# تعمیم اعداد موهومی مختلط

## ۱ ـ اعداد موهومی مختلط معمولی

نوشتهٔ : I. M. Yaglom

ترجمه باقر امامی

دبیر دانشکده فنی

میدانیم که بااضافه کردن $i$ (جذر عدد ۱ ـ )به‌مجموعه اعداد حقیقی « اعداد نوع خاص» بوجود آمده است که آنها را اعداد مختلط موهومی مینامند بکومک این اعداد میتوانیم بگوئیم که معادله :

$$x^۲+px+q=۰ \qquad (۲)$$

همواره دارای دو ریشه‌است ( متساوی یا متمایز) وبدین‌ترتیب عدهٔ زیادی ازمعادلات درجه دوم ازقبیل :

$$x^۲+۱=۰$$

$$x^۲+x+۱=۰ \text{ و } x^۲-۲x+۲=۰ \qquad (۲)$$

قابل حل می گردند.

اعدادموهومی را بصورت‌جبری $Z=a+bi$ نمایش میدهیم و اعمال جمع وتفریق و ضرب مطابق دستورهای زیر بعمل می‌آید :

$$\begin{cases} (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \\ (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \end{cases} \qquad (۳)$$

اگر $\bar{z}$ مزدوج $z$ باشد میتوانیم بنویسیم :

$$z_۱ : z=(z_۱\times \bar{z}) : (z\times \bar{z}) \qquad (۴)$$

و چون حاصل ضرب دوعدد مزدوج موهومی یک عدد حقیقی است :

$$z.\bar{z}=a^۲+b^۲ \qquad (۵)$$

پس عمل تقسیم دوعدد موهومی مختلط به تقسیم بریک عدد حقیقی منجرمی گردد :

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{a^۲+b^۲}=\frac{ac+bd}{a^۲+b^۲}+\frac{ad-bci}{a^۲+b^۲} \qquad (۴)$$

در مورد عدد مزدوج $\overline{z}$ بآسانی قابل تحقیق است که :

$$\overline{\overline{z}}=z \text{ ؛ } \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2} \text{ ؛ } \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2} \text{ ؛ } \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \text{ ؛ } \overline{z_1:z_2}=\overline{z_1}:\overline{z_2} \qquad (۷)$$

با وارد کردن علامت $\infty$ مشابه اعداد حقیقی می‌توانیم بنویسیم :

$$z+\infty=\infty \text{ ؛ } z-\infty=\infty \text{ ؛ } z.\infty=\infty \text{ ؛ } \frac{\infty}{z}=\infty \text{ ؛ } \frac{z}{\infty}=0 \qquad (۸)$$

و برای جذر اعداد موهومی میتوانیم بنویسیم :

$$\sqrt{a+bi}=\mp\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}+\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}}-\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right) \qquad (b>0) \qquad (۹)$$

و درنتیجه ریشه‌های معادله (۱) همواره بصورت :

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \qquad (۱۰)$$

اعم از حقیقی یا موهومی خواهند بود و ریشه‌های معادلات (۲) عبارت خواهد بود از :

$$x_{1,2}=\pm i \text{ ؛ } x_{1,2}=1\pm i \text{ ؛ } x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad (۱۱)$$

اعداد موهومی را با فرض :

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (۱۲)$$

می‌توان بصورت :

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (۱۳)$$

نمایش داد که :

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

است واز این رو دستورات ضرب و تقسیم بصورت ساده‌تری درمی‌آیند :

$$z.z_1=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,.\,r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_1r[\cos(\varphi+\varphi_1)+i\sin(\varphi+\varphi_1)] \qquad (۱۴)$$

$$\frac{z_1}{z}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{r_1}{r}[\cos(\varphi_1-\varphi)+i\sin(\varphi_1-\varphi)] \qquad (۱۵)$$

و بهمین ترتیب توان و ریشه m ام یک عدد موهومی مختلط بصورت زیر نوشته می‌شود :

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \tag{۱۶}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad k=0,1,2,\dots,(n-1)$$

## ۲ ـ اعداد مختلط تعمیم داده شده

همانطورکه برای حل یک دسته از معادلات درجه دوم که درقلمرو اعداد حقیقی قابل حل نبودند ریشه یکی از این معادلات غیرقابل حل ($x^2+1=0$) را به مجموعه اعداد حقیقی اضافه نمودیم و این کار مارا با مجموعه اعداد مختلط $a+bi$ ($a$ و $b$ حقیقی) آشنا ساخت و از این رو توانائی حل جمیع معادلات درجه دوم را پیدا کردیم بهمان ترتیب میتوان بجای معادله $x^2+1=0$ از ریشه‌های معادله غیر مشخص $x^2+px+q=0$ استفاده نمود.

معلوم است که معادله $x^2+1=0$ تفاوت اساسی با سایر معادلات غیر قابل حل درجه دوم در قلمرو اعدادحقیقی ندارد و انتخاب آن را فقط سادگی ضرایب آن ($p=0$ و $q=1$) باعث گردیده است واگرریشه I از معادله:

$$x^2+qx+q=0 \tag{۱۷}$$

با شرط $\Delta=p^2-4q<0$ را به مجموعه اعداد حقیقی اضافه کنیم« اعداد نوع خاص» دیگری بصورت:

$$a_1+b_1I(a_1 \text{ و } b_1 \text{ حقیقی}) \tag{۱۸}$$

بوجود خواهند آمد که در آنها $I^2=-pI-q$ است و تابع دستورات زیر خواهند بود:

$$\begin{cases}(a+bI)+(a+dI)=(a+c)+(b+d)I\\(a+bI)-(c+dI)=(a-c)+(b-d)I\\(a+bI)(c+dI)=(ac-qbd)+(ad+bc-pbd)I\end{cases} \tag{۱۹}$$

این اعداد را اعداد مختلط تعمیم داده شده مینامیم و با z نمایش میدهیم بازاء هرعدد z ازاین نوع، عدد دیگری (مزدوج اولی) $\bar{z}$ را میتوان درنظرگرفت بطوریکه $z\cdot\bar{z}$ حقیقی باشد زیرا بافرض:

$$\bar{z}=(a-pb)I \text{ و } z=a+bI$$

خواهیم داشت:

$$z.\bar{z}=a^2-pab+qb^2=\left(a-\frac{p}{2}b\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}b^2$$

و از اینجا میتوان تعمیم اعدادمختلط تعمیم داده‌شده رابرمبنای دستور (۴) تعریف نمود. حاصلضرب $z.\bar{z}=0$ است اگر $a=0$ و $b=0$ زیرا: $\left(\frac{4q-p^2}{4}=-\frac{\Delta}{4}>0\right)$ وتنهاعددی که تقسیم به آن ممتنع است عبارت از $0$ یا $(0+0I)$ است و بالاخره هر معادله درجه دومی با ضرایب حقیقی یا مختلط تعمیم داده شده در قلمرو اعداد مختلط تعمیم داده شده دارای دو ریشه (متمایز یا متساوی) میباشد.

بدین ترتیب اگر I یک ریشه معادله دوم از معادلات (۲) باشد ریشه های هرسه معادله (۲) بترتیب عبارت خواهد بود از :

$$\begin{cases} x_1 = -1 + I \\ x_2 = 1 - I \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = I \\ x_2 = 2 - I \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} I \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} I \end{cases}$$

واگر یک ریشه معادله سوم از همین معادلات را $I_1$ بنامیم ریشه های معادلات (۲) بصورت زیر درمی آیند :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1 \\ x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1 \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} I_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = I_1 \\ x_2 = -1 - I_1 \end{cases}$$

همهٔ این نتیجه ها با توجه به اینکه ریشه I معادله (۱۷) بصورت زیر است روشن می گردند :

$$I = -\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i \left( \text{یا} \;\; I = -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i \right) \qquad (20)$$

بعکس میتوان i را برحسب I حساب کرد :

$$i = \frac{p}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} I \left( \text{یا} \;\; i = -\frac{p}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} I \right) \qquad (21)$$

بدین ترتیب اعداد مختلط تعمیم داده شده همان اعداد مختلط $a+bi$ می باشند که بصورت دیگری نوشته شده اند :

$$a + bI = a + b\left(-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i\right) = a_1 + b_1 i$$

که در آنجا :

$$a_1 = a - \frac{p}{2} b \;\; \text{و} \;\; b_1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} b \qquad (22)$$

از اینجا نتیجه می شود که هرخاصیت جبری عدد $Z = a + bi$ شبیه خاصیت اعداد مختلط معمولی است (یکی بودن خواص جبری اعداد مختلط تعمیم داده شدهٔ Z و اعداد مختلط معمولی z از همشکلی Isomorphisme این دو مجموعهٔ اعداد یعنی از وجود یک رابطه دوسوئی Z biunivoque $z \longleftrightarrow Z$ بین این اعداد نتیجه میشود) یعنی از $Z_1 \longleftrightarrow z_1$ و $Z_2 \longleftrightarrow z_2$ نتیجه میشود :

$$z_1 + z_2 \longleftrightarrow Z_1 + Z_2 ; \; z_1 - z_2 \longleftrightarrow Z_1 - Z_2 ; \; z_1 \cdot z_2 \longleftrightarrow Z_1 . Z_2 \text{ ،} \; z_1 : z_2 \longleftrightarrow Z_1 : Z_2$$

این نمایش را از تجمع Association عدد $z = a + bi$ و $Z = a_1 + b_1 I$ بدست می آوریم که در آنجا :

$$a_1 = a + \frac{pb}{\sqrt{-\Delta}} \quad \text{و} \quad b_1 = \frac{2b}{\sqrt{-\Delta}}$$

ودر نتیجه :

$$a = a_1 - \frac{2}{p} b_1 \quad \text{و} \quad b = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} b_1$$

### ۳ ـ اعداد مختلط بیشتر تعمیم داده شده

برای تعمیم بیشتر مفهوم اعداد مختلط باید دید که در استدلال‌های قسمت قبل نقش منفی بودن مبین $\Delta$ در معادله (۱۷) تاچه اندازه اساسی است. واضح است اگر اعداد مختلط را مانند وسیلهٔ رفع مشکلات مربوط به حل نشدن معادلات درجه دوم در قلمرو اعداد حقیقی در نظر بگیریم، منفی بودن $\Delta$ نقش درجه اول را ایفا می‌کند. فرض بکنیم که از لحاظ «عددی از نوع خاص» بودن عدد $E$ را که ریشه معادله (۱) با مبین مثبت فرض می‌شود به مجموعه اعداد حقیقی معمولی اضافه کنیم دراین‌صورت معادله (۱) در قلمرو اعداد بصورت $a+bE$ حداقل دارای سه ریشه، متمایز خواهد بود، دو ریشه حقیقی (۱۰) (زیرا $\Delta = p^2 - 4q > 0$) ویک ریشه $E$ (حتی درحقیقت دارای چهار ریشه). میتوان ثابت کرد که جمیع معادلات با مبین منفی غیر قابل حل می‌مانند و دراین مورد به حالت مخصوص معادلات بصورت $x^2 + c = 0$ با $c > 0$ اکتفا می‌کنیم :

از فرض $E^2 = -pE - q$ نتیجه می‌شود :

$$(a+bE)^2 = a^2 + 2abE + b^2E^2 = (a^2 - qb^2) + (2ab - pb^2)E$$

عدد $(a+bE)^2$ وقتی یک عدد حقیقی خواهد گردید که $2ab - pb^2 = 0$ گردد یعنی $b=0$ و یا $b = \frac{2}{p} a$ باشد ولیکن یا $(a+bE^2) = a^2 > 0$ بازاء $b=0$ ویا :

$$\left(b = \frac{2}{p} a\right) \quad \text{بازاء} \quad (a+bE)^2 = a^2 \left(1 - \frac{4q}{p^2}\right) > 0$$

زیرا $p^2 - 4q > 0$ فرض شده است و بدین‌ترتیب بازاء هیچ مقداری از $x = a+bE$ مقدار $x^2$ نمی‌تواندبرابر عدد حقیقی منفی $-c$ گردد و بهمین ترتیب میتوان غیر قابل حل بودن معادلات درجه دوم بامبین منفی‌را در قلمرو اعداد $a+bE$ ثابت کرد از این پس مسألهٔ حل معادلات درجه دوم راکنار میگذاریم و اعداد مختلط را مانند «نوع خاصی از اعداد» نزدیک به اعداد معمولی در نظر میگیریم. ازاین نقطه‌نظر جدید، توسعه بخشیدن به مجموعهٔ اعداد حقیقی با اضافه کردن جزء جدید $E$ که بنا بتعریف درمعادلهٔ (۱) صدق بکند (صرف‌نظر از علامت $\Delta$ مبین این معادله) بجا خواهد بود.

جمیع ترکیبات خطی ممکن بصورت :

$$a + bE \qquad (23)$$

($a$ و $b$ حقیقی) را اعداد مختلط بیشترتعمیم‌داده شده خواهیم نامید.

اعمال جمع و تفریق و ضرب طبق قوانین زیر انجام خواهند پذیرفت :

$$\text{(۲۴)}\quad\begin{cases}(a+bE)+(c+dE)=(a+c)+(b+d)E\\(a+bE)-(c+dE)=(a-c)+(b-d)E\\(a+bE)(c+dE)=ac+adE+bcE+bdE^2=(ac-qbd)+(ad+bc-pdb)E\end{cases}$$

بسهولت ملاحظه میشود که قواعد جمع و تفریق و ضرب اعداد مختلط بیشتر تعمیم داده شده با قواعد جمع و تفریق اعداد حقیقی معمولی انطباق کامل دارد ولی در مورد تقسیم وضع بدین قرار نیست وما عجالتاً این عمل را کنار میگذاریم. تعداد زیاد دستگاه‌های اعداد مختلط بیشتر تعمیم داده شده وجود دارد زیرا بازاء هرزوج اعداد $p$ و $q$ یک معادله درجهٔ دومی و در نتیجه دستگاه وابسته‌اش وجود دارد.

با این وصف جمیع دستگاههای عددی متشابه که نظیر زوج اعداد $p$ و $q$ هستند فرق اساسی با یکدیگر ندارند بین اعداد بصورت $a+bE$ همواره می‌توان عدد $i=\alpha+\beta E$ را پیدا کرد بطوریکه $i^2=-1$ باشد (کافی است فرض کنیم $\alpha=\frac{p}{\sqrt{-\Delta}}$ و $\beta=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}$ و باین ترتیب $E=\alpha_1+\beta_1 i$ خواهد بود که در آنجا $\alpha_1=\frac{-p}{2}$ و $\beta_1=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ است و دراین صورت میتوان اعداد $a+bE$ را با اعداد مختلط موهومی معمولی $a_1+b_1 i$ تطبیق داد.

$$\left(b_1=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}b \quad \text{و} \quad a_1=a-p\frac{b}{2}\right)$$

همچنین در حالت $\Delta=p^2-4q=0$ بین اعداد بصورت $a+bE$ عددی بصورت $\varepsilon=\alpha+\beta E$ وجود دارد بطوریکه $\varepsilon^2=0$ است مثلاً میتوان $\varepsilon=\frac{p}{2}+E$ فرض کرد ودر این صورت خواهیم داشت.

$$\varepsilon^2=\frac{p^2}{\varepsilon}+pE+(-pE-q)=\frac{p^2}{\varepsilon}-q=0$$

بدین جهت است که مجموعه $a+bE$ در حالت $p^2-4q=0$ بصورت زیر درمی‌آید که به عدد دوتائی Dual موسوم است :

$$\varepsilon^2=0 \qquad a+b\varepsilon \ \text{و} \ a \ \text{و} \ b \ \text{حقیقی} \qquad \text{(۲۵)}$$

ومیتوان عدد $a+bE$ را با عدد دوتائی dual $a_1+b_1\varepsilon_1$ تطبیق نمود با $a_1=a-\frac{p}{2}$ و $a_1=b$

بالاخره بازاء $\Delta=p^2-4q>0$ عددمختلط $e=a+bE$ را با $e^2=+1$ خواهیم داشت. زیرا اگرفرض کنیم

$$e=\frac{p}{\sqrt{\Delta}}+\frac{2}{\sqrt{\Delta}}E \quad \text{و} \quad E=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}e$$

خواهیم داشت :

$$e^2=\left(\frac{2}{\sqrt{\Delta}}+\frac{2}{\sqrt{\Delta}}E\right)^2=\frac{p^2}{\Delta}+\frac{4p}{\Delta}E+\frac{2}{\Delta}(-pE-q)=1$$

از این نتیجه میشود که در این حالت دستگاه اعداد مختلط بیشتر تعمیم داده شده به دستگاهی که به اعداد مضاعف Double موسوم است منجر میگردد:

$$a+be \quad \text{و} \quad a \text{ و } b \text{ حقیقی و } e^{2}=1$$

واگر عدد $a+bE$ را باعدد مضاعف تطبیق بکنیم:

$$a_1+b_1e=\left(a-b\frac{p}{2}\right)+\left(b\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)e$$

بدینترتیب مشاهده میشود که عملاً جمیع دستگاههای اعداد مختلط بیشتر تعمیم داده شده به سه دستگاه مختلف ذیل منجر میشوند:

| | | |
|---|---|---|
| اعداد مختلط موهومی معمولی | $a+bi$ | $i^{2}=-1$ |
| اعداد دوتائی dual | $a+b\varepsilon$ | $\varepsilon^{2}=0$ |
| اعداد مضاعف double | $a+be$ | $e^{2}=1$ |

بعبارت‌دیگر برای $\Delta<0$ اعداد مختلط بیشتر تعمیم داده شده همشکل Isomorphe اعدادمختلط موهومی معمولی وبرای $\Delta=0$ اعداد دوآل و برای $\Delta>0$ اعداد مضاعف و بعضی وقت‌ها این اعداد را:

درحالت $\Delta<0$ اعداد مختلط بیضوی Elliptique

در حالت $\Delta=0$ اعداد مختلطسهموی Parabolique

در حالت $\Delta>0$ اعدادمختلط هذلولی Hyperbolique مینامند.

اعداد مختلط موهومی وابستگی نزدیکی با حل معادلات درجه دوم و یا درجات بالاتر دارند و درجبر و آنالیز نقش اساسی ایفا میکنند و منشاء این اعداد زیاد روشن نیست. بنظر میآید که ریاضی‌دانان ایتالیائی قرن XVI « ژیرولاموکاردونا Girolamo Cardona (۱۵۷۶ - ۱۵۰۱) و رافائل بومبلی Raphael Bombelli (متولد ۱۵۳۰ که کتاب جبر آن بسال ۱۵۷۲ منتشرگردیده است) » اولین کسانی هستندکه آنها را بکار برده‌اند. با این وصف این عددها را بصورت مبهمی درکارهای ریاضی‌دانان بیشتر می‌توان‌پیدا کردودرمقابل مدتهابعدازکاردوناوبومبلی ریاضی‌دانان عالیقدری‌را میشناسیم که تصور روشنی از اعداد موهومی نداشته‌اند. بعکس اعداد دوآل و اعداد دوبل هیچگونه‌بستگی باتئوری معادلات درجه دوم ندارد و اساساً وابستگی کمتری با علم جبردارند.

موارد استعوال این اعداد بیشتر در هندسه است ( وبه مقدار خیلی کم درتئوری اعداد). اعداد دوآل را برای اولین بار یک ریاضی‌دان آلمانی (اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم) موسوم به Eugéne Studi (۱۹۳۰ - ۱۸۶۲) مورد مطالعه قرارداده است و اعداد دوبل بوسیله یک ریاضی‌دان انگلیسی بنام William Clifford (۱۸۷۹ - ۱۸٤۵) وارد هندسه شده است.

مورد استعمال اعداد دوبل بطور اساسی در هندسه غیر اقلیدسی لباچووسکی Lobatchewski و بعضی هندسه های شبه اقلیدسی Pseudo euclidienne که نقش مهمی در تئوری فیزیک‌نسبیت بازی می کنند می‌باشد.

## ٤ ـ اعداد دوآل

جمع و تفریق و ضرب اعداد دوآل با فرمولهای زیر تعریف میشوند .

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b\varepsilon)+(c+d\varepsilon)=(a+c)+(b+d)\varepsilon \\ (a+b\varepsilon)-(c+d\varepsilon)=(a-c)+(b-d)\varepsilon \\ (a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)=ac+(ad+bc)\varepsilon\end{array}\right. \tag{۲۷}$$

از رابطهٔ اخیر معلوم است که حاصل‌ضرب دوعدد دوآل $Z=a+b\varepsilon$ و $Z_1=c+d\varepsilon$ فقط وقتی حقیقی است که $ad+bc=0$ گردد واگر $a\neq 0$ باشد می‌توانیم بنویسیم : $\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$ و بخصوص حاصلضرب اعداد $Z=a+b\varepsilon$ و $\overline{Z}=a-b\varepsilon$ یک عدد حقیقی است :

$$Z.\overline{Z}=(a+b\varepsilon)(a-b\varepsilon)=a^2 \tag{۲۸}$$

عدد $\overline{Z}=a-b\varepsilon$ را مزدوج عدد $Z=a+b\varepsilon$ می‌نامند (بعکس $Z$ نیز مزدوج $\overline{Z}$ است ) عدد $a$ جذر حاصلضرب $Z.\overline{Z}$ را (که برابر نصف مجموع $\frac{Z+\overline{Z}}{2}$ اعداد مزدوج $Z$ و $\overline{Z}$ است ) مدول عدد دوآل $Z$ می‌نامیم وبا $|Z|$ نمایش داده‌میشود . (مدول یک‌عدددوآل،منفی نیز میتواند باشد). مجموع $Z+\overline{Z}=2a$ دوعدد مزدوج یک عدد حقیقی است . تفاضل $Z-\overline{Z}=2b\varepsilon$ یک عدد موهومی خالص است(یعنی باعدد $Z$ ، درضریب حقیقی فرق دارد ) و با تناظر با اعدادمختلط موهومی عدد دوآل $Z$ وقتی حقیقی است که‌برابر مزدوج خود $\overline{Z}$ باشد دستورهای (۷) در مورد اعداد دوآل نیز دارای‌ارزش می‌باشند .

حال قاعده تقسیم بر یک عدد دوآل $Z=a+b\varepsilon$ را بیان می‌کنیم :

$$\frac{c+d\varepsilon}{a+b\varepsilon}=\frac{(c+d\varepsilon)(a-b\varepsilon)}{(a+b\varepsilon)(a-b\varepsilon)}=\frac{ca+(-cb+da)\varepsilon}{a^2}=\frac{c}{a}+\frac{ad-bc}{a^2}\varepsilon \tag{۲۹}$$

از آنجا معلوم میشودبرای اینکه تقسیم بریک عدد ممکن باشد ضروری‌است که مدول آن $|Z|=a$ مخالف‌صفر باشد . و بر عکس اعدادمختلط موهومی،یک عدد دوآل با مدول صفر می‌تواند مخالف‌صفرباشد .

درحالت ممتنع بودن تقسیم میتوانیم فرض کنیم که اعداد $\frac{1}{\varepsilon}$ و $\frac{1}{0}$ اعدادی«از نوع بخصوص» میباشند و ما آنها را بترتیب با $\omega$ و $\infty$ نمایش میدهیم‌وخاطرنشان می‌کنیم که جمیع اعداد بصورت $c\omega$ که در آنجا $c\neq 0$ باشد حقیقی هستند ومعکوس هرعدد دوآل بصورت :

$$\frac{1}{b\varepsilon}=\frac{1}{b}\,\omega \;;\; b\neq 0 \;\text{و}\; \frac{1}{0}=\infty$$

خواهد بود .

قواعد بکار بردن علامت $\infty$ دراین‌جا طبق‌دستورات (۸) میباشد (عدد $Z$ دراین دستورات میتواند بصورت $c\omega$ باشد) اعمال مربوط به اعداد $a\omega$ بترتیب زیر تعریف میشوند :

$$\text{(۳۰ الف)}\quad \begin{cases} (a+b\varepsilon)+c\omega=c\omega \quad \text{و} \quad (a+b\varepsilon)-c\omega=(-c)\omega \\ (a+b\varepsilon)c\omega=(ac)\omega \\ \dfrac{c\omega}{a+b\varepsilon}=\dfrac{c}{a}\omega \quad \text{و} \quad \dfrac{a+b\varepsilon}{c\omega}=\dfrac{a}{c}\varepsilon \\ c\omega\pm d\omega=(c\pm d)\omega \quad \text{و} \quad c\omega\cdot d\omega=\infty \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $\overline{c\omega}=-c\omega$ و $\overline{\infty}=\infty$

رابطهٔ $\overline{Z}=z$ وجمیع قواعد (۷) با اضافه‌کردن $c\omega$ و $\infty$ به مجموعهٔ اعداد دوآل ارزش خود را حفظ می‌نمایند عبارت‌های $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ دارای مفهوم‌نیستند وطبیعی است‌که $\frac{az+b}{cz+d}$ بازاء $Z=\infty$ برابر $\frac{a}{c}$ میگردد. عدد $c\varepsilon$ با مدول صفر با وجودیک عدد دوآل $Z(=d\varepsilon)$ مخالف صفر مشخص میگردد بطوریکه حاصلضرب‌آن درعدد $c\varepsilon$ برابر صفر باشد.

$$c\varepsilon\cdot d\varepsilon=(cd)\varepsilon^{2}=0 \qquad (۳۱)$$

و بدینجهت است‌که این اعداد را مقسوم‌علیه های صفر می‌نامند.

اعداد دوآل به مدول غیرصفری $a$ را باشباهت با فرم‌های مثلثاتی اعداد موهومی میتوان بصورت زیرنوشت :

$$a+b\varepsilon=a\left(1+\frac{b}{a}\varepsilon\right)=r(1+\varepsilon\varphi) \qquad (۳۲)$$

ومانند قبل $r=a$ را مدول $z=a+b\varepsilon$ و $\varphi=\frac{b}{a}$ را آرگومان این اعداد مینامند و با $Argz$ نمایش‌میدهند ($r$ یک عدد حقیقی غیر مشخص مخالف صفر و $\varphi$ یک عدد حقیقی غیر مشخص می‌تواند باشد) واضحست که اعداد حقیقی $a=a+0.\varepsilon$ با آرگومان صفر مشخص میگردند و اعداد دوآل مزدوج $Z=a+b\varepsilon$ و $\overline{Z}=a-b\varepsilon$ دارای مدول های متساوی آرگومان های قرینه‌اند.

صورت‌های (۳۳) اعداد دوآل برای انجام اعمال ضرب و تقسیم بسیار مناسبند زیرا :

$$r(1+\varepsilon\varphi)\times r_1(1+\varepsilon\varphi_1)=rr_1(1+\varepsilon\varphi+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2\varphi\varphi)=rr_1[1+(\varphi+\varphi_1)\varepsilon]$$

یعنی‌درضرب اعداددوآل‌مدول‌ها را دریکدیگرضرب‌وآرگومانهارا باهم‌جمع می‌کنیم وبعکس‌درتقسیم‌مدولها را بریکدیگر تقسیم‌وآرگومانها را ازهم‌کم می‌کنیم :

$$\frac{z_1}{z}=\frac{r_1(1+\varepsilon\varphi_1)}{r(1+\varepsilon\varphi)}=\frac{r_1}{r}[1+\varepsilon(\varphi-\varphi_1)] \qquad (۳۴)$$

و ازآنجا می‌توان قواعد به قوه رساندن ویا ریشه گرفتن اعداد دوآل را نتیجه گرفت :

$$\begin{cases}[r(1+\varepsilon\varphi)]^m=r^m(1+\varepsilon m\varphi) \\ \sqrt[n]{r(1+\varepsilon\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(1+\varepsilon\frac{\varphi}{n}\right)\end{cases} \tag{۳۰}$$

(از دستور اخیر نتیجه میشود که ریشه مرتبه فرد یک عدد دوآل برای $r\neq 0$ بهمان ترتیب معین می گردد وریشه مرتبه زوج بازاء $r<0$ وجود ندارد و بازاء $r>0$ دارای دو مقدار است).

واضح است که از یک عدد $z=b\varepsilon$ با مدول صفر (مقسوم علیه صفر) ریشه مرتبه $n>1$ صحیح نمیتوان استخراج کرد.

## ۵ ـ اعداد مضاعف Doubles

بنابر آنچه قبلاً گذشت میتوانیم بگوییم که اعداد مزدوج $z$ و $\bar{z}$ بصورت:

$$z=a+be \text{ و } \bar{z}=a-be$$

می‌باشند. مجموع $(z+\bar{z}=2a)$ وحاصل‌ضرب $(z\,.\,\bar{z}=a^2-b^2)$ اعداد دوبل مزدوج، حقیقی هستند. جذر عدد $|a^2-b^2|=|z\,.\,\bar{z}|$ که‌علامت‌آن، علامت‌یکی‌از اعداد $a$ و $b$ که از لحاظ‌مقدار مطلق‌بزرگتر است میباشد، مدول عدد $z=a+be$ نامیده میشود و انرا با $|z|$ نمایش میدهیم. در مورد اعداد دوبل دستور (۷) دارای ارزش میباشد و واضح است که رابطه $z=\bar{z}$ عدد حقیقی $a+o\cdot e=a$ را مشخص‌میسازد و رابطه $z=-\bar{z}$ عدد موهومی خالص $o+be=be$ را معلوم میدارد اعمال‌جمع وتفریق وضرب و تقسیم اعداد دوبل طبق دستورات زیر معین می گردند:

$$\begin{cases}(a+be)\pm(c+de)=(a\pm c)+(b\pm d e) \\ (a+be)(e+de)=(ae+bd)+(ad+bc)e \\ \dfrac{e+de}{a+be}=\dfrac{(e+de)(a-be)}{(a+be)(a-be)}=\dfrac{(ca-db)+(ad-be)e}{a^2-b^2} \\ \qquad\qquad=\dfrac{ca-db}{a^2-b^2}+\dfrac{ad-bc}{a^2-b^2}e\end{cases} \tag{۳۳}$$

بنابراین تقسیم‌بر $z=ab+e$ فقط با شرط $|z|=\sqrt{|a^2-b^2|}\neq o$ امکان پذیر است. اعداد دوبل $a\pm ae$ که دارای مدول صفر هستند، مقسوم علیه های صفر نامیده می‌شود.

$$[(a+ae)(b-be)=ab(1+e)(1-e)=o]$$

دربعضی حالت‌ها خارج قسمت‌های زیر:

$$\frac{1}{1+e}=\omega_1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{1-e}=\omega_2 \quad \text{و} \quad \frac{1}{o}=\infty$$

مانند اعدادی که از نوع بخصوصی‌می‌باشد. باید مورد توجه قرار گیرند.

نوسیون اعداددوبل را می‌توان بااضافه کردن حاصلضربهای $c\omega_1$ و $c\omega_2$ که از ضرب اعداد جدید $\omega_1$ و $\omega_2$ در عدد حقیقی $c$ بدست می‌آیند و خارج قسمت‌های زیر توسعه بیشتر بخشید :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{1-e}{1+e}=\sigma_1 \quad \text{و} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{1+e}{1-e}=\sigma_2$$

قواعد اعمال اصلی برروی سمبلهای $c\omega_1$ و $c\omega_2$ و $\infty$ و $\sigma_1$ و $\sigma_2$ با دستورهای (۸) و با مجموع روابط نظیر (۳۰) مشخص می گردند .

مثلاً :

$$(۳۷) \quad \begin{cases} (a+be)\cdot c\omega_1=(\pm c)\omega_1 \\ (a+be)\cdot c\alpha_2=(a+b)c\sigma_2 \\ \dfrac{a+be}{c\omega_2}=\dfrac{a-b}{c}(1-e) \\ \dfrac{a+be}{c\sigma_1}=\dfrac{a+b}{c}\sigma_2 \\ a\omega_1\cdot b\omega_2=\infty \ \text{و}\ a\omega_1\cdot b\sigma_2=ab\omega_2 \ \text{و}\ a\omega_1\cdot b\omega_1=\dfrac{ab}{2}\omega_1 \ \text{و} \ \dots \end{cases}$$

زیرا :

$$(a+be)c\sigma_2=\frac{(a+be)(c+ce)}{1-e}=\frac{(a+b)c(1+e)}{1-e}=(a+b)c\sigma_2$$

$$\frac{a+be}{c\omega_2}=\frac{(a+be)(1-e)}{c}=\frac{a-b}{c}(1-e)$$

$$\frac{a+be}{c\sigma_1}=\frac{(a+be)(1+e)}{c}=\frac{(a+b)c(1+e)}{c(1-e)}=\frac{a+b}{c}c\cdot\sigma_2$$

$$c\omega_1\cdot b\omega_1=\frac{ab}{(1+e)^2}=\frac{ab}{2}\cdot\omega_1$$

طبیعی است که فرض کنیم :

$$(۳۷\ \text{الف}) \qquad \overline{c\omega_1}=c\omega_2 \ \text{و}\ \overline{c\omega_2}=e\omega_1 \ \text{و}\ \overline{\sigma_1}=\sigma_2 \ \text{و}\ \overline{\sigma_2}=\sigma_1 \ \text{و}\ \overline{\infty}=\infty$$

که به اتحاد $\bar{\bar{z}}=z$ در باره اعداددوبل وسعت یافته منجر میگرددبهمان قسمی که برای روابط (۷) نشان داده شده است .

اعداد دوبـل به مدول غیر صفر راباشباهت به فرمهای (۳۱) و (۳۲) در مورد اعداد موهومی معمولی واعداددوآل بافرض $r=\pm\sqrt{|a^2-b^2|}$ (که مدول $|z|$ عدد دوبل نامیده میشود) میتوان بصورت زیر نوشت :

$$z=a+de=r\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}e\right)$$

بنا به تعریف مدول نتیجه میشود که :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^۲-\left(\frac{b}{r}\right)^۲=\pm ۱$$

برحسب آنکه کدام یک از کسرهای $\frac{a}{r}$ و $\frac{b}{r}$ آن یکی که دارای مقدار مطلق بزرگتر است مثبت باشد، نتیجه میشود :

$$\frac{a}{r}=ch\varphi \text{ و } \frac{b}{r}=sh\varphi \text{ و یا } \frac{a}{r}=sh\varphi \text{ و } \frac{b}{r}=ch\varphi \qquad (۳۸)$$

[$ch\varphi$ و $sh\varphi$ را کسینوس هیپربولیک وسینوس هیپربولیک و $\varphi$ را آرگومان می‌نامند] .

$$z=r(ch\varphi+esh\varphi) \quad \text{یا} \quad z=r(sh\varphi+ech\varphi) \qquad (۳۹)$$

$\varphi$ را آرگومان عدد z نامیده با Argz نمایش می‌دهیم .

**تبصره** ـ در بعضی حالت‌ها بهتراست در نظر بگیریم که آرگومان عدد دوبل [صورت دوم(۳۹)] یک عددمختلط معمولی است :

$$Arg\left\{r(sh\varphi+ech\varphi)\right\}=\varphi-i\frac{\pi}{۲}$$

این قرارداد مفید است زیرا دراین حالت همواره داریم :

$$z=|z|\,[ch(Argz)+esh(Argz)]$$

چونکه :

$$ch\left(\varphi-i\frac{\pi}{۲}\right)=sh\varphi \text{ و } sh\left(\varphi-i\frac{\pi}{۲}\right)=ch\varphi$$

دستورات (۳۹) برای انجام عمل ضرب بین اعداد دوبل بسیار مناسب می‌باشند زیرا بنابر قاعده جمع توابع هذلولی میتوانیم بنویسیم :

$$\begin{cases} r(ch\varphi+esh\varphi)\cdot r_۱(ch\varphi_۱+esh\varphi_۱)=rr_۱[ch(\varphi+\varphi_۱+esh(\varphi+\varphi_۱)] \\ r(sh\varphi+ech\varphi)\cdot r_۱(sh\varphi_۱+ech\varphi_۱)=rr_۱[ch(\varphi+\varphi_۱)+esh(\varphi+\varphi_۱)] \\ r(eh\varphi+ehs\varphi)\cdot r_۱(sh\varphi_۱+ech\varphi_۱)=rr_۱[sh(\varphi+\varphi_۱)+ech(\varphi+\varphi_۱)) \end{cases} \qquad (۴۰)$$

قواعد تقسیم را بسهولت از دستورات فوق میتوان نتیجه گرفت :

$$\begin{cases} \dfrac{r_۱(ch\varphi_۱+esh\varphi_۱)}{r(ch\varphi+esh\varphi]}=\dfrac{r_۱(sh\varphi_۱+ech\varphi_۱)}{r(sh\varphi+ech\varphi)}=\dfrac{r_۱}{r}(ch(\varphi_۱-\varphi)+esh(\varphi_۱-\varphi)] \\ \\ \dfrac{r_۱(sh\varphi_۱+ech\varphi_۱)}{r(sh\varphi+esh\varphi)}=\dfrac{r_۱(ch\varphi_۱+esh\varphi_۱)}{r(sh\varphi+ech\varphi)}=\dfrac{r_۱}{r}[sh(\varphi_۱-\varphi)+ech(\varphi_۱-\varphi)] \end{cases} \qquad (۴۱)$$

ودستورات بتوان رساندن اعداد دوبل را نیز میتوان از دستورات (۴۰) نتیجه گرفت

$$\begin{cases} [r(ch\varphi + esh\varphi)]^n = r^n(chn\varphi + eshn\varphi) \\ [r(sh\varphi + ech\varphi)]^n = \begin{cases} r^n(shn\varphi + echn\varphi) & \text{برای n فرد} \\ r^n(chn\varphi + eshn\varphi) & \text{برای n زوج} \end{cases} \\ \sqrt[n]{r(ch\varphi + esh\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(ch\frac{\varphi}{n} + esh\frac{\varphi}{n}\right) & \text{برای n فرد} \\ \left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{r}\left(ch\frac{\varphi}{n} + esh\frac{\varphi}{n}\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(sh\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right) \end{array}\right\} & \text{برای n زوج} \end{cases} \\ \sqrt[n]{r(sh\varphi + ech\varphi)} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(sh\frac{\varphi}{n} + ech\frac{\varphi}{n}\right) & \text{برای n فرد} \\ \text{و برای n زوج وجود ندارد} \end{cases} \end{cases}$$

## ۶ ـ اعداد فوق مختلط Hypercomplexe

اعدادی که قبلاً مورد مطالعه قرار گرفتند بدین ترتیب تشکیل یافته‌اند که : به مجموعه اعداد حقیقی جزء E را که در رابطه:

$$E^2 = -pE - q \qquad (۴۳)$$

صدق میکند علاوه نمائیم وسپس همهٔ مجموع های بصورت (۲۳) در نظر بگیریم که اعمال اصلی آنهاطبق طبق دستورات (۴۲) معین میگردد.

اعداد هیپرکمپلکس تعمیمی از اعداد موهومی هستند که بالحاق بعضی اجزاء موهومی $E_1$ و $E_2 \cdots E_n$ به مجموعه اعداد حقیقی بدست می‌آیند این اعداد بصورت :

$$z = a_0 + a_1E_1 + a_2E_2 + \cdots + a_nE_n$$

میباشد که ضرایب $a_0$ و $a_1$ و $\cdots$ و $a_n$ حقیقی هستند (۴۴) .

اعمال جمع و تفریق وضرب اعداد هیپرکملکس طبق دستورهای زیر انجام میپذیرد :

$$(a_0 + a_1E_1 + \cdots + a_nE_n) \pm (b_0 + b_1E_1 \cdots + b_nE_n) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)E_1 + \cdots + (a_n \pm b_n)E_n$$

$$\begin{cases} (a_0 + a_1E_1 + \cdots + a_nE_n) \cdot (b_0 + b_1E_1 + \cdots + b_nE_n) = \\ = a_0b_0 + a_0b_1E_1 + \cdots + a_0b_nE_n + \\ + a_1b_0E + a_1b_1E_1 + \cdots + a_1b_nE_1E_n + \\ \cdots + a_nb_0E_n + a_nb_1E_nE_1 + \cdots + a_nb_nE^2_n \end{cases} \qquad (۴۵)$$

برای اینکه حاصل‌ضرب‌دوعدد هیپرکمپلکس عددی از همان جنس باشد ضروری است که جدولی از ضرب اجزاء مختلط $E_1$ و $E_2 \cdots E_n$ تشکیل بدهیم (۱) .

---

(۱) به ذیل صفحهٔ بعد مراجعه شود

$$E_i \cdot E_j = p_0^{(i\,\text{و}\,j)} + p_1^{(i\,\text{و}\,j)} E_1 + \cdots + p_n^{(i\,\text{و}\,j)} E_n \quad i \,\text{و}\, j = ۱ \,\text{و}\, ۲ \,\text{و}\, \cdots n \qquad (۴۶)$$

یعنی اختیار $n^۲(n+۱)$ عدد حقیقی $p_k^{(i\,\text{و}\,j)}$

با $n$ و ... و ۲ و ۱ = $i$ و $n$ ... و ۱ و ۰ = $k$

درحالت $n=۱$ داریم $n^۲(n+۱)=۲$ و اعداد $p-$ و $q-$ نقش اعداد $p_k^{(i\,\text{و}\,j)}$ را بازی میکند و $p$ و $q$ عبارت از ضرایب معادله (۱) میباشند که تنها جزء مختلط $E$ درآن صدق میکند برای $n>۱$ دستگاه اعداد هیپرکمپلکس بطورکلی نه Commutatif و نه Associatif خواهد بود یعنی $z_۱ \cdot z_۲$ با $z_۲ \cdot z_۱$ نابرابر $(z_۱ \cdot z_۲)z_۳$ نیز با $z_۱(z_۲ \cdot z_۳)$ غیرمتساوی است.

لازمهٔ دوخاصیت فوق اینست که اعداد $p_k^{(i\,\text{و}\,j)}$ تابع شرایطی باشند مثلاً اگر $E_iF_j=E_jE_i$ باشد دراین‌صورت $p_k^{(j\,\text{و}\,i)}=p_k^{(i\,\text{و}\,j)}$ بازاءجمیع مقادیر $k$ خواهدبود شرطی که بطورکلی صادق نیست. تئوری کلی اعداد هیپرکمپلکس بحثی از جبراست و درهندسه دستگاهی از این اعداد مورد استعمال دارد که در آن به هرعدد $z$ میتوان عدد مزدوجی مانند $\bar{z}$ پیدا کرد که دارای مدول مساوی $|z|$ وهمان خواص مشابه اعداد موهومی مختلط معمولی باشند (یعنی $z=Z$ و $|z|^۲=z\bar{z}$ حقیقی و $|z_۱ z_۲|=|z_۱|\cdot|z_۲|$ و مطاوعت از قواعددستورهای ۲۷).

ثابت‌می‌کنندتعداد اجزاء مختلط برای این دستگاه‌های اعداد هیپرکمپلکس جز با اعداد ۱و۳و۷ برابرنمیتواندباشد ودرحالت $n=۳$ دستگاه Commutatif هست ودرحالت $n=۷$ حتی Associaf نیزنمیباشد

برای $n=۱$ به اعداد دوآل ودوبل که قبلاً مطالعه کردیم خواهیم رسید.

برای $n=۳$ شرایط مذکورما را به دستگاه کاترنیون Quaternion سوق مینمایند و این‌دستگاه بوسیله ریاضی‌دان انگلیسی (ایرلاندی) قرن نوزدهم ویلیام جون میلتون William John Milton (۱۸۰۵ - ۱۸۶۵) وارد در ریاضیات شده است.

---

۱ - چون عدد یک در تعریف اعدادکمپلکس قابل فهم نیست بدینجهت اعداد هیپرکمپلکس را بترتیب زیر معرفی میکنند:

$$z = a_0E_0 + a_1E_1 + \cdots + a_nE_n \qquad (۴۴')$$

دراین صورت جدول ضرب اعداد مختلط با فرمولهای زیر مشخص خواهدگردید:

$$E_iE_j = p_0^{(i\,\text{و}\,j)}E_0 + p_1^{(i\,\text{و}\,j)}E_1 + \cdots + p_n^{(i\,\text{و}\,j)}E_n \quad j \,\text{و}\, i = ۰ \,\text{و}\, ۱ \,\text{و}\, \cdots n \qquad (۴۶')$$

اگرجزء مختلط $E_0$ طوری باشدکه $E_0E_1=E_0E_0=E_i$ با $n$ و ... و ۲ و ۱ و $i=0$ آنرا با ۱ میتوان‌نمایش داد و اعداد هیپرکمپلکس درمورد اعداد دوبل نیزپراتیک‌است‌زیرا غالباًبحسب‌عدد $z=a+be$ برمبنای‌دوجزء مختلط مختلط $e_۱=\frac{۱+e}{۲}$ و $e_۲=\frac{۱-e}{۲}$ پایه گذاری شده است واضح است که هرعدد دوبل غیر مشخص را بصورت $z=a_۱e_۱+a\ e_۲$ میتوان نوشت و جدول ضرب اجزاء پایه یک صورت بسیار آسانی را دارا است

$$e^۲_۱=e_۱ \;\text{و}\; e^۲_۲=e_۲ \;\text{و}\; e_۱e_۲=۰$$

$$\begin{cases} z=a+bi+cj+dk \text{ و } i^2=j^2=k^2=-1 \\ ij=-ji=k \text{ و } jk=-kj=i \text{ و } ki=-ik=j \\ \bar{z}=a-bi-cj-dk \cdot |z|^2=z\cdot\bar{z}=a^2+b^2+c^2+d^2 \end{cases} \qquad (۴۷)$$

وهمچنین دستگاهای نزدیک به کاترینون که آنها را :

Pseudo quaternion ویا quaternion doublementdégéneré و quatarnion dégénéré

مینامند.

$$\begin{cases} z=a+bi+ce+df \text{ و } z=a+bi+c\varepsilon+d\eta \\ z=a+be+e\varepsilon+d\xi \text{ و } z=a+b\varepsilon+c\eta+d\eta \end{cases} \qquad (۴۸)$$

که برای آنها جدول ضرب اجزاء مختلط بشکل زیر است :

(۴۹)

| | $-i$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $f$ | $-\varepsilon$ |
| $e$ | $-f$ | $1$ | $-i$ |
| $f$ | $e$ | $i$ | $1$ |

| | $i$ | $\varepsilon$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $\eta$ | $-\varepsilon$ |
| $\varepsilon$ | $-\eta$ | $0$ | $0$ |
| $\eta$ | $\varepsilon$ | $0$ | $0$ |

| | $e$ | $\varepsilon$ | $\xi$ |
|---|---|---|---|
| | $1$ | $\xi$ | $\varepsilon$ |
| | $-\xi$ | $0$ | $0$ |
| | $-\varepsilon$ | $0$ | $0$ |

| | $\varepsilon$ | $\eta$ | $\xi$ |
|---|---|---|---|
| $\varepsilon$ | $0$ | $\xi$ | $0$ |
| $\eta$ | $-\xi$ | $0$ | $0$ |
| $\xi$ | $0$ | $0$ | $0$ |

(یعنی $i^2=ii=-1$ و $ie=f$ و $if=-e$ و غیره)

اعداد هیپر کمپلکس مزدوج با جدول مساوی با دستورهای زیر مشخص میگردند :

$$\begin{cases} \bar{z}=a-bi-ce-df \text{ و } |z|^2=\bar{z}\cdot z=a^2+b^2-c^2-d^2 \\ \bar{z}=a-bi-c\varepsilon-d\eta \text{ و } |z|^2=z\cdot\bar{z}=a^2+b^2 \\ \bar{z}=a-be-c\varepsilon-d\xi \text{ و } |z|^2=z\cdot\bar{z}=a^2-b^2 \\ \bar{z}=a-b\varepsilon-c\eta-d\xi \text{ و } |z|^2=z\cdot\bar{z}=a^2 \end{cases} \qquad (۵۰)$$

بالاخره بازاء $n=7$ به دستگاه octet میرسیم (از کلمهٔ octo به معنای ۸) که برای بار اول بوسیلهٔ آرتور کیل Arthur kiel ریاضی‌دان مشهور انگلیس (۱۸۹۵ - ۱۸۲۱) مورد مطالعه قرار گرفت.

$$z=a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3+a_4i_4+a_5i_5+a_6i_6+a_7i_7 \qquad (۵۴)$$

باجدول ضرب زیر :

(۵۲)

| | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_5$ | $i_6$ | $i_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i_1$ | $-1$ | $i_3$ | $-i_2$ | $i_5$ | $-i_4$ | $-i_7$ | $i_6$ |
| $i_2$ | $-i_3$ | $-1$ | $i_1$ | $i_6$ | $i_7$ | $-i_4$ | $-i_5$ |
| $i_3$ | $i_2$ | $-i_1$ | $-1$ | $i_7$ | $-i_6$ | $i_5$ | $-i_4$ |
| $i_4$ | $-i_5$ | $-i_6$ | $-i_7$ | $-1$ | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
| $i_5$ | $i_4$ | $-i_7$ | $i_6$ | $-i_1$ | $-1$ | $-i_3$ | $i_2$ |
| $i_6$ | $i_7$ | $i_4$ | $-i_5$ | $-i_2$ | $i_3$ | $-1$ | $-i_1$ |
| $i_7$ | $-i_6$ | $i_5$ | $i_4$ | $-i_3$ | $-i_2$ | $i_1$ | $-1$ |

وبا تعریف زیر در مورد عدد مزدوج وجدول :

$$\begin{cases} \bar{z}=a_0-a_1i_1-a_2i_2-a_3i_3-a_4i_4-a_5i_5-a_6a_6-a_7i_7 \\ |z|^2=z\cdot\bar{z}=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2 \end{cases} \qquad (۵۳)$$

وهمچنین به دستگاه‌های زیادی که قریب به دستگاهای Octet میباشند که‌میتوان آنها را Pseudo octet یا Octet dégénéré نامید جمیع این دستگاه‌هامواردااستعمال درهندسی دارند .