}{۳}(KL-g)(۳g-۳L)[(f-a)^{۳}-(KL-g)^{۳}]$$

$$-\frac{۱}{۲}(۲g+KL-۳L)(KL-g)^{۲}[(f-a)^{۲}-(KL-g)^{۲}]$$

$$+\frac{۱۰B-۲(n+۵)}{۵(n+۵)}a^{۵}+[-۸(f-a)+(۳KL-۶g+۳L)]\frac{(n+۴)-۴B}{۴(n+۴)}a^{۴}$$

$$+[-۱۲(f-a)^{۲}+۳(۳KL-۶g+۳L)(f-a)$$

$$+۲(KL-g)(۳g-۳L)]\frac{(n+۳)-۳B}{۳(n+۳)}a^{۳}+[-۸(f-a)^{۳}$$

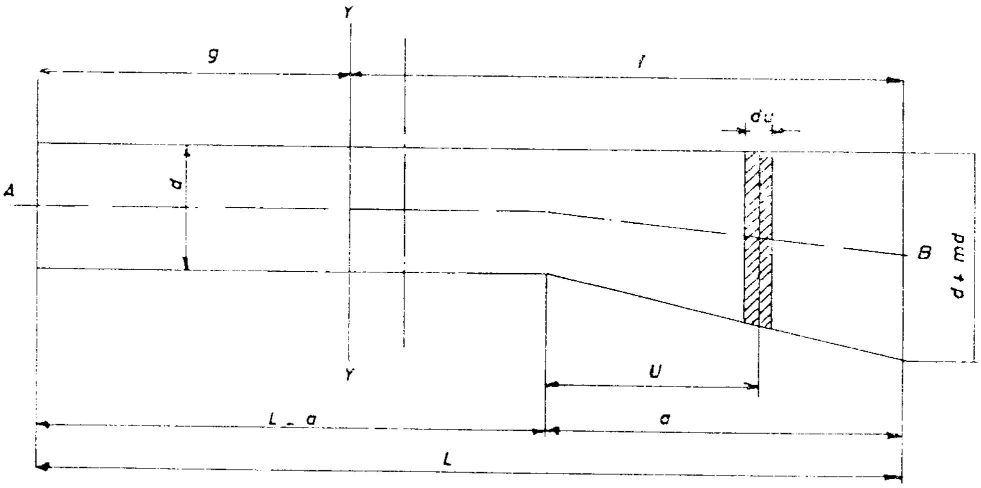
$$+۳(f-a)^{۲}(۳KL-۶g+۳L)-(۲g+KL-۳L)(KL-g)^{۲}$$

$$+4(KL-g)(3g-3L)(f-a)]\,\frac{n+2-2B}{2(n+2)}\,a^2+[-2(f-a)^4$$

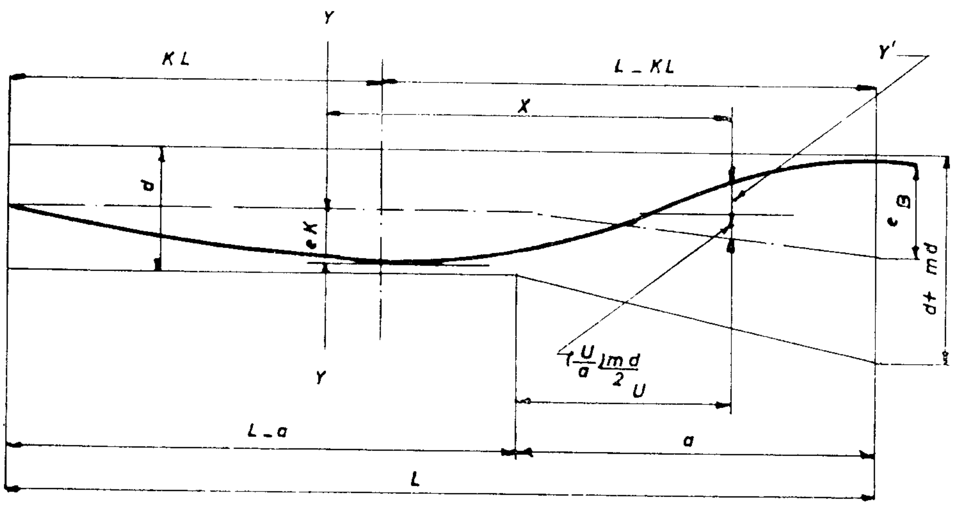
$$+(f-a)^3(3KL-6g+3L)+2(KL-g)(3g-3L)(f-a)^2$$

$$-(f-a)(KL-g)^2(2g+KL-3L)]\left(\frac{n+1-B}{n+1}\right)a\Big\}$$

$$W=\frac{Fmd}{2I}\left[\frac{(a-3L)(n+3)(n+1)+6aB}{3(n+3)(n+1)}\right] \qquad (24)$$



شکل ۷ — تیرقرینه ماهیچه در یک سمت



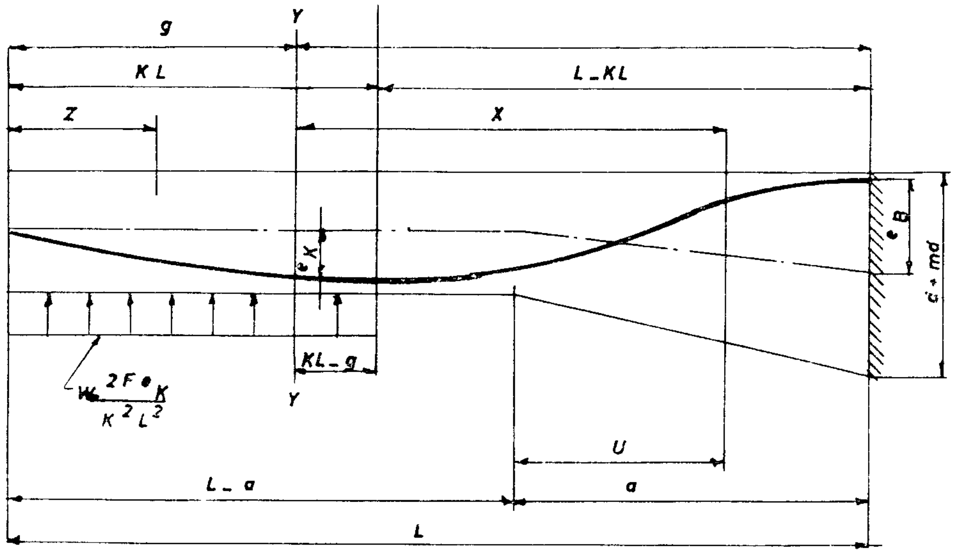
شکل ۸ — موقعیت تاندون

$$F.E.M. = M_s - \left(\frac{W}{A} + \frac{M_y}{I_y}x\right)$$

و برای انتهای چپ :

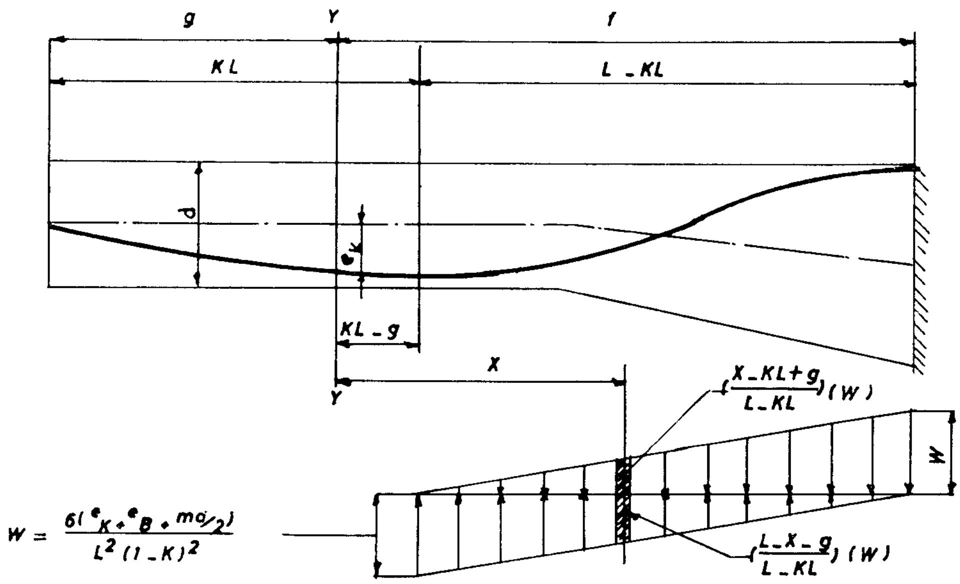
$$M_s = 0$$

$$\left(e_K + e_B - \frac{md}{2}\right)F + \frac{Fe_K a^2}{K^2L^2} + \frac{Fe_K(2L - KL)}{KL} \qquad (۲۷)$$



شکل ۹ — بارگزاری قطعه چپ

تیرخمیرتنیده با ماهیچه خطی



شکل ۱۰ — بارگزاری برای قطعه راست

$$(٢٨)\qquad W=\frac{aFmd}{٦(n+٣)\,I}(n+٣-٣B)+\frac{Fe_K}{٣(KL)I}\Big[(KL)^٢$$

$$+٣(L-KL-a)(L-٢KL-a)$$

$$+\frac{٣(n+٢-٢B)a^٢}{(n+٢)}+\frac{٣(B-n-١)(KL+٢a-٢L)a}{(n+١)}\Big]$$

$$+\frac{(e_K+e_B-\frac{md}{٢})\,F}{I(L-KL)^٣}\Big\{\frac{١}{٢}(E^٤-c^٤)+\frac{(٣KL-٦g+٣L)}{٣}(c^٣-E^٣)$$

$$+(KL-g)(٣g-٣L)(c^٢-E^٢)$$

$$+(٢g+KL-٣L)(KL-g)^٢(E-c)+\frac{٤B-n-٤}{٢(n+٤)}a^٤$$

$$-\,[-٦c+(٣KL-٦g+٣L)]\,\frac{٣B-n-٣}{٣(n+٣)}a^٣$$

$$-[-٦c^٢+٢(٣KL-٦g+٣L)c+٢(KL-g)(٣g-٣L)]\,\frac{٢B-n-٢}{٢(n+٢)}a^٢$$

$$-[-٢c^٣+(٣KL-٦g+٣L)c^٢+٢(KL-g)(٣g-٣L)c$$

$$-(٢g+٢KL-٣L)(KL-g)^٢]\frac{B-n-١}{(n+١)}a\Big\}$$

$$(٢٩)\qquad M_y=\frac{aFmd}{٢I}\Big[\frac{n+٤-٤B}{٤(n+٤)}a+\frac{c(n+٣-٣B)}{٣(n+٣)}\Big]$$

$$+\frac{Fe_K}{١٢IK^٢L^٢}\Big\{٣K^٤L^٤-٤gK^٣L^٣$$

$$+٢٤KL\Big[\Big(\frac{g}{٢}-\frac{KL}{٤}\Big)(c^٢-E^٢)+\frac{١}{٣}(c^٣-E^٣)+\frac{n+٣-٣B}{٣(n+٣)}a^٣$$

$$+\frac{(L-٢a+f-\frac{KL}{٢})(n+٢-٢B)}{٢(n+٢)}a^٢$$

$$+\frac{(-B+n+١)(L-a-\frac{KL}{٢})\,ca}{(n+١)}\Big]\Big\}$$

$$+\frac{(e_K+e_B-\frac{md}{٢})\,F}{I(L-KL)^٣}\Big\{\frac{-٢(c^٥-E^٥)}{٥}+\frac{(٣KL-٦g+٣L)}{٤}(c^٤-E^٤)$$

$$+\frac{٢}{٣}(KL-g)(٣g-٣L)(c^٣-E^٣)$$

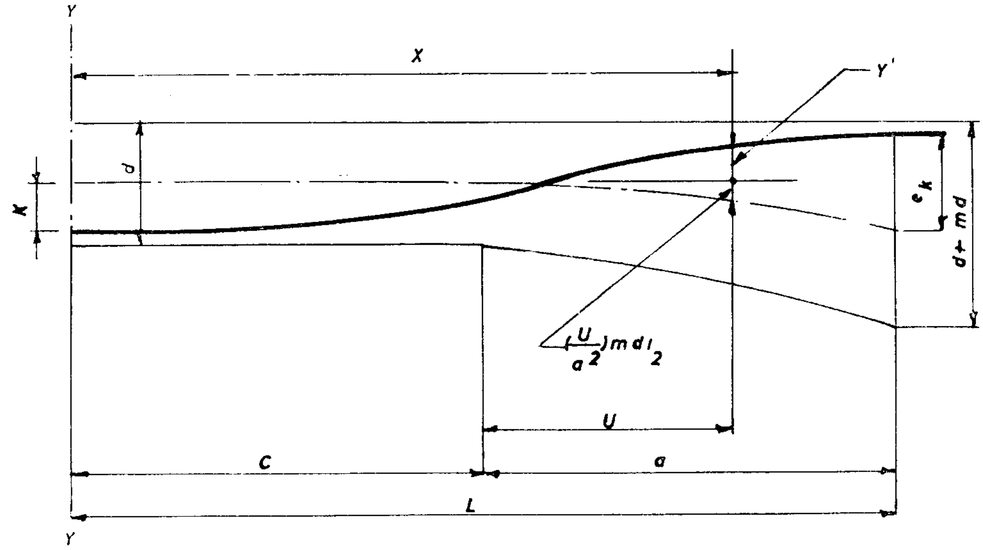
$$-\frac{١}{٢}(٢g+KL-٣L)(KL-g)^٢(c^٢-E^٢)+\frac{١٠B-٢(n+٥)}{٥(n+٥)}a^٥$$

$$+\left[-8c+(3KL-6g+3L)\right]\frac{n+4-4B}{4(n+4)}a^{4}$$

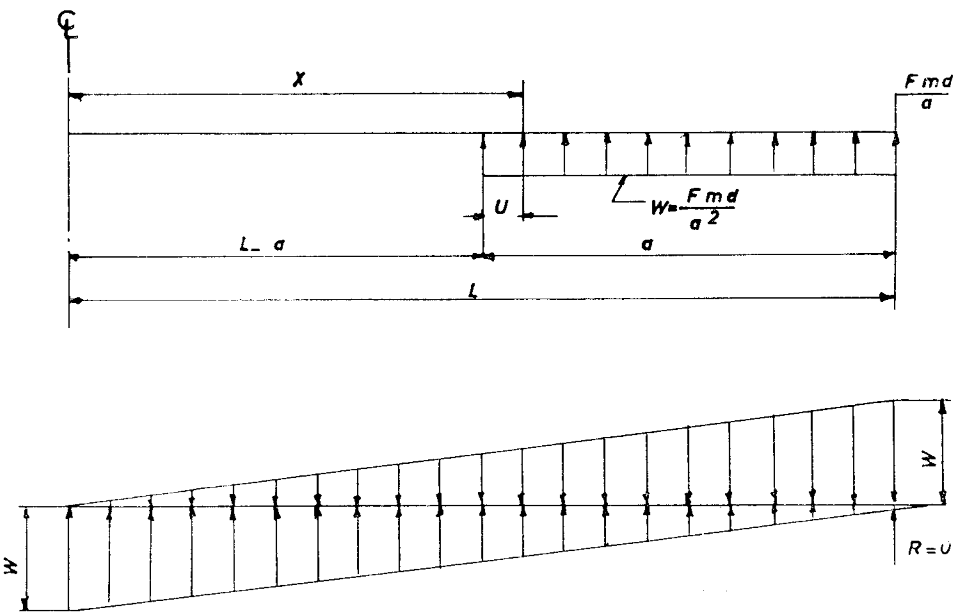
$$+\left[-12c^{2}+3(3KL-6g+3L)c\right.$$

$$\left.+2(KL-g)\,(2g-3L)\right]\frac{n+3-3B}{3(n+3)}a^{3}$$

$$+\left[-8c^{3}+3c^{2}(3KL-6g+3L)-(2g+KL-3L)(KL-g)^{2}\right.$$



شکل ۱۱ ــ تیرترینه با ماهیچه سهمی شکل

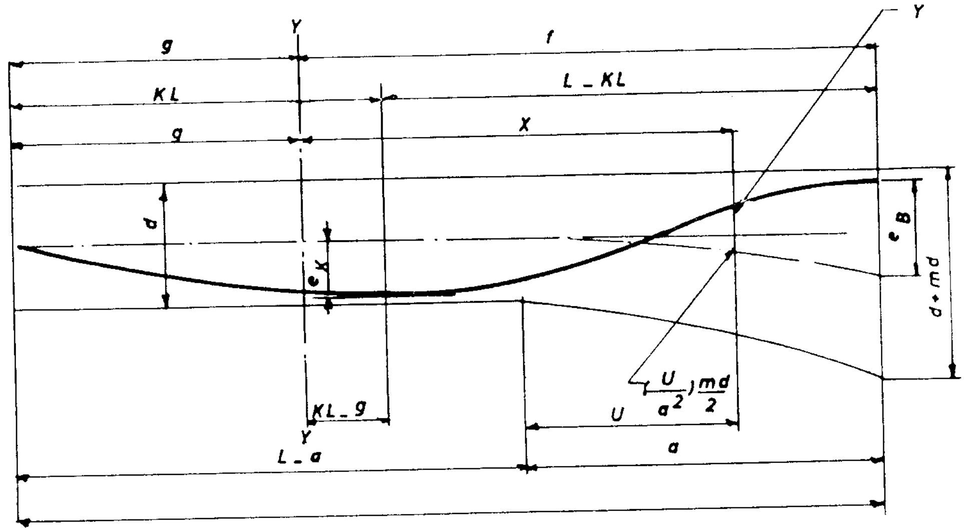


شکل ۱۲ ــ نمودار بارگذاری

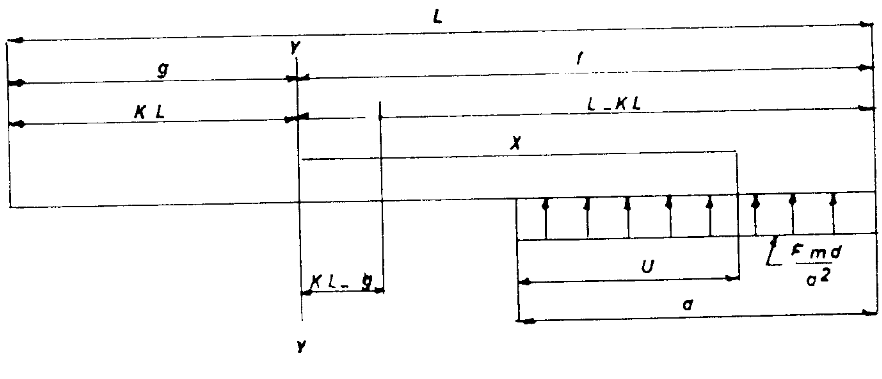
$$+4(KL-g)(3g-2L)c]\,\frac{n+2-2B}{2(n+2)}\,a^2$$

$$+[-2c^4+c^3(3KL-6g+2L)+2(KL-g)(3g-2L)c^2$$

$$-(f-a)(KL-g)^2(2g+KL-3L)]\,\frac{n+1-B}{n+1}\,a\Big\}$$



شکل ۱۳ — تیرغیرمنشوری باماهیچه سهمی شکل
در یک طرف



شکل ۱٤ — نمودار بارگزاری

مقادیر ثابت تیر ولنگرهای گیرداری :

در اینجا فورمولهای (Stiffness) و (Carry-Over Factors) را برای تیرهای با ارتفاع متغیر

محاسبه مینمائیم.

در هرمورد بجای لنگر اینرسی در قسمت با ارتفاع متغیر از فورمول مربوطه استفاده میشود.

در تقسیم لنگرها عدد (Stiffness Factor) به مقدار لنگرکه در یک طرف تیر اثرکند و در آن چرخش واحدی تولید نماید بنحوی که طرف دیگر تیرگیردار فرض شود اطلاق میشود.

این عمل بطرز سادهای بااعمال بار واحد (چرخش واحد) در یک طرف تیر و بدستآوردن لنگر در همان طرف تیر انجام میشود.

بااستفاده از طریق (Column Analogy) مقدار لنگر در همان طرف تیر مساوی است با:

$$K_A = \frac{1}{A} + \frac{M_y}{I_y} x_A \qquad (۳۰)$$

ولنگر در طرف مقابل مساویست با:

$$K = \frac{1}{A} + \frac{M_y}{I_y} x_B \qquad (۳۱)$$

وعدد Carry-Over Factor مساویست با:

$$C_A = \frac{K}{K_A} \qquad (۳۲)$$

با قرار دادن مقادیر مربوطه برای A و M_y و I_y و X مقادیر ثابت تیر بدست خواهد آمد.

درمورد تیرهای قرینه با تغییر ارتفاع سهمیشکل و یا خطی فورمولهای Stiffness و (Carry-Over Factor) یکسان میباشد.

گرچه مقدار n کمی برای دوحالت فوق متفاوت است.

درمورد تیرهای غیر قرینه با تغییر ارتفاع خطی و یا سهمیشکل (شکل ۱۶ و ۱۷ و ۱۸)، برای بدست آوردن عددهای Stiffness و (Carry-Over Factor) در A و B مقادیر A و I_y را از معادلات ۱۴ و ۱۵ در معادلات ۳۰ و ۳۲ قرار میدهیم. دراینمورد:

$$X_A = (-g)$$

و

$$X_B = +f$$

f یا:

$$M_y = (-g)$$

بسته بآنکه مقدار Stiffness در نقطهٔ A یا B مورد نظر باشد.

فورمولهای Stiffness اصلاح شده درانتهای B وقتیکه انتهای (A) مفصلی باشد.

با استفاده از فورمولهای (Slope-Deflection) برای تیر با ارتفاع متغیر (Haunched) AB، لنگرها در نقطه A و B برحسب چرخشهای نقاط A و B (θ_A و θ_B) بشرح زیر است.

$$M_A = K_A\theta_A + K\theta_B = 0$$
$$M_B = K\theta_A + K_B\theta_B$$

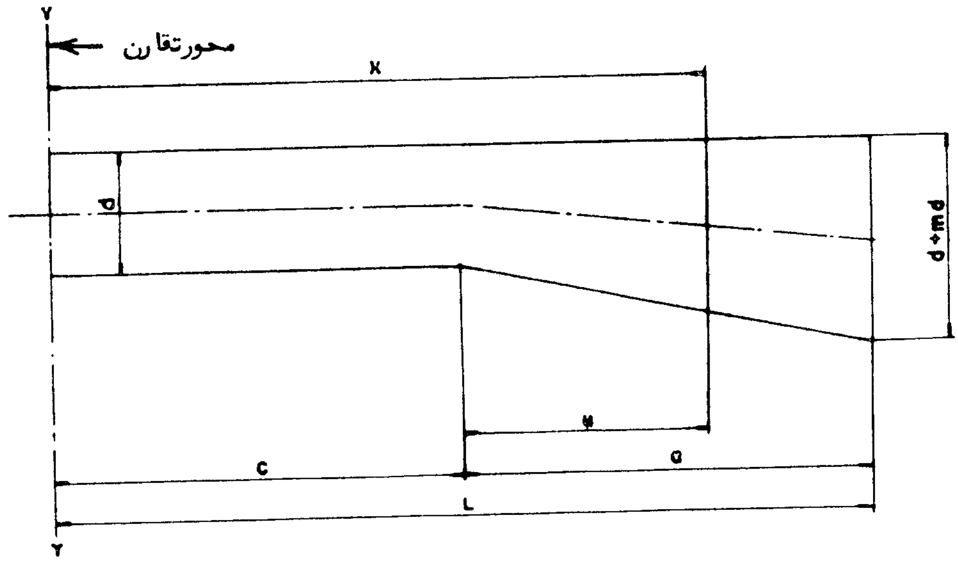
و چون :

$$K = C_A \quad K_A = C_B K_B$$

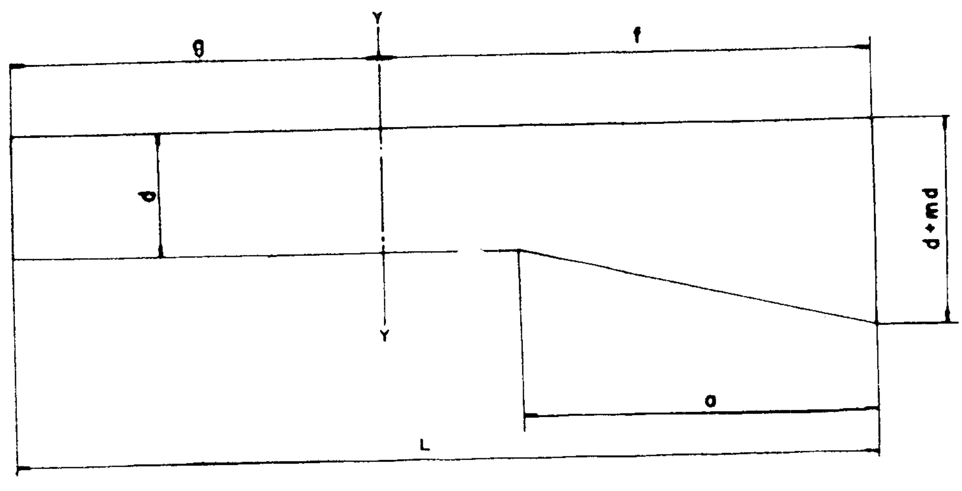
و اگر بجای θ_A از معادلهٔ :

$$M_A = 0$$

قرار دهیم مقدار Stiffness اصلاح شده در B مساوی است با :



شکل ۱۵ — تیرقرینه با ماهیچه خطی



شکل ۱٦ — تیرغیرقرینه با ماهیچه خطی د ریکطرف

(۳٤) $$\frac{M_B}{\theta_B}=\text{adjusted stiffnets at } B=K_B(1-C_AC_B)$$

تیرهای قرینه باارتفاع متغیر خطی یا سهمی‌شکل ـ لنگرهای‌گیرداری برای بار یکنواخت :

بااستفاده ازطریقه Column Analogy یک تیر روی دو تکیه ساده با مقطع متغیر بعنوان (Static Structure) انتخاب میشود.

فرمولهای لنگرهای گیرداری بقرار ذیل میباشد :

$$F.E.M.=-\left(\frac{W}{A}\right)$$

که درآن A بوسیله فورمول (٦) داده شده (شکل ۱۷) :

$$M_s=wL(L-x)-\frac{w(L-x)^2}{2}=\frac{w}{2}(L^2-x^2)$$

$$W=\int_0^c\frac{M_s dx}{I}+\int_0^a\frac{M_s du}{I_u}$$

با قرار دادن :

$$X=(c+u)$$

و انتگراسیون :

(۳۵) $$W=\frac{w}{2I}\left[(L^2c-\frac{c^3}{3})+\frac{2B-n-3}{3(n+3)}a^3+\frac{2Bc-c(n+2)}{(n+2)}a^2+\frac{(L^2-c^2)(-B+n+1)}{(n+1)}a\right]$$

عدد M_s برای تکیه گاه طرف چپ و راست مساوی باصفر میباشد یعنی :

$$M_s=0$$

تیرهای غیر متقارن با ارتفاع متغیر خطی یا سهمی‌شکل ـ لنگرهای‌گیرداری برای بار یکنواخت :

با مراجعه بشکل (۱۸) فورمول لنگرگیرداری بقرار ذیل میباشد :

$$F.E.M.=M_s-\left(\frac{W}{A}+\frac{M_y}{I_y}x\right)$$

مقادیر مربوطه A و I_y توسط فورمولهای (۱٤) و (۱٥) داده شده است :

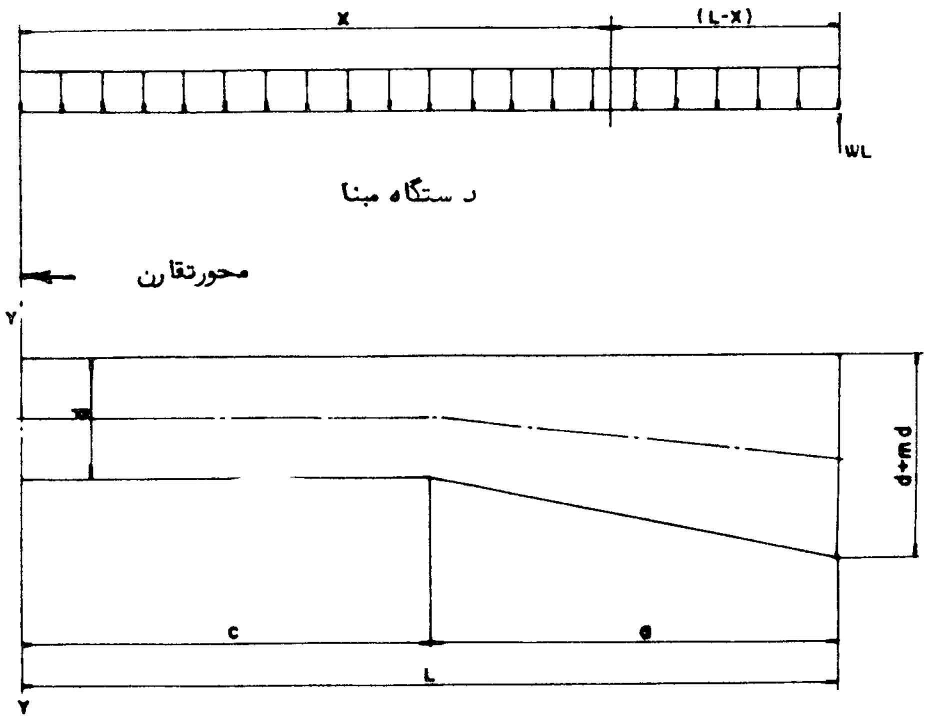
$$M_s=\frac{w(g-x)^2}{2}\qquad (-g)<x<0$$

$$M_s=\frac{w(g+x)^2}{2}\qquad 0<x<f$$

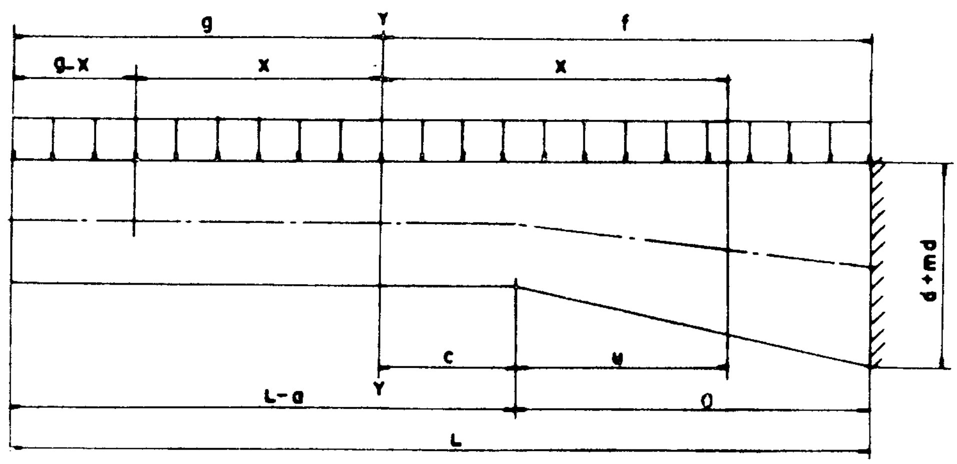
$$W=\int_0^g \frac{M_s dx}{I}+\int_0^c \frac{M_s dx}{I}+\int_0^a \frac{M_s du}{I_u}$$

با قرار دادن :

$$X=c+u$$



شکل ۱۷ ــ بارگزاری یکنواخت
در تیرقرینه با ماهیچه خطی



شکل ۱۸ ــ بارگزاری یکنواخت در تیرغیرقرینه با ماهیچه خطی در یک‌طرف

و انتگراسیون :

$$W=\frac{w}{2I}\left[\frac{g^3}{3}+(g^2c+\frac{c^3}{3}+gc^2)+\frac{-3B+n+3}{3(n+3)}a^3+\frac{(g+c)(-2B+n+2)}{(n+2)}a^2+\frac{(g+c)^2(n+1-B)}{(n+1)}a\right] \quad (36)$$

$$M_y=\int_0^g\frac{M_s(-x)dx}{I}+\int_0^c\frac{M_sxdx}{I}+\int_0^a\frac{M_sxdu}{I_u}$$

$$M_y=\frac{w}{2I}\left[\frac{-g^4}{12}+\frac{g^2c^2}{2}+\frac{c^4}{4}+\frac{2gc^3}{3}+\frac{-4B+n+4}{4(n+4)}a^4+\frac{(3c+2g)(-3B+n+3)}{3(n+3)}a^3+\frac{(3c^2+4gc+g^2)(-2B+n+2)}{2(n+2)}a^2+\frac{(c^3+2gc^2+g^2c)(-B+n+1)}{(n+1)}a\right] \quad (37)$$

طرز استفاده از فرمولها :

اين فورمولها طريقه دقيق بدست‌آوردن لنگر درتيرهای پيش‌تنيدۀ سرتاسری و باارتفاع متغيرميباشد

مثال ـ در شكل (۱۹) و (۲۰) تير سه دهانۀ سرتاسری پيش‌تنيده باتغيير ارتفاع سهمی‌شكل‌نشان داده شده كه در مورد پلهای جاده متداول ميباشد .

در محاسبه اين تير فرض شده است كه چرخش روی تكيه گاهها آزادست وهمچنين فرض شده است كه كابل پيش‌تنيدگی در سرتاسر تير ادامه دارد . ضمناً تمام ابعاد داده شده در دستگاه آحاد انگليسی ميباشد .

همانطوريكه از شكل پيداست مقطع‌تير بشكل جعبه توخالی‌است . ارتفاع‌مقطع از "۳۱ به"۵۱ در تكيه گاه وسطی تغيير ميكند .

اولين قدم بدست‌آوردن مشخصات تير درمحل لنگراينرسی ماكزيموم ودروسط (Haunch) است .

ارتفاع تير درمقطع بفاصله U مساويست با :

$$d+\frac{u^2}{a^2}(md)$$

بازای :

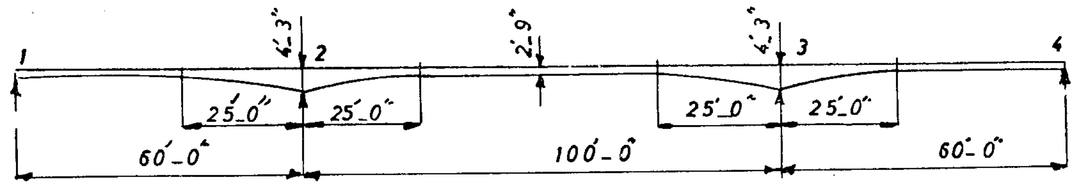
$$d=33''$$

$$u=\frac{a}{2}=12'-6''=150''$$

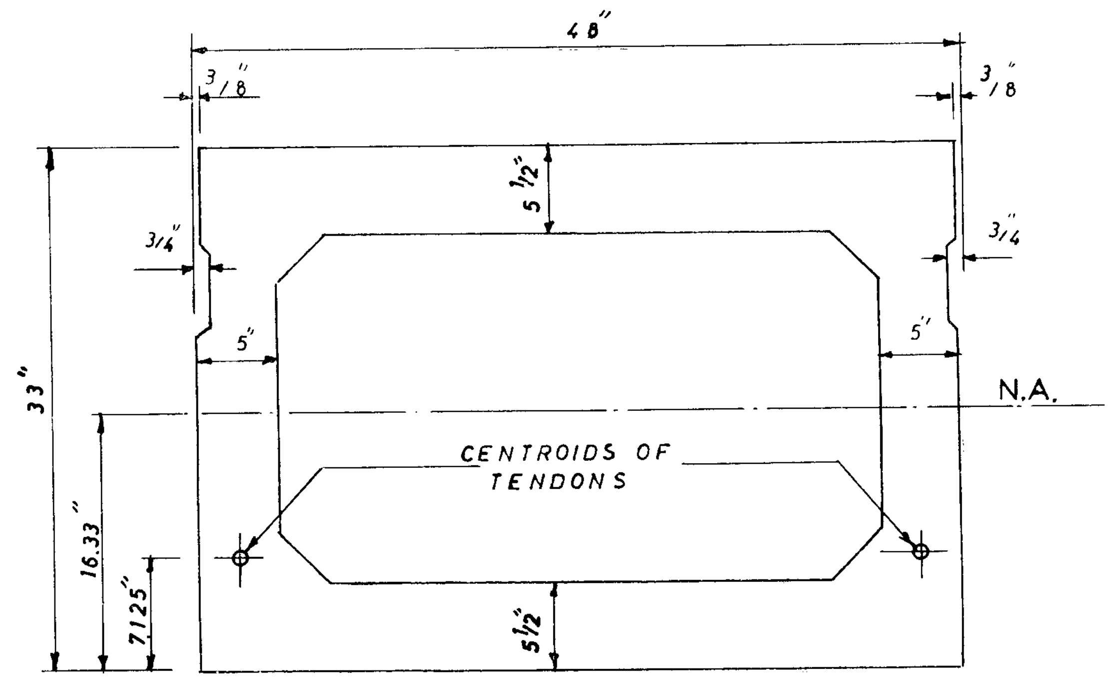
برای :

$$md=51-33=18''$$

$$h=33{,}0+4{,}5=37{,}5''$$



شکل ۱۹ — تیر سراسری سه دهانه ای باماهیچه سهمی شکل



شکل ۲۰ — مقطع تیپ برای قسمتی از تیر
که بالنگرماند ثابت است ؛

جدول شماره ۱ـ مشخصات مقطع

h*	Ac	I	y_B	y_T	Z_B	Z_T	$\frac{Z_B}{A_c}$	$\frac{Z_T}{A_c}$
۳۳ر۰	۷۵۲ر۵	I = ۱۱۰۴۹۹	۱۶ر۳۳		۶۷۶۶ر۶	۶۶۲۵ر۶	۸ر۹۹	۸ر۸۰
۳۷ر۵	۷۹۷ر۵	I_1 = ۱۵۲۴۶۲	۱۸ر۵۵		۸۲۲۰ر۰	۸۰۴۰ر۰	۱۰ر۳۰	۱۰ر۰۷
۵۱ر۰	۹۳۲ر۵	I_2 = ۳۲۹۲۷۵	۲۵ر۲۳		۱۳۰۵۰ر۰	۱۲۷۸۰ر۰	۱۴ر۰۰	۱۳ر۷۵

* تمام ابعاد برحسب اینچ یا توانهای اینچ میباشد

از روی فرمولهای (۱) و (۳) :

$$B = \frac{I_{۲}-I}{I_{۲}} = ۰٫۶۶۴$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{I_{۱}-I}{BI_{۱}}\right)}{\log\left(\frac{۱}{۲}\right)} = ۱٫۲۷۳$$

تنش‌های مجاز :

$$f_{tp} = o$$

$$f_{cp} = ۲٫۰ \text{ ksi}$$

$$f_s = ۲۲۰ \text{ ksi}$$

نیروی پیش‌تنیدگی حداکثر بوسیلهٔ تنش مجاز کنترل میشود.

برای‌آنکه تنش کششی در تار پائین‌صفر بشود لازم است که حداکثر خروج از مرکز نیروی پیش تنیدگی ازحدود هسته مرکزی $\frac{Z_B}{A_c}$ تجاوز ننماید (شکل ۲۲).

برای تار پائین :

$$\frac{F_o e}{Z_T} + \frac{F_o}{A} = ۲٫۰ \text{ ksi}$$

و برای تار بالائی :

$$\frac{F_o e}{Z_B} = \frac{F_o}{A}$$

باترکیب دو معادلهٔ فوق :

$$\frac{۲F_o}{A} = ۲٫۰ \text{ ksi}$$

$$F_o = A = ۷۵۲٫۵ \text{ kips}$$

بدست میآید که مقطع کابل پیش‌تنیدگی :

$$\frac{۷۵۲٫۵}{۲۲۰} = ۳٫۴۲ \text{ sq in}$$

۳٫۴۲ اینچ مربع بدست میآید.

۴۴ کابل* روبلینگ $\frac{۳}{۸}''$ ومقطع ۳٫۵۱ اینچ مربع میدهد.

که با دو ردیف کابل در هرجان تیر و با درنظرگرفتن فواصل مناسب برای کابل فاصلهٔ حد اقل مرکز ثقل کابلها از تار پائین "۷٫۱۲۵ بدست میآید.

* Roebling stress relieved 3/8″ strands

دهانه وسطی :

اگر فاصله مرکز ثقل کابلها در روی تکیه گاههای وسطی بهمان‌اندازه "۷٫۱۲۵ از تار بالا انتخاب بشود :

$$e_K = ۱۶٫۳۳ - ۷٫۱۲۵ = ۹٫۲۰۵''$$

$$e_A = e_B = ۲۵٫۷۶۶ - ۷٫۱۲۵ = ۱۸٫۶۴۱''$$

ولنگرهای گیرداری برای تیر پیش‌تنیده با درنظرگرفتن رقم های حاصله برای n و B برابر :

$$F.E.M. = Fe_A - (\frac{W}{A})$$

است ، که درآن W و A در فورمولهای (۹) و (۲۶) و (۶) داده شده است.

$$W = (-۱۲٫۵۶۴)F$$

$$A = ۸٫۰۱۱$$

$$\frac{F.E.M.}{F} = \frac{۱۸٫۶۴۱}{۱۲} - (\frac{۱۲٫۵۶۴}{۸٫۰۱۱} = ۱٫۵۵۳ - ۱٫۵۶۸ = -۰٫۰۱۵\ (Ft)$$

دهانه‌های کناری :

فرض میکنیم :

$$KL = ۲۸' - ۰''$$

$$e_A = 0$$

$$e_B = ۱۸٫۶۴۱\ in$$

$$e_K = ۹٫۲۰۵\ in$$

با قراردادن مشخصات مربوطه تیر در قسمت ماهیچه (Hauneh) که در صفحات قبل آمده است‌و توجه به شکل (۹۱) داریم :

$$f = ۲۶٫۸۹۸'$$

$$g = ۳۳٫۱۰۲'$$

لنگرهای گیرداری در نقطه (۱) شکل ۹۱ مساویست با :

$$-(\frac{W}{A} - \frac{M_y}{I_y}g)$$

مقادیر W و A و M_y و I_y بوسیله معادلات (۲۸) و (۴۱) و (۹۲) و (۵۱) داده شده است:

$$W = ۱۲٫۲۹۳\ F$$

$$A = ۹٫۸۸۷$$

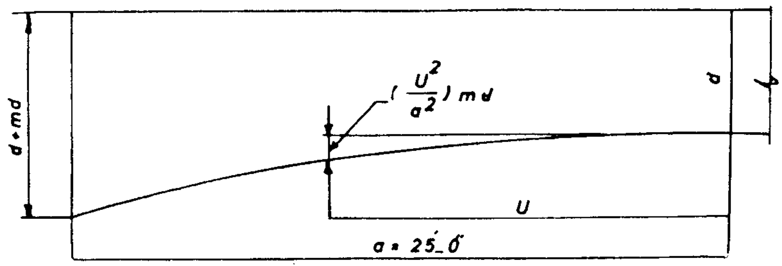
$$I_y = ۲۵۵۴٫۲۶$$

$$M_y = ۱۹۲٫۱۹۸\ F$$

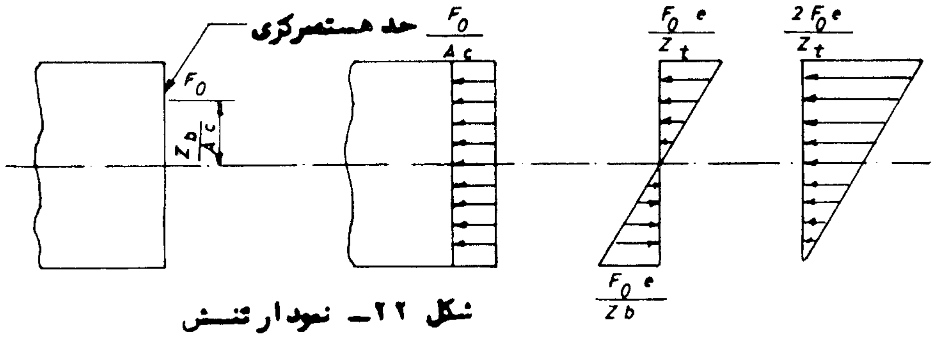
$$\frac{\text{F.E.M. ۱ در}}{\text{F}} = -\left[\frac{۱۲٫۲۹۳}{۹٫۸۸۷} - \frac{(۱۹۲٫۱۹۸)(۲۶٫۸۹۸)}{۲۵۵٤٫۲٦۰}\right]$$

$$= -\,(۱٫۲٤۳ - ۲٫۰۲٤)$$

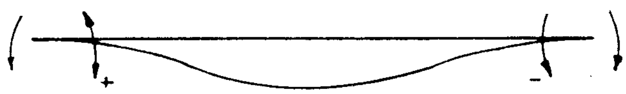
$$\frac{\text{F.E.M. ۱ در}}{\text{F}} = +\,۰٫۷۸۱ \text{ Ft.}$$



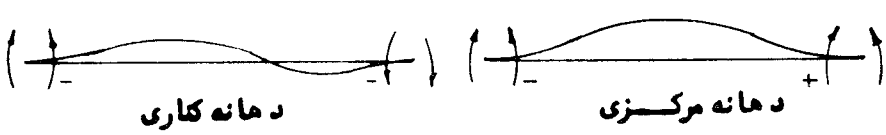
شکل ۲۱ــ ماهیچهٔ سهمی شکل



شکل ۲۲ــ نمودار تنش



علائم قراردادی برای توزیع لنگرها



شکل ۲۳ ــ علائم قراردادی

1	.616	2	
		(.706)	(.294)
-.781		-.584	-.015
+.781		+.481	
0		+.083	+.035
		-.0211	+.0211

شکل ۲٤ ــ توزیع لنگر برای بارهای بیش‌تنیدگی

و لنگر گیرداری در نقطه (۲) مساویست با :

$$M_s - \left(\frac{W}{A} + \frac{M_y}{I_y} f\right) - Fe_B$$

لنگر تیر ایزواستاتیک مربوطه در نقطه (۲) بوسیله فورمول (۲۷) داده شده است.

$$M_s = ٤٫٧٠٣\ F$$

و بدینوسیله لنگرگیرداری در نقطه (۲) بدست میآید :

$$\frac{F.E.M.\ \text{در}\ ۲}{F} = -\ ٠٫٥٨٤$$

علامت های منفی برای لنگر گیرداری ، از فرضیاتی که درموقع بدست‌آوردن فورمولهای لنگرگیرداری شده بود بدست‌آمده است و نحوهٔ معمولی علامت لنگرها برای تقسیم لنگرها در شکل (۳۲) نشان داده شده است.

برای دهانه وسطی کشش در تار بالائی مثبت فرض شده بود. بنابراین عدد ۰٫۱۰۵ نشان میدهد که کشش در تار پائین است.

برای دهانه‌های کناری کشش در تار پائین مثبت فرض شده بود بهمین‌دلیل عدد ۰٫۷۹۱+ نشان میدهد که کشش در تار پائین بوده وعدد ۰٫۵۸٤— نشان میدهد که کشش در تار بالا قرار دارد.

دهانه وسطی از تکیه گاه ۲ به تکیه گاه ۳ Carry-Over Factors , Stiffness

بااستفاده از فورمول (۳۰) برای‌حالت قرینه عدد (Stiffness) برای تکیه گاه (۲) و برای تیر ۳-۲ بشرح زیر بدست میآید :

$$A = ١٦٫٠٢٣$$

$$I_y = ١٠٦٣٠٫٤٣٤$$

$$M_y = -(a+c) = -\ ٥٠$$

$$x = -\ ٥٠$$

$$\text{Stiffness}\ K_۲ = \frac{١}{١٦٫٠٢٣} + \frac{(٥٠)^۲}{١٠٦٣٠٫٤٣٤} = ٠٫٠٦٣ + ٠٫٢٣٥ = ٠٫٢٩٨$$

بعلت تقارن :

$$\frac{١}{۲} K_۲ = ٠٫١٤٩$$

(چون هم بارگذاری وهم تیر قرینه است).

دهانه‌کناری ـ تکیه‌گاه شماره ۱ و ۲ :

معادلات (۳۰) تا (۳۲) درمورد تیرهای غیرمتقارن است.

$$K_{A_۱} = \frac{١}{A} + \frac{M_y}{I_y} x_A = \frac{١}{A} + \frac{g^۲}{I_y}$$

$$K = \frac{۱}{A} - \frac{gf}{I_y}$$

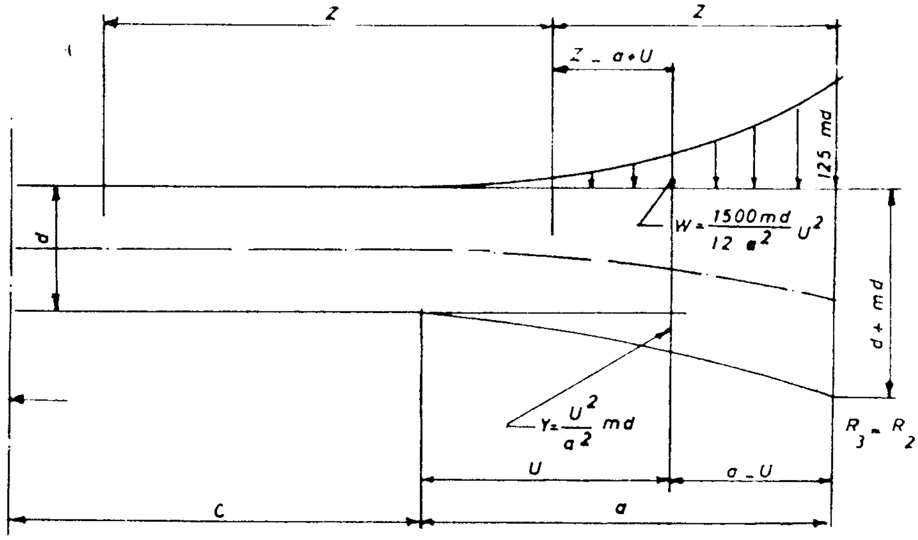
که مقادیر مربوطه :

$C_1 =$ ۰٫۶۱۶ $\qquad K =$ ۰٫۲۳۷ $\qquad K_1 =$ ۰٫۳۸۴

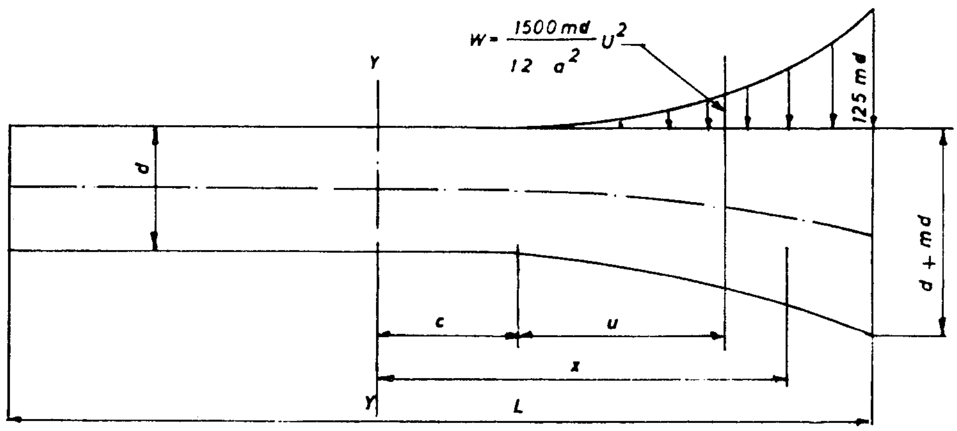
و (Carry-Over Factor) از تکیه‌گاه یک به تکیه‌گاه ۲ است.

(Stiffness) در تکیه‌گاه ۲ برای قطعه ۱-۲ :

$K_2 =$ ۰٫۵۰۰ $\qquad K =$ ۰٫۲۳۷



شکل ۲۵ ـ نمودار بارگزاری سهمی شکل (ماهیچه ای) درتیر ترسنه باماهیچهٔ سهمی شکل



شکل ۲۶ ـ نمودار بارگزاری ماهیچه ای درتیرغیرترسنه باماهیچهٔ سهمی شکل دریکطرف

C۲ = ۰ر۴۷ (Carry-Over Factor) از تکیه گاه ۲ به تکیه گاه ۱

(Stiffness) اصلاح شده برای تکیه گاه ۲ (چون تکیه گاه ۱ مفصلی است).

اگرعددهای بدست‌آمده در بالارا در معادله (۳۴) قراردهیم (Stiffness) اصلاح شده درتکیه گاه ۲ مساوی است با (۰ر۳۵۸) و شکل ۳۴ تقسیم لنگرها را برای لنگرهای گیرداری حاصله نشان میدهد.

همانطوریکه ملاحظه میشود درهرمورد عددلنگر برنیروی پیش‌تنیدگی تقسیم‌شده است که درنتیجه مستقیماً خروج‌ازمرکز حاصله بوسیله لنگرهای حاصله از شکل کابل پیش‌تنیدگی را بدست میدهد که دراین مورد مثلا ۰ر۲ است.

به لنگرهای گیرداری فوق و تنش های حاصله باید لنگرهای گیرداری مربوط به وزن مرده تیر نیز اضافه شود که چون دراینمورد مقطع تیر متغیر است بار وارد بصورت بار خطی و درمورد نیمرخ سهمی شکل بار بشکل‌سهمی‌میباشد شکل های (۲۵)و(۲۶) عیناً بااستفاده از طریقه (Column Analogy) حل‌میشود. ودراینمورد بذکر نتایج حاصله برای دهانه‌های وسطی وکناری اکتفا میگردد:

دهانه کناری:

At ۱ = ۲۰۸ Kip−Ft
At ۲ = ۳۰۵ Kip−Ft

دهانه وسطی:

۷۱۶ Kip−Ft

جدول تقسیم لنگرها ذیلا نشان داده میشود:

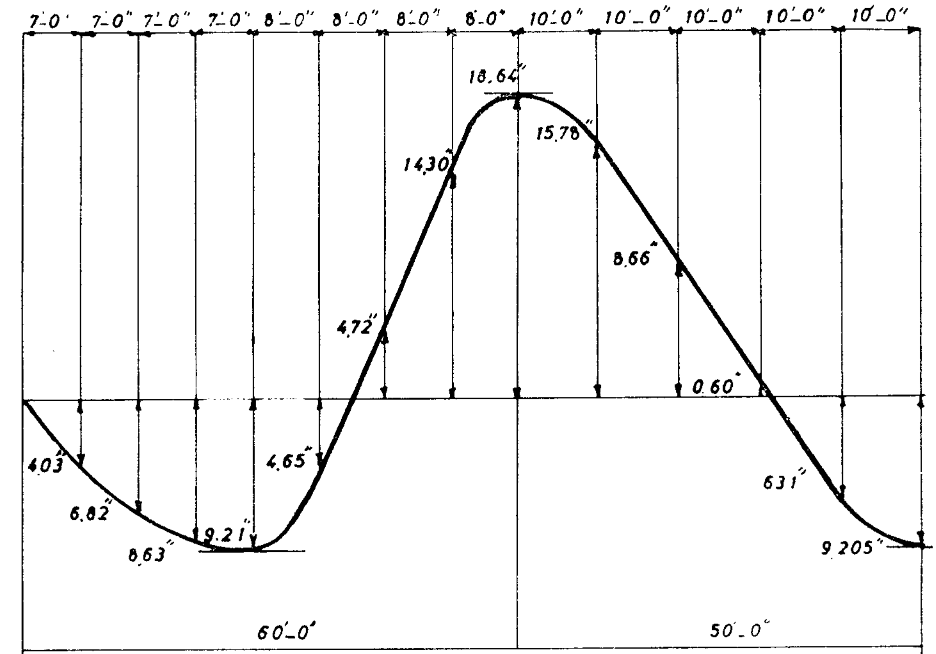
۶۱۶ →

۱	۲	
	(۰ر۷۰۶)	(۰ر۲۹۴)
+۲۰۸	−۳۰۵	+۷۱۶
−۲۰۸	−۱۲۸	
۰	−۱۹۹	−۸۳
	−۶۳۳	+۶۳۳

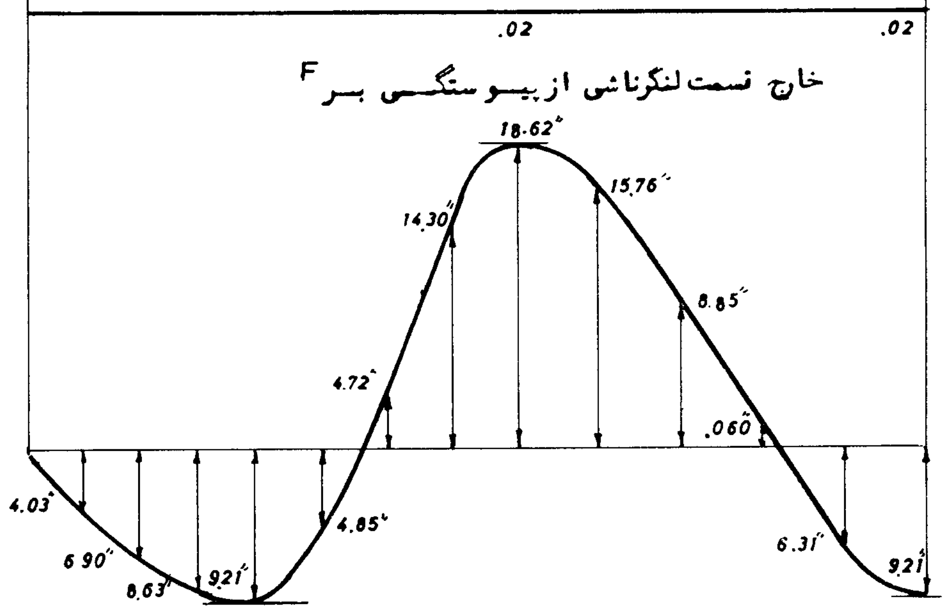
شکل ۲۷ - توزیع لنگرها برای بارمرده

شکل (۲۸) نیمرخ طولی دقیق کابل پیش‌تنیدگی‌را که درحقیقت خط اثر نیروی اولیه است نشان میدهد. در بالای شکل (۳۰) خط اثرنیروکه براثر لنگرهای مربرط به‌بارمرده (تقسیم برنیروی پیش‌تنیدگی بدست آمده است نشان داده شده و در پائین آن نتیجه خط اثر نیروها بر اثر پیش‌تنیدگی ولنگرهای بار مرده نشان داده شده است.

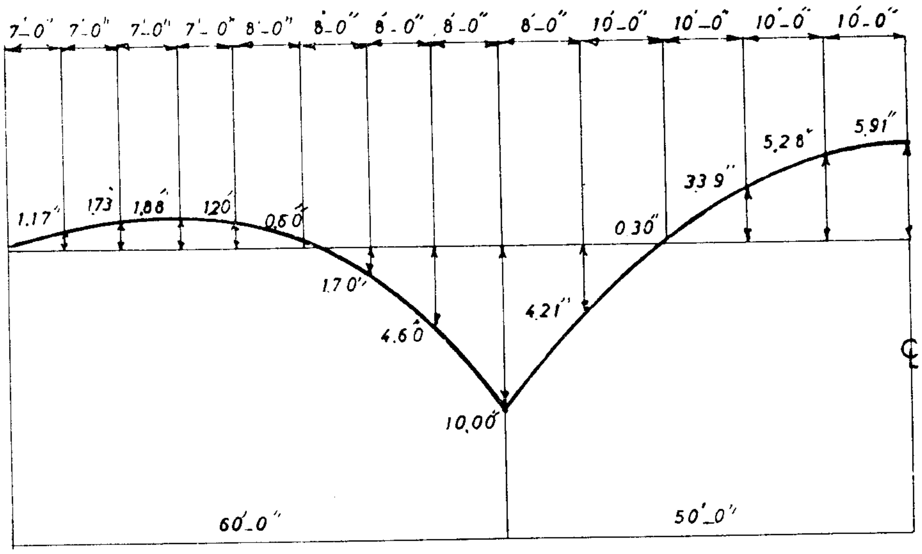
در این‌مثال بار زنده بحساب نیامده است. ودرمورد تأثیر بار زنده طرز عمل عین‌آنچه که در مورد بار مرده گفته شده، میباشد و تمام لنگرهای حاصله تقسیم بر نیروی پیش‌تنیدگی باعث تغییر خط اثر نیرو میشود.



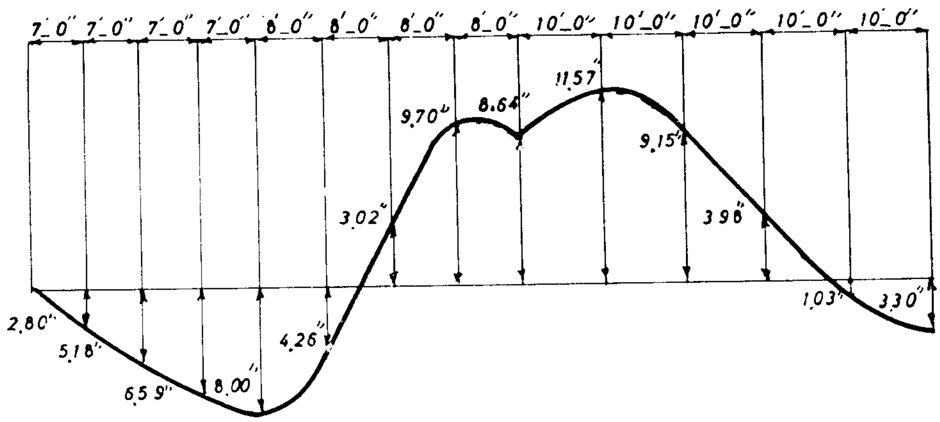
شکل ۲۸ — نیمرخ طولی مرکز ثقل فولاد پیش‌تنیده



شکل ۲۹ — خط فشارناشی از نیروی پیش‌تنیدگی



خط فشار ناشی از لنگر بار مرده تقسیم بر F



شکل ۳۰ــ خط فشار نهائی از بار مرده و نیروی پیش تنیدگی

منابع مورد استفاده

1. Weiskopf and Pickworth, *Tapered Structural Members.* Transactions of the American Society of Civil Engineers (Vol. 102, 1937), p.1.
2. T.Y. Lin, *Design of Prestressed Concrete Structures.* 2nd Ed. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1963.
3. *Roebling Stress Relieved Strand.* Roebling Bulletin PC-945, The Roebling Company, 1959.
4. J.P.Donovan, *Analysis of Haunched Plate Girder Members.* Unpublished Master's Thesis, Illinois Institute of Technology, June 1958.
5. L.E. Grinter, *Theory of Modern Steel Structures.* Vol. II, The Macmillan Company, 1947, p. 266.
6. E. I. Fiessenheiser, *Rapib Design of Coutinuous Prestressed Concrete Members.* American Concrete Institute Journal, April, 1954.
7. M. Talischi, *Design of Continuous Prestressed Haunched Beams.* Master of Science Thesis, Illionis Institute of Technology, Chicago, Illinois, Jan. 1965.