تئوری و محاسبات ساختمانهای منظم [1]

(استاتیک ، دینامیک و بار بحرانی)

نوشتهٔ
دکتر مارکار گریگوریان
دانشکدهٔ مکانیک دانشگاه صنعتی آریامهر

خلاصه :

مطالعه زیر حل عمومی مسائل فرکانس طبیعی ، نیروها ، تغییرشکل ارتجاعی و بار بحرانی را در ساختمانهای منظم که تحت هرنوع بار وارد باشد شرح داده و روش جدیدی را برای محاسبهٔ مقادیر مزبور ارائه مینماید.

معادلات تعادل یک عضومنفرد بصورت ماتریس نشان داده میشود. تعادل یک مفصل اختیاری بوسیلهٔ معادلات تفاوتهای محدود[2] بیان شده و سپس به صورت بسته[3] و بااستفاده از توابع سینوسی (جهت توزیع لنگرهای خمشی وچرخشهای مفاصل) حل میگردد. درساختمان مورد بحث معادلات تعادل طوری حل شده‌اند که فرمولهای نهائی تأثیرات متقابل اجزاء مختلف ساختمان را دربردارند. در پایان دو مثال عددی نیز داده شده است.

مقدمه :

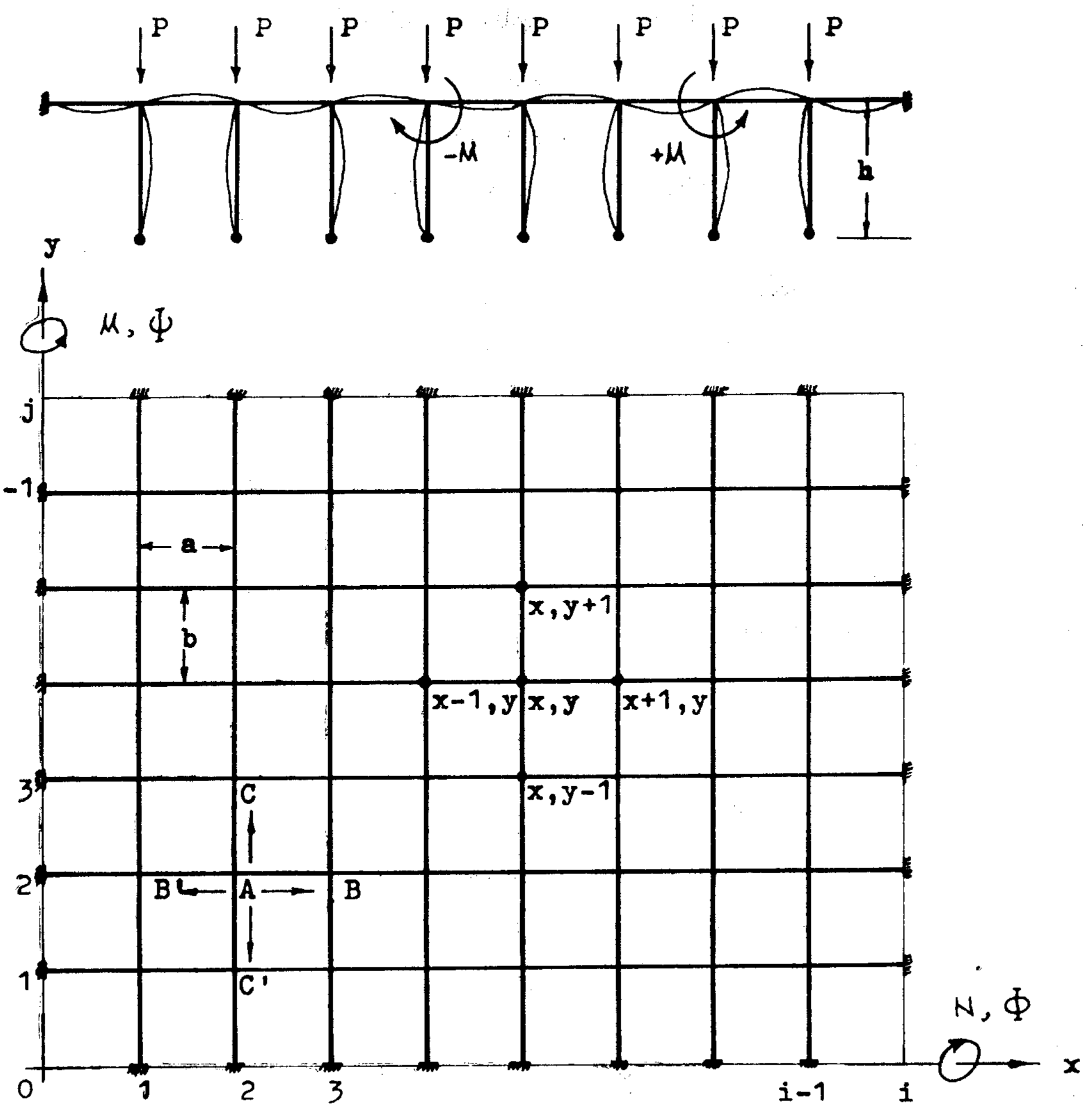
فرموله کردن مسائل ساختمانهای گوناگون فضائی که از قطعات مشابه وبطورمرتب ساخته‌شده‌اند (نظیر تورهای ساختمانی برای پوشش سقفهای بزرگ ، صفحه ها وپوسته های مشبک ، تیرهای متقاطع وغیره) نیازمند روشهای جدید ریاضی است که رفتار فیزیکی این نوع ساختمانها را طوری بیان نمایند تا مشکلات کلاسیک و فراوانی را که در تجزیه تحلیل ساختمانهای نامعین[4] مشاهده میشوند برطرف سازند.

دراین مورد میتوان از اصول تفاوتهای محدود برای فرموله کردن معادلات تعادل و همسازی[5] ارتجاعی یک واحد اصلی ساختمانهای منظم بنحو مطلوبی استفاده نمود. ساختمان مورد بحث این مقاله را

۱- Regular Structures ۲- Finite Differencces ۳- Closed Form
٤- Hyperstatic ٥- Compatibility

(شکل ۱) بعلت نظم و ترتیب خاصی که سه عضو تکراری متصل بهم در یک بند xy (دو تیر افقی و یک ستون‌قائم) دارند میتوان‌در ردیف ساختمانهای منظم گذارده ومعادلات‌تفاوتهای محدود را برای‌حل‌آن مورد استفاده قرار داد.

اهمیت این روش جدید در آن است که چرخشهای φ_{xy} و ψ_{xy} و جمع جبری لنگرهای تکیه‌گاهی ثابت N و M در نقاط اتصال y و x بوسیله پروفیلها[۱] یا نیمرخهای مشابه نشان داده میشوند. این روش تا اندازه‌ای شبیه محاسبات تیرها وصفحات بوسیله سریهای‌فوریه[۲] است که در آن‌تغییر شکل‌و نیروهای‌وارد را بانیمرخهای همشکل نشان میدهند اثبات سریهای فوق در (مرجع ۳) مقاله دیگری بطور وضوح شرح داده شده است.



(شکل ۱)

۱- Piofiles   ۲- Fourier

محاسبات :

حالت عمومی رابطه بین لنگرهای M و N و چرخشهای ψ و φ یک تیر مرتعش ساده $B'-A-B$ را که در جهت x قرار دارد و در تحت‌تأثیر نیروهای محوری و عمود برمحور قرار داشته باشد میتوان بصورت زیر نشان داد :

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}_{\substack{AB \\ AB'}} = \begin{bmatrix} Ds & 0 \\ 0 & Qu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}_{\substack{A \\ A}} + \begin{bmatrix} Dc & 0 \\ 0 & -Qv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}_{\substack{B \\ B'}} + \begin{bmatrix} MF \\ NF \end{bmatrix}_{\substack{AB \\ AB'}} \qquad (۱)$$

همچنین برای تیر $C'-A-C$ که در جهت y قرار دارد میتوان نوشت :

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}_{\substack{AC \\ AC'}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}\bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{D}\bar{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}_{\substack{A \\ A}} + \begin{bmatrix} -\bar{Q}\bar{v} & 0 \\ 0 & \bar{D}\bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}_{\substack{C \\ C'}} + \begin{bmatrix} MF \\ NF \end{bmatrix}_{\substack{AC \\ AC'}} \qquad (۲)$$

MF و NF به ترتیب لنگرهای تکیه‌گاهی ثابت مفصل اختیاری xy در جهات x و y میباشند. همچنین برای اختصار میشود نوشت :

$$D = \frac{EI}{a} \;,\; \bar{D} = \frac{EI}{b} \;,\; Q = \frac{GJ}{a} \text{ and } \bar{Q} = \frac{GJ}{b}$$

علامت (—) بالای هرحرفی نظیر $\bar{Q}$ نشان‌دهنده آنست که مقدار مزبور مربوط به عضوی است که در جهت y قرار دارد ضرایب سختی[1] s و u و ضرایب گیرداری[2] c و v به ضمیمه داده شده است . ضرایب فوق درحالت استاتیک و درصورت نبودن نیروهای محوری مقادیر زیر را دارا میباشند :

$$s = \bar{s} = ۴ \;,\; c = \bar{c} = ۲ \;,\; u = \bar{u} = v = \bar{v} = ۱$$

معادلات تعادل ۱ و ۲ را میتوان بصورت چهار دستگاه زیر خلاصه نمود :

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{T}] &= \left\{ [\overrightarrow{S}] + E_x [\overrightarrow{R}] \right\} [\theta]_{xy} + [\overrightarrow{F}]_{xy} \\ [\overleftarrow{T}] &= \left\{ [\overleftarrow{S}] + E_x^{-1} [\overrightarrow{R}] \right\} [\theta]_{xy} + [\overleftarrow{F}]_{xy} \\ [\overset{\uparrow}{T}] &= \left\{ [\overset{\uparrow}{S}] + E_y [\overset{\uparrow}{R}] \right\} [\theta]_{xy} + [\overset{\uparrow}{F}]_{xy} \\ [\overset{\downarrow}{T}] &= \left\{ [\overset{\downarrow}{S}] + E_y^{-1} [\overset{\downarrow}{R}] \right\} [\theta]_{xy} + [\overset{\downarrow}{F}]_{xy} \end{aligned} \qquad (۳)$$

که درآنها علامت (→) با مراجعه به(شکل ۱)جهت عملیات‌را درصفحه xy نشان میدهد . $[\theta]_{xy} = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}_{xy}$

۱- Stiffness ۲- Restraint

ماتریس ستونی چرخشها و $[F]_{xy}=\begin{bmatrix}MF\\NF\end{bmatrix}_{xy}$ ماتریس ستونی‌لنگرهای تکیه‌گاه $[S]$ و $[R]$ به ترتیب ماتریسهای سختی‌و گیرداری‌رابصورت خلاصه‌نشان میدهند.

E_x , E_y , E_x^{-1} , E_y^{-1} عوامل یااپراتورهای[1] جابجائی تفاوتهای محدود هستند که بنابه تعریف‌عملیات زیررا انجام میدهند:

$$E_x f(x)=f(x+1) \quad , \quad E_x^{-1} f(x)=f(x-1)$$
$$E_y f(y)=f(y+1) \quad , \quad E_y^{-1} f(y)=f(y-1)$$

برای تعادل کامل یک بند اختیاری x و y که در داخل صفحه xy قراردارد لازم است که $\Sigma[T]=0$ صادق باشد و یا:

$$(4) \qquad [T]_{xy}=\left\{[\vec{S}]+[\overleftarrow{S}]+[\dot{S}]+[\dot{S}]+E_x[\vec{R}]+E_x^{-1}[\overleftarrow{R}]+E_y[\hat{R}]+E_y^{-1}[\dot{R}]+[K]\right\}[\theta]_{xy}$$

درعبارت (4) $[T]_{xy}=\Sigma[F]_{xy}=\begin{bmatrix}M\\N\end{bmatrix}_{xy}$ جمع جبری لنگرهای تکیه‌گاهی ثابت بند xy و:

$$[K]=\begin{bmatrix}2D_x s' & 0\\ 0 & 2D_y s''\end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب سختی یک عضو قائم میباشند. همچنین:

$$D_x=\frac{EI'}{2h} \quad \text{و} \quad D_y=\frac{EI''}{2h}$$

میباشند. علائم پریم و زگوند مقادیر مربوط به یک عضو قائم را درجهات x و y بیان مینمایند. اگر معادله (4) را بسط دهیم روابط زیر را بین لنگرهای M_{xy} و N_{xy} و چرخشهای ψ_{xy} و φ_{xy} بدست میآوریم:

$$(5) \qquad M_{xy}=[2(Qu+Ds+D_x s')+Dc(E_x+E_x^{-1})-\bar{Q}\bar{v}(E_y+E_y^{-1})]\psi_{xy}$$

$$(6) \qquad N_{xy}=[2(Qu+\bar{D}s+D_y s'')+\bar{D}\bar{c}(E_y+E_y^{-1})-Qv(E_x+E_x^{-1})]\varphi_{xy}$$

ملاحظه میشود که دو رابطهٔ (5) و (6) حل کامل مسئله‌را در برداشته و بعلت مستقل بودن M_{xy} و M_{xy} از یکدیگر میتوان این دو معادله را جداگانه حل نمود.

روش حل:

هردو انتهای تیرهای سرتاسری x و y درگیر بوده و مقادیر چرخشها و پیچشها در این نقاط صفر میباشند. بنابراین سریهای محدود سینوسی بآسانی توزیع چرخشها و پیچشها را بیان نموده و ضمناً شرایط سرحدی‌صادق‌میباشند:

$$(7) \qquad \psi_{xy}=\sum_{m=1}^{i-1}\sum_{n=1}^{j-1} A_{mn}\,.\,\sin\rho x\,.\,\sin\mu y$$

1- Operator

$$\varphi_{xy}=\sum_{m=1}^{i-1}\sum_{n=1}^{j-1} B_{mn}\,.\,\sin\rho x\,.\,\sin\mu y \qquad (8)$$

حل کامل این مسئله مستلزم تعیین دامنه‌های A_{mn} و B_{mn} میباشد. باید درنظر داشت که در سریهای بالا متغیرهای x و y اعداد صحیحی هستند که مواضع مفاصل ساختمان را نشان میدهند i و j بترتیب تعداد دهانه‌های مرتب (یا فواصل منظم بین پایه‌ها) رادر جهات x و y نشان میدهند. پارامترهای ρ و μ دارای مقادیر زیر میباشند:

$$\rho=\frac{m\pi}{i} \quad , \quad m=1\,,2\,,3\,,\ldots\,,i-1$$

$$\mu=\frac{n\pi}{j} \quad , \quad n=1\,,2\,,3\,,\ldots\,,j-1$$

بهمین نحو میتوان از سریهای محدود سینوسی برای نشان دادن لنگرهای تکیه‌گاهی ثابت (جمع جبری) مفاصل y و x بصورت زیر استفاده نمود:

$$M_{xy}=\sum_{m=1}^{i-1}\sum_{n=1}^{j-1} M_{mn}\,.\,\sin\rho x\,.\,\sin\mu y \qquad (9)$$

$$N_{xy}=\sum_{m=1}^{i-1}\sum_{n=1}^{j-1} N_{mn}\,.\,\sin\rho x\,.\,\sin\mu y \qquad (10)$$

با استدلالی مشابه‌آنچه که درتجزیه و تحلیل سریهای‌فوریه بکار برده میشود میتوان جملات عمومی M_{mn} و N_{mn} را در سریهای مضاعف (۹) و (۱۰) از رابطهٔ کلی زیر بدست آورد:

$$F_{mn}=\frac{4}{i\times j}\times\sum_{x=1}^{i-1}\sum_{y=1}^{j-1} f(x\,,y)\,.\,\sin\rho x\,.\,\sin\mu y$$

سپس:

$$M_{mn}=\frac{4}{i\times j}\times M_{x'y'}\,.\,\sin\rho x'\,.\,\sin\mu y' \qquad (11)$$

$$N_{mn}=\frac{4}{i\times j}\times N_{x'y'}\,.\,\sin\rho x'\,.\,\sin\mu y' \qquad (12)$$

با قرار دادن (۱۱) و (۱۲) در (۹) و (۱۰)، (۷) و (۸) در (۵) و (۶) و بعد از ساده کردن جملات معادلاتی‌را بدست میآوریم که‌چرخشهای ψ و φ یک بند x و y را بالنگرهای تکیه‌گاهی ثابتی که‌دریک بند دیگری نظیر ´x و ´y وجود دارند مربوط میسازند.

بنابراین:

$$(۱۳)\qquad \psi_{xy} = ۲M_{x'y'} \sum_{m=۱}^{-۱} \sum_{n=۱}^{j-۱} \frac{\sin\frac{m\pi x'}{i} \sin\frac{m\pi y'}{j} \sin\frac{m\pi x}{i} \sin\frac{n\pi y}{j}}{i \times j\left[(\bar{Q}\bar{u} + Ds + D_x s') + Dc\cos\frac{m\pi}{i} - \bar{Q}\bar{v}\cos\frac{n\pi}{j}\right]}$$

$$(۱٤)\qquad \varphi_{xy} = ۲N_{x'y'} \sum_{m=۱}^{i-۱} \sum_{n=۱}^{j-۱} \frac{\sin\frac{m\pi x'}{i} \sin\frac{n\pi y'}{j} \sin\frac{m\pi x}{i} \sin\frac{n\pi y}{j}}{i \times j\left[(Qu + \bar{D}\bar{s} + D_y s'') + \bar{D}\bar{c}\cos\frac{\pi n}{j} - Qv\cos\frac{m\pi}{i}\right]}$$

از معادلات (۱۳) و (۱٤) دیده میشود که x و x' ، y و y' میتوانند بجای یکدیگر قرار گیرند یعنی :

$$\psi(x, y, x', y') = \psi(x', y', x, y)$$

$$\varphi(x, y, x', y') = \varphi(x', y', x, y)$$

قابلیت تعویض و تبدیل متغیرهای اصلی بالا بدین معنی است که میتوان ضریب اثر چرخشهای مفصل y' و x' را هنگامیکه لنگر واحد $M=N=۱$ در مفصل y و x اعمال میشود بااستفاده از معادلات (۱۳) و (۱٤) بدست آورد. بعد از بدست آوردن چرخشهای ψ_{xy} و φ_{xy} از (۱۳) و (۱٤) میتوان به آسانی لنگرهای پیچشی و خمشی بندهای مورد نظر را یا بطرق عادی (رابطه ۳) و یا بااستفاده از روابط زیر محاسبه نمود :

$$\overrightarrow{M}_{xy} = D(s + cE_x)\psi_{xy} \quad , \quad \overleftarrow{M}_{xy} = D(s + cE_x^{-1})\psi_{xy}$$

$$\overrightarrow{N}_{xy} = Q(u - vE_x)\varphi_{xy} \quad , \quad \overleftarrow{N}_{xy} = Q(u - vE_x^{-1})\varphi_{xy}$$

$$\overset{\downarrow}{N}_{xy} = \bar{D}(\bar{s} + \bar{c}E_y)\varphi_{xy} \quad , \quad \overset{\downarrow}{N}_{xy} = \bar{D}(s + \bar{c}E_y^{-1})\varphi_{xy}$$

$$\overset{\downarrow}{M}_{xy} = \bar{Q}(\bar{u} - \bar{v}E_y)\psi_{xy} \quad , \quad \overset{\downarrow}{M}_{xy} = \bar{Q}(u - vE_y^{-1})\psi_{xy}$$

باید درنظر داشت که درصورت استفاده از فرمولهای فوق باید مقادیر لنگرهای تکیه گاه ثابت را بطور مناسب به این روابط افزود.

دو مثال عددی زیر جهت نشان دادن کار برد معادلات (۱۳) و (۱٤) در مسائل استاتیک و تعیین بار بحرانی یک ساختمان سادهٔ شکل (۲) داده شده است.

مثال ۱ـ استاتیک :

عضو ۱۱-۱۲ (یک یک ـ دو یک) ساختمان شکل (۲) تحت تأثیر باری است گسترده که مقدار آن از صفر در مفصل ۱۱ بطور خطی به مقدار qL درمفصل ۱۲ افزایش مییابد. خواص اجزاء مختلف ساختمان طوری فرض شده‌اند که طول تمام آنها برابر L و EI و GJ درهمه‌آنها یکسان و همچنین $GJ = \frac{EI}{٤}$ میباشد:

$$\dot{D} = \bar{D} = ٤Q = ٤\bar{Q} = ۲D_x = ۲D_y = \frac{EI}{L}$$

اگر $M=\frac{qL^2}{60}$ باشد لنگرهای تکیه‌گاهی ثابت مفصلهای ۱۱و۲۱ به ترتیب $-2M$ و $+3M$ خواهند بود. یعنی :

$$M_{mn}=\frac{4M}{9}\left(2\sin\frac{m\pi}{3}-3\sin\frac{2m\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi}{3}$$

تیرهائی که درجهت y قرار دارند تحت تأثیر نیروئی نمیباشند . بنابراین $NF=0$ است و بالنتیجه $N_{mn}=0$ میگردد .

باستفاده از معادلات (۱۳) و (۱٤) میتوان نشان داد که :

$$\varphi_{xy}=0$$

و :

$$\psi_{xy}=\frac{8ML}{9EI}\sum_{m=1}^{2}\left(2\sin\frac{m\pi}{3}-3\sin\frac{2m\pi}{3}\right)\sin\frac{m\pi x}{3}\sum_{n=1}^{2}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{n\pi y}{3}}{\left[25+8\cos\frac{m\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right]}$$

که از آنجا :

$$\psi_{11}=\frac{ML}{2EI}[-0.035087-0.033898+0.2439+0.232555]=+0.203735\frac{ML}{EI}$$

$$\psi_{21}=\frac{ML}{2EI}[-0.035087-0.033898-0.2439-0.242555]=-0.27772\frac{ML}{EI}$$

$$\psi_{12}=\frac{ML}{2EI}[-0.035087+0.03398+0.2439-0.232555]=+0.005078\frac{ML}{EI}$$

$$\psi_{21}=\frac{ML}{2EI}[-0.035087+0.033898-0.2439+0.232555]=-0.006267\frac{ML}{EI}$$

با در دست داشتن چرخشهای بالا میتوان مقادیر لنگرهای خمشی وپیچشی مفاصل ۱۱ و ۲۱ رابدست‌آورد :

$$M_{11-01}=-0.816M \qquad M_{21-11}=-1.092M$$

$$M_{11-1'1'}=-0.816M \qquad M_{21-31}=-1.092M$$

$$M_{11-21}=+1.732M \qquad M_{21-2'1'}=+2.316M$$

$$M_{11-10}=-0.051M \qquad M_{21-20}=-0.068M$$

$$M_{11-12}=-0.049M \qquad M_{21-22}=-0.064M$$

(باید توجه داشت که ۲′۱′ مربوط به پایهٔ ستونی است که در $\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}$ قرار دارد).

مثال ۲ـ بارهای بحرانی :

برای تعیین بار بحرانی ساختمان مثال (۱) میتوان از خواص و رفتار فیزیکی مفاصل آن استفاده

نمود. اگر ستونهای ساختمان تحت‌تأثیر نیروهای محوری P باشند ، وقتیکه P به مقدار بحرانی P_{cr} برسد یعنی ستونها در آستانه کمانه قرارگیرند از معادلات (۱۳) و (۱٤) چنین برمیآید که ضریب سختی (کلی) مفاصل به سمت صفر میل میکند. در تشریح ریاضی ، کمانه موقعی صورت میگیرد که چرخشهای مفاصل بطرف بینیهایت میل نمایند. بدین‌ترتیب لازم است که مخرجهای معادلات (۱۳) و (۱٤) که در واقع همان ضرایب کلی سختی هستند بسمت صفر میل نمایند. بنابراین :

$$\left[(\bar{Q}\bar{u}+Ds+D_x s') + Dc \cos\frac{m\pi}{i} - \bar{Q}\bar{v}\cos\frac{n\pi}{j} \right] = 0 \qquad (۱۵)$$

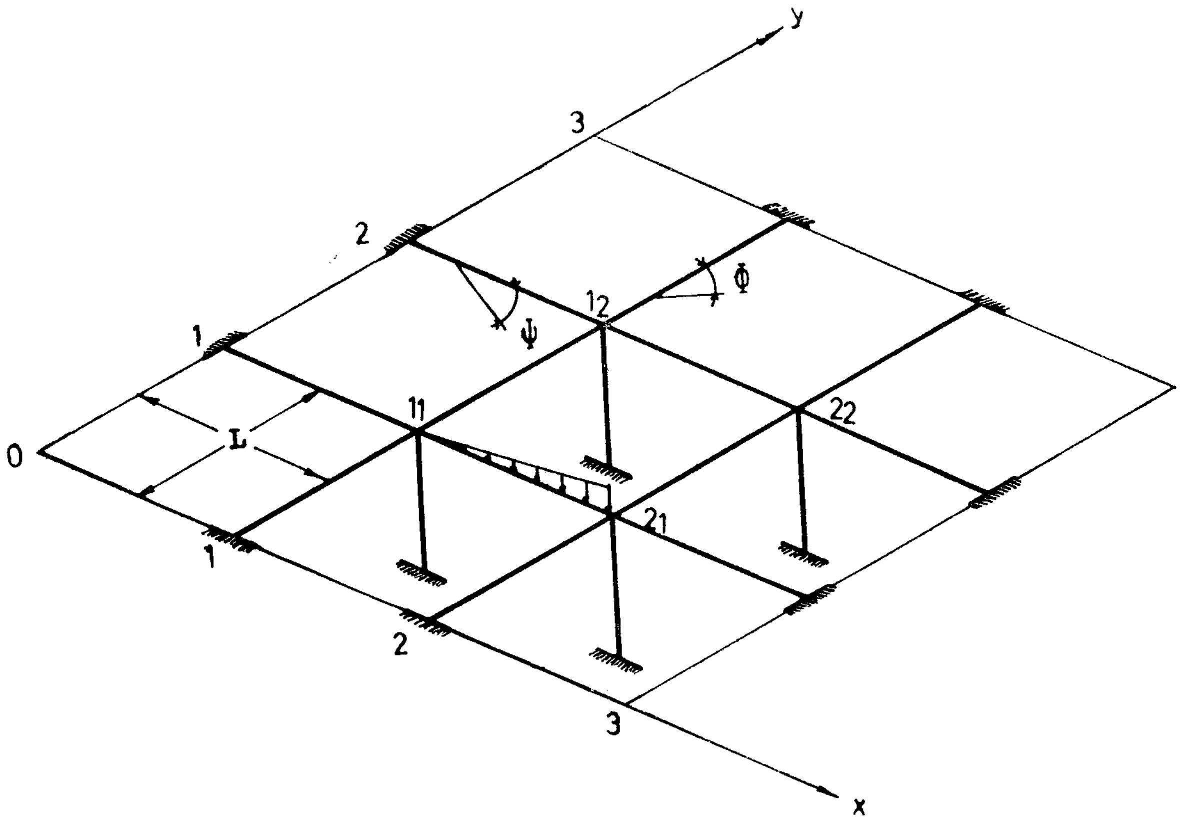
و :

$$\left[Qu+\bar{D}\bar{s}+D_y s'') + \bar{D}\bar{c}\cos\frac{n\pi}{j} - Qv\cos\frac{m\pi}{i} \right] = 0 \qquad (۱٦)$$

یعلت تقارنی که در ساختمان مورد بحث مشاهده میشود میتوان‌از هرکدام از معادلات(۱۵)و(۱٦) استفاده نمود. باقرار دادن مقادیر عددی مربوط در معادلهٔ (۱۵) معادله بار بحرانی بصورت زیر بدست میآید :

$$\left[۱۷ + ۲s' + ۸\cos\frac{m\pi}{۳} - \cos\frac{n\pi}{۳} \right] = 0$$

مقادیر مختلف مجهول s' مربوط به مقادیر مختلف P_{cr} میباشند که حداقل آن مربوطبه تغییر شکل متقارن :



(شکل ۲)

$$\psi_{11}=\psi_{12}=-\psi_{21}=-\psi_{22}$$

میباشد (یعنی وقتیکه $n=1$ و $m=2$ باشند) بنابراین $s'=-6{,}25$ میگردد که با مراجعه به جدولهای بار بحرانی و s مقدار P برابر با :

$$P=3{,}1109P_e$$

بدست میآید که در آن P_e بار بحرانی اولر همان ستون با تکیه گاه لولائی میباشد.

دینامیک :

برای تعیین فرکانسهای طبیعی ارتعاشات سیستم مورد بحث کافیست که ریشه‌های معادلات (۱۵) و (۱۶) را بدست آورد. دراینصورت باید ضرایب سختی s و u و ضرایب گیرداری c و v و غیره را به معنی دینامیکی آنها تلقی نمود.

مسئله ریاضی دراینحالت تعیین مقادیر ω میباشد که به ازاء آنها مخرجهای معادلات (۱۳) و (۱۴) به سمت صفر میل نمایند واگر فرضاً مفصل اختیاری $x'y'$ تحت تأثیر لنگرهای نوسانی $M_{x'y'}e^{i\omega t}$ و $N_{x'y'}e^{i\omega t}$ بوده و مسئله تعیین توزیع نیروها و چرخشها در هرلحظه t باشد، میتوان بآسانی مقادیر $M_{x'y'}$ و $N_{x'y'}$ را در معادلات (۱۳) و (۱۴) با مقادیر مربوطه دینامیکی فوق جابجا نموده و ضرایب سختی و گیرداری را بازاء ω محاسبه نمود.

نتیجه :

دراین مقاله نشان داده شده است که میتوان از سریهای محدود سینوسی برای حل کردن دقیق مسائل ساختمانهای منظم بنحو مطلوبی استفاده نمود. مثالهای نسبتاً ساده ۱ و ۲ آشکارا برتری روش پیشنهادی را از لحاظ سرعت عمل و فهم رفتار فیزیکی این نوع ساختمانها درمقایسه باروشهای کلاسیک آشکار مینماید. همانطوریکه ملاحظه‌شد میتوان فقط ازیکی از معادلات کلی مثلاً (۱۴) دربررسی مسائل دینامیک، استاتیک و بار بحرانی استفاده نمود. حل نهائی مسئله استاتیک شامل معادلات چند مجهولی نبوده بلکه فقط مستلزم جمع مقادیر سادهٔ عددی میباشد (تعداد جملاتی را که باید جمع شوند مساوی تعداد مفصلهای داخلی ساختمان میباشند). مسئله بعلت‌انتخاب توابع سینوسی‌ازحالت نامعین به معین تبدیل شده وبستگی به تعداد نیروها وتغییر فرمهای مجهول‌ندارد. تعیین باربحرانی درواقع حل یک معادله ساده یک مجهولی بوده‌و مستلزم بررسی معادلات دیفرانسیل نمیباشد. اهمیت و فوائد روش عمومی این مقاله مخصوصاً موقعی آشکار میگردند که ساختمانهای منظم مورد نظر شامل مفصلهای داخلی متعددی باشند.

ضمیمه :

ضرایب کلی سختی خمشی (s) وگیرداری (c) را در یک تیر یکنواخت مرتعش که تحت تأثیر نیروهای محوری قرار دارد میتوان بصورت زیر نشان داد :

$$s=(\alpha^2+\beta^2)(\cosh\alpha\sin\beta-\beta\cos\beta\sinh\alpha)\,/\,[2\alpha\beta(1-\cosh\alpha\cos\beta)+(\alpha^2-\beta^2)\sinh\alpha\sin\beta]$$

$$c=(\alpha^2+\beta^2)(\beta\sinh\alpha-\alpha\sin\beta)\,/\,[2\alpha\beta(1-\cosh\alpha\cos\beta)+(\alpha^2-\beta^2)\sinh\alpha\sin\beta]$$

$$\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} = \sqrt{\pm \frac{PL^2}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{PL^2}{2EI}\right)^2 + \frac{m\omega^2 L^4}{EI}}}$$

همچنین ضریب سختی پیچشی (u) و ضریب گیرداری (v) را در یک تیر مرتعش میتوان بوسیله روابط زیر نشان داد :

$$u = \delta \cot \delta \quad \text{و} \quad v = \delta \operatorname{cosec} \delta$$

$$\delta = \sqrt{\frac{J_0 \omega^2 L^2}{GJ}}$$

P = نیروی محوری ،

L = فاصله بین دو دهانه ،

m = جرم در واحد طول ،

ω = فرکانس ،

EI = صلبیت خمشی ،

GJ = صلیب پیچشی ،

J_0 = لنگر اینرسی قطبی .

فهرست مراجع

۱) Horne and Merchant (1956)
The Stability of Frames. Pergamon Pres Oxford.

۲) M. Grigorian.
On the Statics, Stability and Dynamics of regular interconnected Frames.
Oxford University Eng. Sc. Report. No 1.022.67

۳) مارکار گریگوریان ،
روش جدید برای تجزیه و تحلیل ساختمانهای منظم
نشریهٔ علمی دانشگاه صنعتی آریامهر - شماره اول - دوره اول - آبانماه ۱۳۴۶ .