توپولوژی شبکه‌های برقی، گرافهای جهت‌دار و بدون جهت

نوشته :

مهندس ذواشتیاق

استادیار دانشکده فنی

درشماره قبلی راجع به گرافهای جهت‌دار، طرز تشکیل گراف وموارداستعمال‌آن شمه‌ای ذکر گردید که امید است مورد توجه خوانندگان گرامی قرارگرفته باشد ذیلا گرافهای بدون جهت را مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

ب ـ گرافهای بدون جهت :

در این نوع گراف شاخه‌ها دارای جهت نبوده و مشخصات شاخه‌ها با هدایت آنها معین میگردد. انتقالهای شاخه‌ها که دارای بعد هدایت الکتریکی میباشند باحروف a و b و c ... نشان داده میشوند.

فرمول اصلی گراف بدون جهت عبارتست از :

$$\frac{I}{B_{mn}} = \frac{1}{\Delta} \Sigma C_r \Delta_r \qquad (1)$$

این فرمول برای تعیین مقاومت ورودی (هدایت ورودی) ـ هدایتهای متقابل شاخه‌ها و غیره بکار میرود درآنجا :

I- عبارت از شدت جریانی است که ازیکی از شاخه‌های غیرمشخص انتخابی عبور میکند و نسبت بآن شاخه هدایت ورودی ویا هدایت متقابل تعیین میگردد.

B_{mn}- فشار الکتریکی (یا شدت جریان) منبع تغذیه میباشد که به گره‌های m و n متصل‌شده‌است

C_r ـ حاصلضرب هدایتهای شاخه‌های مسیر بین گرههای m و n میباشد که از شاخه انتخاب شده بگذرد.

Δ_r ـ دترمینان سیستمی است که از سیستم اولیه ، با اتصال کوتاه نمودن شاخه‌های مسیر انتخابی C_r ، بدست میآید درصورت فرمول (۱) تعداد جملات $C_r\Delta_r$ مساوی تعداد مسیرهای ممکنه بین گرههای m و n گراف میباشد ودراینجا مسیر از m به n که ازمنبع تغذیه میگذرد منظور نمیشود.

Δ - دترمینان‌شمای الکتریکی اولیه میباشد. این دترمینان‌را میتوان ازدترمینان ماتریس هدایتهای شاخه‌های شما (مثلا از روش پتانسیل گرهی) بدست آورد ولی این‌طریق را بندرت بکار خواهیم برد زیرا در بسط Δ جملات زیادی خواهیم داشت.

برای ساده نمودن محاسبات از دوطریق زیر استفاده میکنیم.

۱- درطریقه اول دترمینان Δ را نسبت بیک گره انتخابی بسط میدهیم.

۲- در روش دوم Δ را نسبت به‌مسیرهای بین دوگره انتخابی باز میکنیم.

۱- بسط دترمینان نسبت بیک‌گره انتخابی :

اگرفرض کنیم به گره S تعداد n شاخه واردشوند که دارای هدایت‌های الکتریکی a_1 و a_2 ... a_n باشند. دترمینان Δ نسبت باین گره بشکل زیر باز میشود :

$$\Delta=\Sigma a_i\Delta_i+\Sigma a_ia_j\Delta_{ij}+\Sigma a_ia_ja_K\Delta_{ijK}+\cdots+a_ia_ja_K\cdots a_n\Delta_{ijK\cdots n} \qquad (۲)$$

که درآنجا :

$$\Sigma a_i\Delta_i=a_1\Delta_1+a_2\Delta_2+a_3\Delta_3+\cdots\cdots+a_n\Delta_n$$

میباشد.

Δ_K - دترمینانی است که ازدترمینان شمای‌اولیه بااتصال کوتاه شاخه a_K وحذف‌سایر شاخه‌هائی که به‌گره S وارد میشوند بدست‌آمده (یعنی سایر شاخه‌های این گره بدون بار میباشد).

$$\Sigma a_ia_j\Delta_{ij}=a_1a_2\Delta_{12}+a_1a_3\Delta_{13}+a_2a_3\Delta_{23}+\cdots$$

Δ_{ij}- دترمینانی است که از دترمینان شمای اولیه با اتصال کوتاه شاخه‌های i و j و k و حذف تمام شاخه‌هائی که به گره S وارد میشوند بدست‌آمده و بالاخره :

$\Delta_{ijK\cdots n}$ - عبارت ازدترمینانی است که ازاتصال کوتاه تمام‌شاخه‌های ورودی به S بدست میآید.

۲- بسط دترمینان نسبت بمسیر بین دوگره انتخابی

در این روش گرهها را طوری انتخاب خواهیم کرد که شما نسبت بآنهاتقریباً بمعنای هندسی متقارن باشد این کار محاسبات را کم میکند.

بسط دترمینان در این‌روش طبق فرمول زیر میباشد :

$$\Delta=\Sigma P_K\Delta_K \qquad (۳)$$

P_K - حاصلضرب هدایتهای الکتریکی مسیرهای K بین گرههای انتخابی است.

Δ_K - مینور مسیرهای K است که از شمای اولیه پس از اتصال کوتاه نمودن شاخه‌های مسیر K بدست‌آمده. حال برای توضیح مطالب فوق مثال زیر را میآوریم :

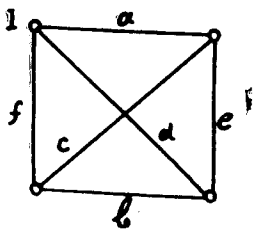
مثال ۱ - در شکل (۱) دترمینان Δ را با دوروش پیدا کنید :

حالت اول - اگر دراینحالت بخواهیم Δ را نسبت بیک گره انتخابی بسط دهیم این گره انتخابی‌را (۱) میگیریم. باین گره ۳شاخه f و d و a وارد میشوند که درفرمول (۲) همان a_3 , a_2 , a_1 میباشند پس:

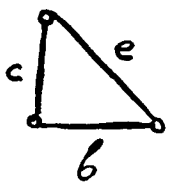
$$\Delta = a\Delta_a + d\Delta_d + f\Delta_f + af\Delta_{af} + ad\Delta_{ad} + df\Delta_{df} + adf \cdot 1$$

Δ_a ازگراف بالا بااتصال کوتاه شاخه a و باز نمودن شاخه‌های d و f بدست میآید (ش ۲) یعنی:

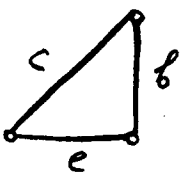
$$\Delta_a = ce + cb + eb$$



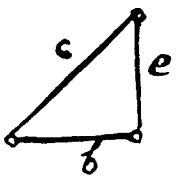
(ش۱)



(ش۲)



(ش۳)



(ش٤)

بهمین‌طریق میتوان Δ_d را از شکل (۳) تعیین نمود یعنی :

$$\Delta_d = ce + cb + eb$$

برای تعیین Δ_f شکل (٤) را خواهیم داشت یعنی :

$$\Delta_f = ce + cb + eb$$

چنانکه دیده میشود $\Delta_a = \Delta_d = \Delta_f$ میباشد.

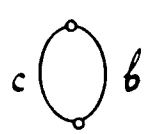
برای تعیین Δ_{ad} دوشاخه d و a را اتصال کوتاه نموده وشاخه f را باز میکنیم

» » d » » » » a و f » Δ_{af} » »

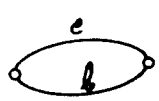
» » a » » » » d و f » Δ_{df} » »

بترتیب شکل ٥ برای Δ_{ad} وشکل ٦ برای Δ_{af} و شکل ۷ برای Δ_{df} را خواهیم داشت :

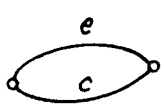
$$\Delta_{ad} = b + c \quad , \quad \Delta_{af} = b + e \quad , \quad \Delta_{df} = c + e$$



(ش٥)



(ش٦)



(ش۷)

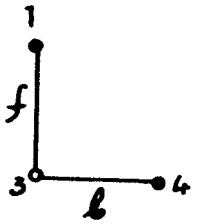
پس :

$$\Delta_{adf} = 1$$

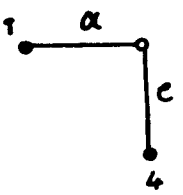
بنابراین :

$$\Delta = (a+d+f)(ce+cb+be) + ad(b+c) + af(b+e) + df(c+e) + adf$$

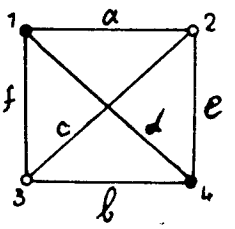
حالت‌دوم- Δ رانسبت‌بمسیر بین دو گره‌انتخابی ۱ و ٤ (گرههای‌پررنگ) بسط میدهیم(ش۸) . دراینجا پنج مسیر بین گرههای ۱ و ٤ موجود است شکلهای ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ ، بطوریکه برای مسیر بین گرههای a و e مقدار P_1 مساوی حاصلضرب هدایتهای الکتریکی این شاخه‌هاست یعنی $P_1 = ae$.



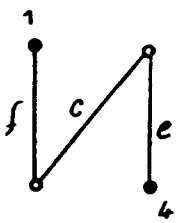
(ش ۱۰)



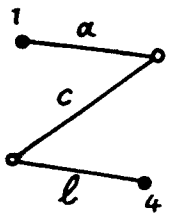
(ش ۹)



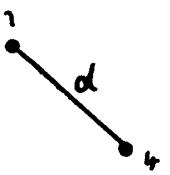
(ش ۸)



(ش ۱۳)



(ش ۱۲)

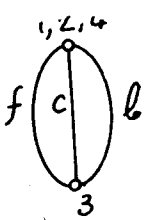


(ش ۱۱)

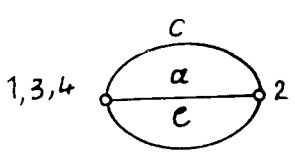
درصورتیکه a و e را اتصال کوتاه نمائیم گراف شکل ٤ ۱ راخواهیم داشت که شاخه‌های f و b و c موازی میشوند. بنابراین:

$$\Delta_1 = f + c + b$$

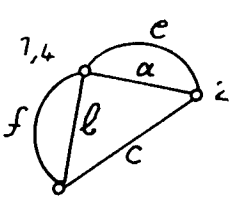
میشود. بهمین‌طریق بادرنظرگرفتن سایرمسیرها (شکلهای. ۱-۱۱-۱۲-۱۳) بترتیب‌شکلهای (۱۵-۱۶-۱۷-۱۸) را بدست خواهیم‌آورد بطوریکه:



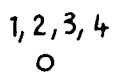
(ش ۱٤)



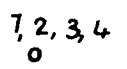
(ش ۱۵)



(ش ۱۶)



(ش ۱۷)



(ش ۱۸)

$$P_2 = fb \qquad \Delta_2 = a + e + c$$

$$P_3 = d \qquad \Delta_3 = (a+e)c + (f+b)c + (a+e)(f+b)$$

دراینجا وقتیکه a و c و b را بهم متصل نمودیم گراف تبدیل به‌یک‌نقطه شد. (ش ۱۷)

$$P_4 = acb \qquad \Delta_4 = 1$$

$$P_5 = fce \qquad \Delta_5 = 1$$

پس:

$$\Delta = \Sigma P_K \Delta_K = ae(f+c+b) + fb(a+e+c) + d[(a+e)c + (a+e)(f+b) + (f+b)c] + acb + fce$$

دیده میشود که نتیجه هردوحالت یکسانند.

موارد استعمال فرمول اصلی :

چنانکه قبلا متذکر شدیم فرمول (۱) برای تعیین هدایتهای ورودی و متقابل و پیدا کردن انتقال نسبت بجریان ویا انتقال نسبت بفشار الکتریکی وغیره بکار میرود. حال طرز استفاده ازآنرا بیان میکنیم:

$$\frac{I}{B_{mn}}=\frac{۱}{\Delta}\Sigma C_r\Delta_r \qquad (۱)$$

گرههائی از گراف که دارای منبع تغذیه میباشد با m و n مشخص میسازیم.

منبع تغذیه ممکن است بدوشکل باشد :

۱- نیروی محرکه الکتریکی ،

۲- منبع جریان.

اگر چندین منبع تغذیه داشته باشیم از روش سوپرپوزیسیون (رویهم گزاری) استفاده خواهیم کرد بطوریکه هریک ازمنابع را به‌تنهائی بادرنظرگرفتن مقاومت داخلی‌آنها منظور خواهیم نمود.

در فرمول (۱) برای B_{mn} یا نیروی محرکه منبع تغذیه یعنی E_{mn} و یا منبع جریان یعنی I_{mn} را خواهیم گذاشت.

I -شدت جریانی است که نسبت بآن سایرمقادیر تعیین میگردد. مثلا انتقال از منبع تغذیه برای شاخه S. I شدت جریان همان شاخه S خواهد بود.

مجموعه جملات درصورت فرمول (۱) مساوی تعداد مسیرهای ممکنه بین گرههای m و n میباشد که هریک از آنها ازشاخه انتخابی S بگذرد (چنانکه قبلا گفته شد مسیر در منبع تغذیه منظور نمیشود) در مجموع $\Sigma C_r\Delta_r$ مقادیری ممکن است با علامت مثبت و مقادیری با علامت منفی باشند زیرا C_r ممکن است مثبت و یا منفی باشد. برای تعیین علامت C_r بشرح زیر عمل میکنیم :

بطور اختیاری جهت مثبتی را در امتداد شاخه S درنظر میگیریم (علامت سهمی روی شاخه S میگذاریم) اگر جهت‌عبور C_r ازشاخه S همان‌جهت سهم باشد C_r مثبت ودرغیراینصورت منفی خواهدبود.

درمحاسبه دترمینان Δ مقاومت منبع تغذیه منظور میشود. درمواقع تغذیه با منبع نیروی محرکه، Δ را با اتصال کوتاه گرههای m و n بدست می‌آورند (یعنی مقاومت داخلی منبع تغذیه با نیروی محرکه‌را صفر میگیرند) واگر تغذیه درشاخه m و n ازمنبع جریان باشد درمحاسبه Δ این‌شاخه را باز میکنند.

برای اینکه بهتر بتوانیم فرمول (۱) را توضیح بدهیم بذکر مثالهای زیر میپردازیم :

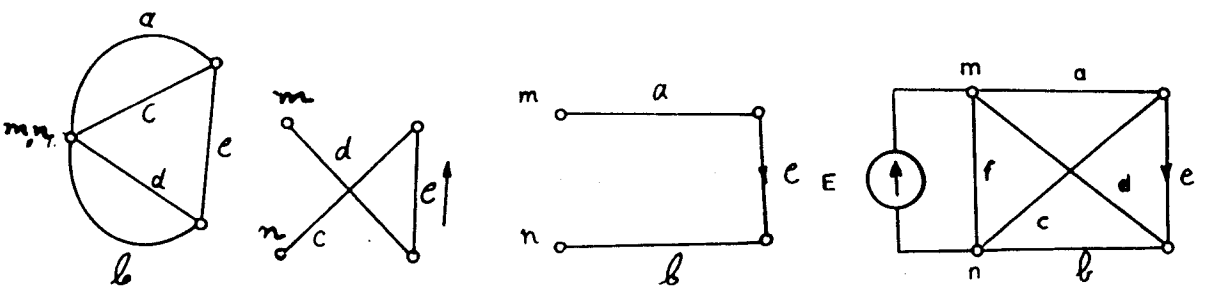
مثال ۱ - درشکل (۱۹) هدایت متقابل شاخه با نیروی محرکه (که بین گرههای m و n وصل شده) و شاخه با هدایت e مطلوبست.

برای تعیین علامت C_r درشاخه e جهتی راکه باعلامت سهم نشان‌داده شده‌است انتخاب میکنیم فرمول (۱) بشکل زیر درخواهدآمد:

$$\frac{I_e}{\text{ورودی } E}=\frac{\Sigma C_r\Delta_r}{\Delta} \qquad (۲)$$

درگراف دومسیر بین گرههای m و n وجود دارد که از شاخه e میگذرد. مسیر اولیه را باعلامت مثبت میگیریم زیرا هم‌علامت باسهم شاخه e میباشد (ش ۲۰) پس $c_1=aeb$ وچون با اتصال کوتاه a,e,b گراف تبدیل به‌نقطه میگردد پس $\Delta_1=1$ میشود. مسیر دوم C_2 ازشاخه‌های d,e,c میگذرد که جهت آن مخالف سهم شاخه e میباشد (ش ۲۱) پس $C_2=-dec$ ودرصورتیکه d,e,c را اتصال کوتاه نمائیم گراف تبدیل به نقطه گشته و $\Delta_2=1$.

پس از تعیین مجموعه جملات صورت فرمول (۲) دترمینان Δ در مخرج کسر را محاسبه میکنیم.



(ش۲۲) (ش۲۱) (ش۲۰) (ش۱۹)

چون منبع تغذیه نیروی محرکه E میباشد پس درتعیین دترمینان نقاط گرهی m و n را بهم متصل خواهیم کرد و گراف بشکل (۲۲) درخواهد آمد که میتوان آنرا به گراف (شکل ۲۳) تبدیل نمود که برای محاسبه Δ این گراف (شکل ۲۳) را نسبت بدو نقطه پررنگ تجزیه میکنیم و چنانکه می‌بینیم در اینجا بین این نقاط دومسیر وجود دارد مسیر اول شاخه (e) و مسیر دوم شاخه‌های (a+c) و (b+d) میباشد پس:

$$\Delta=e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d)\times 1$$

بنابراین:

$$\frac{\text{I خروجی}}{\text{E ورودی}}=\frac{C_1\Delta_1+C_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{aeb-dec}{e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d)}$$

اگر بخواهیم در (ش ۱۹) ضریب انتقال را نسبت بفشار الکتریکی بین شاخه ورودی (شاخه‌ای که منبع نیروی محرکه بین نقاط m و n را دارد) وشاخه خروجی (e) تعیین کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\text{V خروجی}}{\text{E ورودی}}=k_v=\frac{\dfrac{\text{I خروجی}}{(e)}}{\text{E ورودی}}=\frac{ab-dc}{e(a+c+b+d)+(a+c)(b+d)}$$

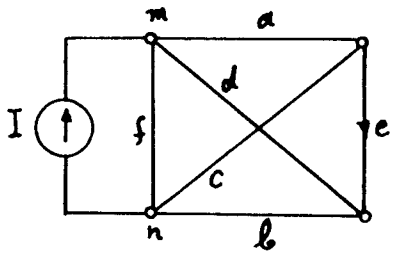
زیرا فشار خروجی درشاخه e مساوی با نسبت جریان خروجی شاخه بهدایت همان شاخه میباشد.

مثال ۲ - حال باید دید درصورتیکه درهمان شکل ۱۹ بجای منبع نیروی‌محرکه، منبع جریان‌میبود چه تغییراتی‌را درمحاسبات میداشتیم (ش ۲۴) بشرطی که انتقال نسبت به‌جریان را برای‌شاخه e تعیین کنیم ونسبت فشار خروجی درشاخه (e) را بشدت جریان ورودی بسنجیم.

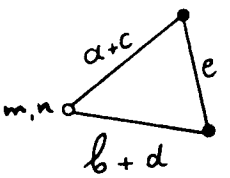
مثل‌حالت قبل جهتی‌رامثبت انتخاب‌میکنیم (جهت‌سهم‌شاخه e) پس‌فرمول دراینحالت خواهد بود:

$$\frac{\text{I خروجی}}{\text{I ورودی}} = \frac{\Sigma C_r \Delta_r}{\Delta}$$

صورت کسر مثل حالت قبلی است درصورتیکه در مخرج رابطه Δ درحالتی محاسبه" خواهد شد که



(ش ۲۴)



(ش ۲۳)

شما از منبع جریان تغذیه میشود دراینحالت منبع تغذیه باز میشود وگراف بشکل ۱ ویا ۸ درمی‌آید وچون این گراف عیناً مثل گراف شکل (۸) ویا شکل (۱) میباشد وقبلا محاسبه Δ را دیده‌ایم میتوان نوشت:

$$\frac{\text{I خروجی}}{\text{I ورودی}} = \frac{aeb-dec}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)+adf}$$

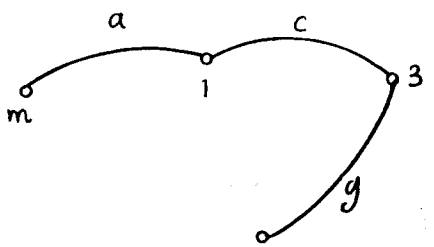
و نسبت فشار خروجی درشاخه (e) به‌جریان ورودی خواهد بود :

$$\frac{\text{V خروجی}}{\text{I ورودی}} = \frac{\frac{\text{I خروجی}}{e}}{\text{I ورودی}} = \frac{ab-dc}{(a+d+f)(ce+cb+be)+ad(b+c)+af(b+e)+df(c+e)+adf}$$

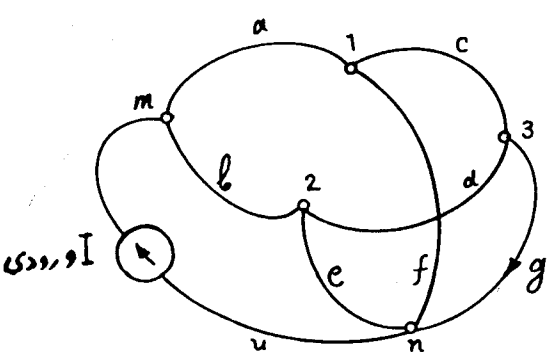
مثال ۳ - میخواهیم انتقال نسبت بجریان را در پل «دویل T» شکل ۲۶ تعیین کنیم شما از منبع جریان تغذیه میشود و شاخه خروجی g میباشد که جهت سهم در آن مشخص شده است و ازآن شدت جریان خروجی عبور میکند. پس فرمول خواهد بود :

$$\frac{\text{I خروجی}}{\text{I ورودی}} = \frac{\Sigma C_r \Delta_r}{\Delta} = \frac{C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2}{\Delta}$$

در این شما دومسیر خواهیم داشت که در شکلهای ۲۷ و ۲۹ آنهارا نشان میدهیم و برای تعیین Δ_1 و Δ_2 از شکلهای ۲۸ و ۳۰ استفاده میکنیم بطوریکه :



(ش ۲۷)

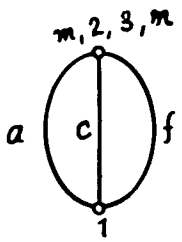


(ش ۲۶)

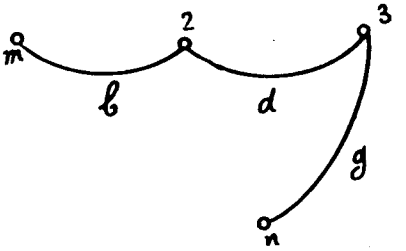
$C_1 = acg$ (از ش ۲۷)　　$\Delta_1 = b+e+d$ (از ش ۲۸)

$C_2 = bdg$ (از ش ۲۹)　　$\Delta_2 = a+c+f$ (از ش ۳۰)

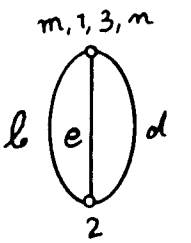
برای تعیین Δ چون منبع تغذیه منبع جریان است آنرا بازنموده ونسبت به نقاط ۱ و ۲ (پررنگ) (ش ۳۱) Δ را پیدا میکنیم. چنانکه می‌بینیم بین این نقاط ۵ مسیر خواهیم داشت. شکلهای ۳۲-۳۳-۳۴-۳۵-۳۶. با درنظر گرفتن شکلهای ۳۷-۳۸-۳۹-۴۰-۴۱ که از اتصال کوتاه شاخه‌های شکلهای ۳۲ تا ۳۶ در شما بعمل آمده است Δ تعیین میشود بطوریکه :



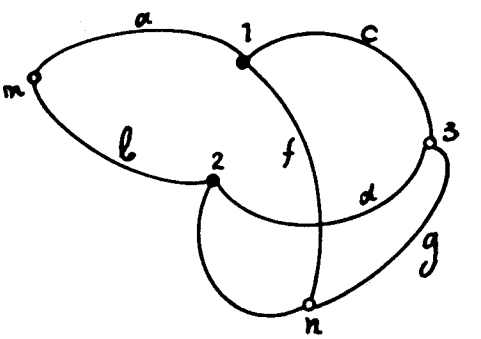
(ش ۳۰)



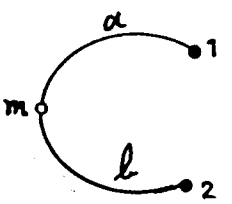
(ش ۲۹)



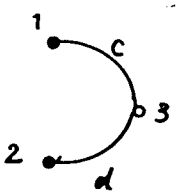
(ش ۲۸)



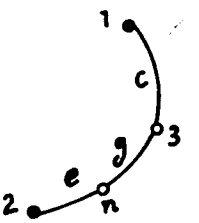
(ش ۳۱)



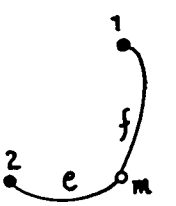
(ش ۳۲)



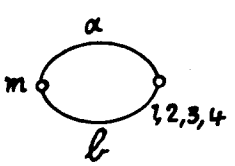
(ش ۳۳)



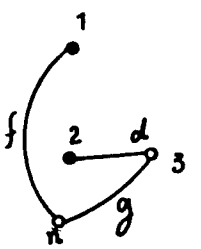
(ش ۳۵)



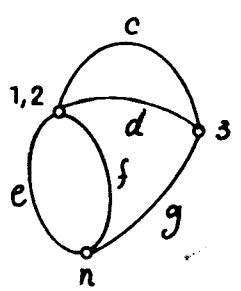
(ش ۳۴)



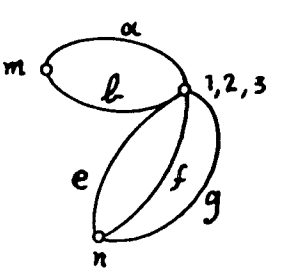
(ش ۴۱)



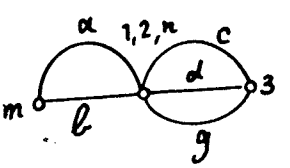
(ش ۳۶)



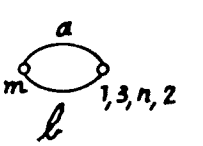
(ش ۳۷)



(ش ۳۸)



(ش ۳۹)



(ش ۴۰)

$$\Delta = ab[(c+d)g+(e+f)g+(c+d)(e+f)]+cd[(a+b)(e+f+g)]+ef[(a+b)(c+d+g)]+cge[(a+b)+fgd(a+b)]$$

پس :

$$\frac{I\ \text{خروجی}}{I\ \text{ورودی}} = \frac{C_1\Delta_1 + C_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{acg(b+e+d)+bdg(a+c+f)}{ab[(c+d)g+(e+f)g+(c+d)(e+f)]+cd(a+b)(e+f+g)+ef(a+b)(c+d+g)+cge(a+b)+fgd(a+b)}$$

درخاتمه جنبه‌های مثبت محاسبه مدارهای الکتریکی با گراف را میتوان بدینطریق خلاصه نمود:

۱ـ محاسبه با گراف به‌عملیات ساده منجرمیگردد که درصورت داشتن تمرین کافی احتمال خطا خیلی کم است.

۲ـ پیدا نمودن دترمینان Δ ازگراف خیلی ساده بوده باوقت و زحمت کم این دترمینان بدست‌میآید درصورتیکه از روش ماتریس بسیار مشکل بوده وقت وزحمت زیادی دربردارد.

۳ـ هرقدر درگراف تعداد گره‌ها بیشتر باشد محاسبه مدار الکتریکی باروش گراف بهمان‌نسبت ساده‌تر ازسایر روشها میباشد.