تعیین شرایط حدی در گنبدهای پوسته‌ای بدون خمش * [۱]

نوشتهٔ :

محمد حسین کاشانی ثابت

PH.D.

دانشیار مقاومت مصالح دانشکدهٔ فنی

مقدمه وخلاصهٔ مقاله ـ درمحاسبات تعادلی وتغییرشکل گنبدهای پوسته‌ای دومکتب موجوداست :

۱ ـ نظریهٔ غشائی(۱)　　　　۲ ـ نظریهٔ خمشی(۲)

در مکتب نخست از تأثیر لنگر خمشی در محاسبات این نوع گنبدها صرفنظر میشود و این امر در گنبدهای پوسته‌ای بلند مورد پیدا میکند و نتیجهٔ حاصله با واقعیت مطابقت دارد ، زیرا دراینحالت کمیت لنگر خمشی اندك وقابل اغماض است درصورتیکه تأثیر قوس وانحناء بسیار مهم میباشد .

درمکتب دوم تأثیر لنگر خمشی در محاسبات منظور میگردد و این موضوع درگنبدهای پوسته‌ای خوابیده(۳) مصداق پیدا میکند که درآنها تأثیر عمل صفحه ها برعمل قوس وانحناء فزونی‌دارد ودیگرنمیتوان تأثیر لنگر خمشی را نادیده گرفت .

اعمال و رعایت شرایط مناسب درتکیه گاهها درمکتب دوم کاملاً شناخته شده‌است ولی درمکتب نخست شرایط حدی حائز اهمیت بیشتری میباشد زیرا این شرایط باید طوری باشد که شرط اساسی صرفنظر کردن از تأثیر لنگر خمشی را نقض ننماید .

این مقاله که‌از نظرخوانندگان‌میگذرد راجع به‌تعیین شرایط حدی‌طبیعی دراین‌نوع گنبدهامیباشد .

برای آنکه بحث دراینموضوع جنبهٔ عام داشته باشد ودرمورد گنبدهای پوسته‌ای با شکل اختیاری

---

* عدد داخل ابروها نمرهٔ هرمرجع را درفهرست مرجع ها می‌نماید .

۱- Membrane Theory　　۲- Bending Theory　　۳- Shallow Shells

صادق باشد ، دراین‌مقاله گنبد پوسته‌ای باشکل غیرمشخص درنظر گرفته شده‌است بطوریکه هرنقطه ازسطح میانگین[1] آن دارای مختصات :

$$Z = Z(x , y)$$

باشد، که درآن x و y و z یکدستگاه مختصات‌متعامدرا تشکیل داده و z یک‌تابع تک‌مقداری[2] از دومتغیر مستقل x و y باشد.

انرژی تغییرشکل چنین پوسته‌ای بدواً محاسبه گردیده سپس تغییرات آن تعیین وبرابر صفر قرارداده شده است تا شرایط حدی طبیعی[3] بدست آید .

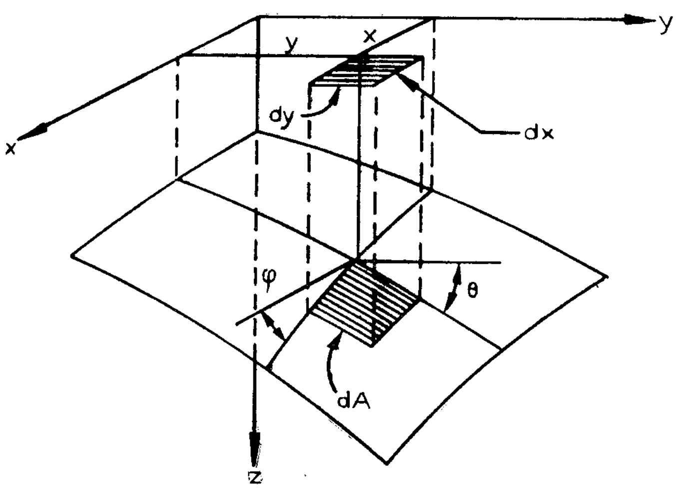
نتایج بدست آمده درگنبدهای انتقالی (خطدار) مانندگنبدهای استوانی با محیط مربع مستطیلی وغیره قابل اعمال میباشد . در پایان این مقاله ترکیبات ممکن از این شرایط حدی طبیعی درحالات زیر بررسی گردیده است :

الف ـ لبهٔ آزاد — ب ـ لبهٔ متکی‌بردیافراگم

ج ـ لبهٔ متکی برتکیه گاه آزاد — د ـ لبهٔ گیردار

۱ ـ تعریف‌ها :

دستگاه مختصات نموده شده در شکل (۱) همان دستگاهی است که پوخر[4] دربررسی تنش‌های گنبدهای پوسته‌ای بدون خمش بکار برده است [۲ ، ۳ ، ٤ و ٥] .



شکل (۱)

خطوطی ازگنبد بمختصات x= مقداری ثابت و y= مقداری ثابت ، از تلاقی سطح میانگین با صفحات عمود برمحورهای x و y بدست میاید.

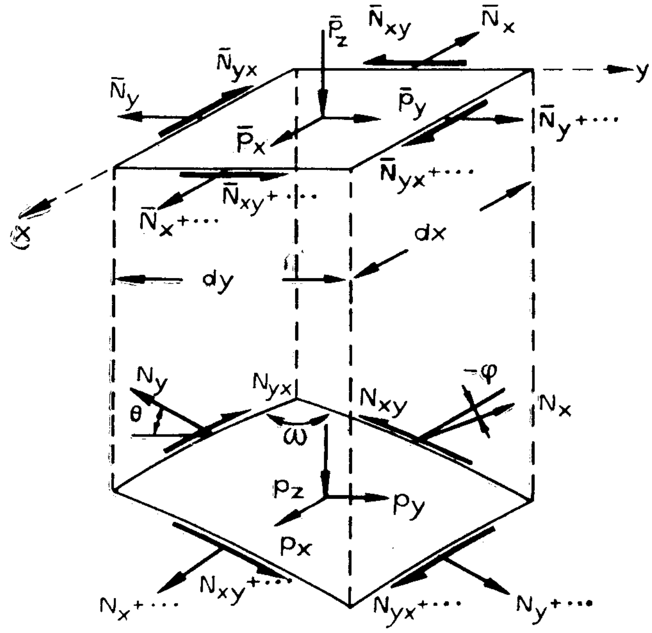
درشکل (۲) نیروهای‌مؤثر ومنتجهٔ تنش های‌پوسته‌ای‌درواحدطول خطوط‌مختصات‌با N_x ، N_y و N_{xy}

۱- Middle Plane — ۲- Single Valued function

۳- Natural Boundary conditions — ٤- Pucher

نموده شده است . نیروهای N_x و N_{yx} موازی با صفحهٔ x و z ؛ نیروهـای N_y و N_{xy} موازی با صفحهٔ y و z میباشد .

درهمین شکل مؤلفه های افقی نیروهای پوسته‌ای در واحد طول عنصر خط افقی dx یا dy با $\overline{N_x}$ و $\overline{N_{yx}}$ ، $\overline{N_y}$ ، $\overline{N_{xy}}$ نشان داده شده است . مؤلفه هـای نیروهای خارجی در واحد سطح میانگین عنصر گنبد دراستدادهای x و y و z عبارت از p_x ، p_y و p_z میباشد ، درصورتیکه $\overline{p_x}$ ، $\overline{p_y}$ و $\overline{p_z}$ معرف همین مؤلفه ها در واحد سطح تصویر افقی سطح میانگین خواهد بود .



شکل (۲)

اگر dA مساحت عنصر سطح گنبد و dxdy تصویر آن برصفحهٔ افقی باشد ، در میان این مؤلفه ها رابطه های زیر برقرار است :

$$\frac{\overline{p_x}}{p_x}=\frac{\overline{p_y}}{p_y}=\frac{\overline{p_z}}{p_z}=\frac{dA}{dxdy}=\frac{(1-\sin^2\varphi\sin^2\theta)^{1/2}}{\cos\varphi\cos\theta} \qquad (1)$$

همچنین از ملاحظات هندسی نتایج زیر بدست میآید :

$$\overline{N_x}=N_x\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\ ,\ N_{xy}=\overline{N_{yx}}=N_{xy}=N_{yx}\ ,\ \overline{N_y}=N_y\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \qquad (2a—c)$$

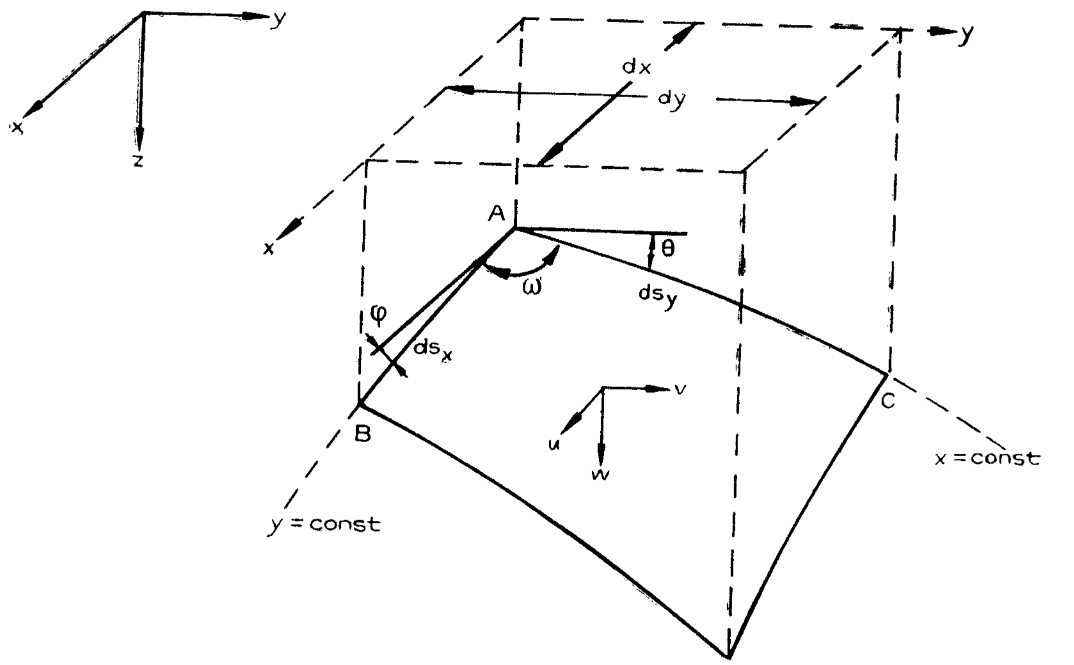
۲ ـ شرایط تعادل

تعادل نیروهای مؤثر برروی عنصر گنبد در استدادهای x و y و z منجر بمعادلات شناخته شدهٔ زیر میگردد :

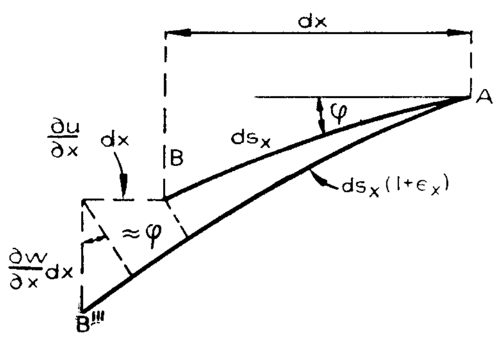
$$\frac{\partial \overline{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial \overline{N}_{yx}}{\partial y}=-\overline{p_x}$$

(۲a—c)
$$\frac{\partial \overline{N}_y}{\partial y}+\frac{\partial \overline{N}_{xy}}{\partial x}=-\overline{p_y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{N_x}\times\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{N}_{yx}\times\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{N}_{xy}\times\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{N}y\times\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=-\overline{p_z}$$



شکل (۳)



شکل (٤)

میدانیم که اگر تنش ها را برحسب **تابع تنش اری**[1] بیان کنیم، درمعادلات فوق صادق خواهدبود:

$$\overline{N}_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\int\overline{p_x}\,dx$$

(٤a—c)
$$\overline{N}_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\int\overline{p_y}\,dy$$

$$\overline{N}_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$$

۱- Airy

اگر درمعادلهٔ (۳c) بجای $\overline{N_x}$ ، $\overline{N_y}$ و $\overline{N_{xy}}$ عبارت‌های بالا را قرار دهیم نتیجه میشود :

$$(5) \qquad L(\varphi) \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \times \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \times \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} =$$

$$-\overline{p_z} + \overline{p_x} \times \frac{\partial Z}{\partial x} + \overline{p_y} \times \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\int \overline{p_x}\,dx + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\int p_y\,dy$$

که درآن L یک عامل دیفرانسیل خطی است که درکاربردهای عملی از آن استفاده میگردد .

باید خاطرنشان کرد که بکار بردن تابع اری درگنبدها منسوب به پوخر میباشد [۵] .

۳ ـ روابط هندسی

درشکل (۳) عنصری ازگنبد با ابعاد افقی dx و dy آن ومؤلفه های مثبت تغییرمکان u ، v و w که موازی با محورهای مختصات x ، y و z میباشد نموده شده است .

یک چنین عنصری اساساً با زوایای φ ، θ و ω مشخص میگردد . این زوایا با سطح $z(x, y)$ گنبد بترتیب زیر مربوط میباشد :

$$(6a-c) \quad tg\varphi = \frac{\partial z}{\partial x} \;,\; tg\theta = \frac{\partial z}{\partial y} \;,\; \cos\omega = \sin\varphi\sin\theta = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y}}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}}$$

٤ ـ روابط سینماتیک

شکل (٤) تغییرشکل ضلع $dS_x = AB$ را نشان‌میدهد . از ملاحظات هندسی‌نتایج زیر بدست‌میآید:

$$\varepsilon_x dS_x = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\sin\varphi$$

با رعایت تقریبات از مرتبهٔ اول ، مؤلفهٔ تغییرمکان v درکمیت $\varepsilon_x dS_x$ مؤثر نخواهد بود .

اگر در رابطهٔ بالا بجای $dS_x = \frac{dx}{\cos\varphi}$ قرار دهیم ، ε_x بعبارت زیر نوشته میشود :

$$(7a) \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\sin\varphi\cos\varphi$$

برای یک عنصر قوس dS_y بروش مشابهی خواهیم داشت :

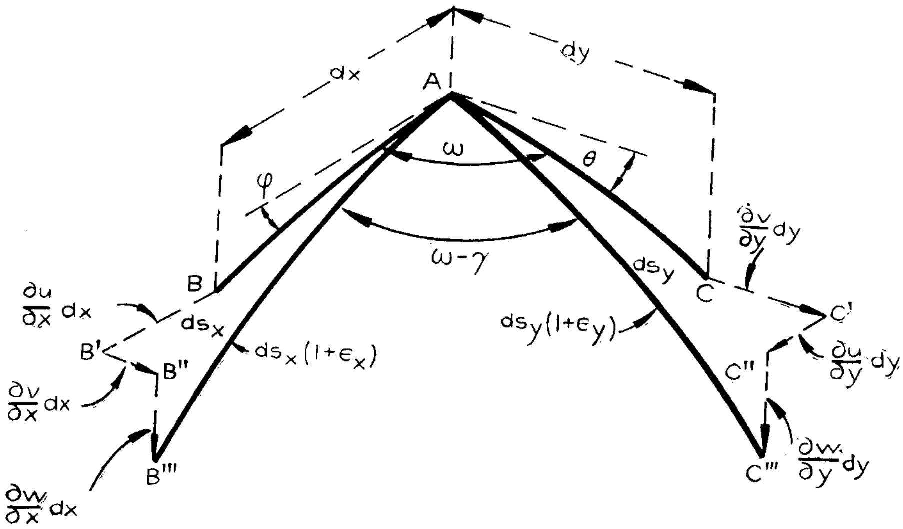
$$(7b) \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

که درآن ε_y عبارت از تغییرطول نسبی برای خطوط x= مقداری ثابت ، میباشد .

اگر γ عبارت‌از زاویهٔ برشی عنصرگنبد یا تغییرشکل نسبی زاویهٔ ω در نتیجهٔ برش باشد ، میتوان

آنرا از محاسبهٔ حاصلضرب عددوار حاملهای ‴AB و ‴AC بدو روش مختلف بدست آورد . از شکل (۵) نتیجه میگردد :

$$\text{(a)}\qquad dS_x dS_y(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)\cos(\omega-\gamma)=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\frac{\partial u}{\partial y}dy+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\frac{\partial v}{\partial x}dx+\left(tg\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx\left(tg\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy$$



شکل (۵)

از طرف دیگر با بکار بردن عبارت‌های (۷ a) و (۷ b) بجای ε_x و ε_y ، همین حاصلضرب داخلی را با قراردادن $\cos\gamma \simeq 1$ و $\sin\gamma \simeq \gamma$ میتوان چنین نوشت :

$$\text{(b)}\qquad \frac{dx}{\cos\varphi}\times\frac{dy}{\cos\theta}\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi\sin\varphi\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\varphi+\frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi\sin\theta\right)\left(\cos\omega+\gamma\sin\omega\right)$$

از برابری عبارت‌های (a) و (b) ، γ بشرح زیر بدست میآید :

$$\text{(۷ c)}\qquad \gamma=\frac{1}{\sin\omega}\Bigg(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\cos^3\varphi\sin\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\cos^3\theta\sin\varphi\Bigg)$$

۵ ـ روابط ارتجاعی :

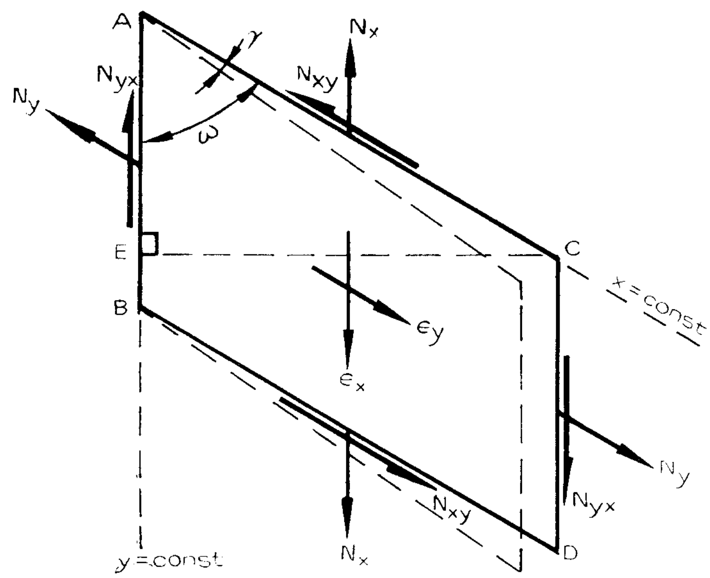
انرژی تغییرشکل یک گنبد را میتوان بصورت تابعی از تنش‌ها یا تابعی از تغییرشکلهای نسبی

وهمچنین بطریقهٔ مخلوط بیان کرد . از طرف دیگر تنش ها و تغییرشکلهای نسبی را میتوان با عبارتهائیکه تابع مؤلفه های تغییر مکان باشد نوشت . چون هدف ما آنست که انرژی تغییر شکل بالنسبه بتغییرات تغییرمکانها می‌نیمم گردد لذا آنرا بصورت تابعی از مؤلفه های تغییرمکان u ، v و w بیان خواهیم کرد .

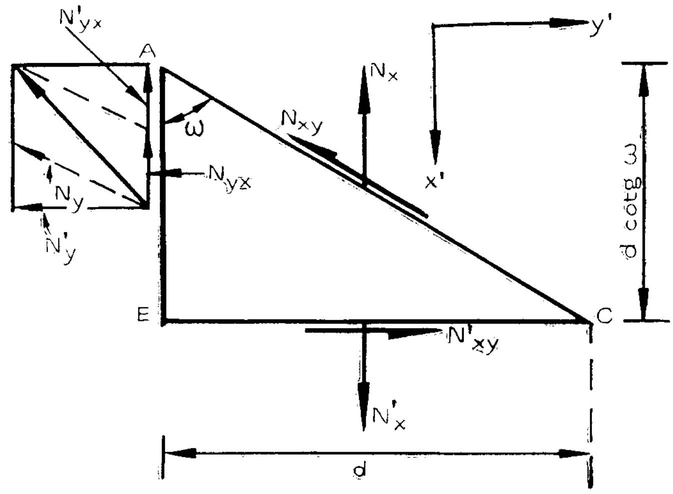
درمعادلات (٧ a—c) هم اکنون ε_x ، ε_y و γ بصورت توابعی از تغییرمکانها بیان شده است پس باقی میماند که تنش ها نیز بصورت توابعی از u ، v و w ذکر گردد . برای رسیدن بدین منظور از برخی روابط ارتجاعی وهندسی استفاده خواهیم کرد .

شکل (٦) عنصر بی‌نهایت کوچکی از گنبد را نشان میدهد که با توجه به تقریب های از مرتبهٔ اول میتوان آنرا متوازی‌الاضلاع درنظر گرفت . علائم نموده شده در این شکل دارای همان معانی است که درصفحه های قبل ذکر گردید .

شکل (٧) یکدستگاه فرعی مختصات Ax' و Ay' ومثلث AEC جدا شده از عنصر گنبد (شکل ٦)

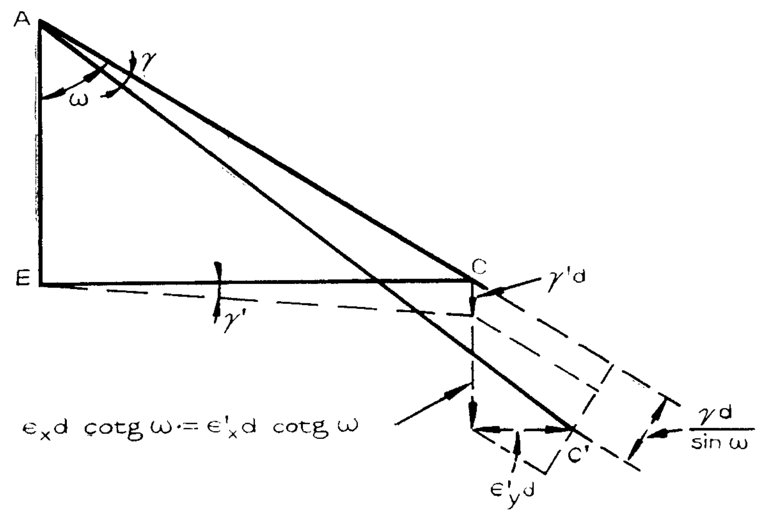


شکل (٦)



شکل (٧)

راکه درصفحهٔ این متوازی‌الاضلاع قرار دارد نشان میدهد. بدینطریق قانون هوك[1] را میتوان بکار برد. در دستگاه جدید محورهای x' و y' ، برآیندهای تنش N'_x ، N'_y و N'_{xy} معرف نیروهای پوسته‌ای و ε'_x ، ε'_y و γ' بترتیب معرف تغییرشکلهای نسبی و زاویهٔ برشی میباشد.



شکل (۸)

با نوشتن شرایط تعادل عنصر AEC گنبد ، معادله‌های زیر بدست میآید :

$$N'_x = N_x \frac{1}{\sin\omega} + 2N_{xy}\,\mathrm{cotg}\,\omega + N_y \frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}$$

$$N'_y = N_y \sin\omega \qquad (8\,a-c)$$

$$N'_{xy} = N_{xy} + N_y \cos\omega$$

با بکار بردن قانون هوك عبارت‌های زیر برای ε'_x ، ε'_y و γ' بدست میآید :

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x = \frac{1}{Ee}\left(N'_x - vN'_y\right)$$

$$= \frac{1}{Ee}\left(N_x \frac{1}{\sin\omega} + 2N_{xy}\,\mathrm{cotg}\,\omega + N_y \sin\omega\left(\mathrm{cotg}^2\omega - v\right)\right)$$

$$\varepsilon'_y = \frac{1}{Ee}\left(N'_y - vN'_x\right) \qquad (9\,a-c)$$

$$= \frac{1}{Ee}\left(-N_x \frac{v}{\sin\omega} - 2v\,N_{xy}\,\mathrm{cotg}\,\omega + N_y\left(\frac{\sin^2\omega - v\cos^2\omega}{\sin\omega}\right)\right)$$

$$\gamma' = \frac{2N'_{xy}(1+v)}{Ee} = \frac{2(1+v)}{Ee}\left(N_{xy} + N_y \cos\omega\right]$$

که درآن e عبارت از ضخامت گنبد و E ضریب ارتجاعی جسم آن و v ضریب پوآسون میباشد.

۱- Hooke

معادله های (۹ a—c) روابط بین نیروهای پوسته‌ای وتغییرشکلهای نسبی را بیان میکند. ازمجموعهٔ معادله های (۸ a—c) و (۹ a—c) نیروهای N'_x ، N'_y و N'_{xy} و همچنین تغییرشکلهای خطی و زاویه‌ای ε'_x ، ε'_y و γ' که بستگی بدستگاه جدید مختصات دارد برحسب نیروهای پوسته‌ای مورب بدست میآید.

با تغییردادن جای x و y درمعادلهٔ (۹ a) رابطهٔ میان ε_y و N_x ، N_y و N_{xy} بشرح زیر بدست میآید:

$$\varepsilon_y=\frac{1}{Ee}\left(N_y\frac{1}{\sin\omega}+2N_{xy}\operatorname{cotg}\omega+N_x\sin\omega(\operatorname{cotg}^2\omega-\nu)\right) \qquad (9d)$$

در شکل (۸) فاصلهٔ d معرف یک طول مبنا میباشد و داریم:

$$\frac{\gamma d}{\sin\omega}=\gamma' d\sin\omega+\varepsilon'_x d\operatorname{cotg}\omega\sin\omega-\varepsilon'_y d\cos\omega$$

اگر بجای ε'_x ، ε'_y و γ' در این رابطه از معادلات (۹a—c) قرار دهیم نتیجه میشود:

$$\gamma=\frac{1+\nu}{Ee}(N_x\cos\omega+2N_{xy}+N_y\cos\omega) \qquad (9e)$$

۶ ـ روابط میان تنش‌ها وتغییرمکانها

این روابط را میتوان از ترکیب روابط (۷ a—c) بترتیب با معادلات (۹a) ، (۹d) و (۹e) بدست آورد.

بدینطریق سه معادلهٔ خطی زیر بدست میآید:

$$\begin{aligned}
&N_x+(\cos^2\omega-\nu\sin^2\omega)N_y+2N_{xy}\cos\omega\\
&\qquad=Ee\sin\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\sin\varphi\cos\varphi\right)\\
&(\cos^2\omega-\nu\sin^2\omega)N_x+N_y+2N_{xy}\cos\omega\\
&\qquad=Ee\sin\omega\left(\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\cos\theta\right)\\
&\cos\omega N_x+\cos\omega N_y+2N_{xy}\\
&\qquad=\frac{Ee}{1+\nu}\cdot\frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\cos\varphi\right.\\
&\qquad-\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\cos^2\varphi\sin\theta\\
&\qquad\left.+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\varphi\cos^2\theta\right)
\end{aligned} \qquad (10\ a-c)$$

از حل این سه معادله N_x ، N_y و N_{xy} برحسب تابعی از مشتقات جزئی u ، v و w بدست‌میآید. بمعادلات (۱۱ a—c) توجه شود.

$$N_x=\frac{Ee}{2(1-\nu^2)\sin\omega}\Big[2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos\varphi\cos\theta$$
$$-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos\varphi\cos\theta+2\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\theta\,(\nu+\operatorname{cotg}^2\omega)$$
$$+2\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi\left(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)+2\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\left(\nu\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)\Big]$$

$$N_{xy}=\frac{Ee}{2(1-\nu^2)\sin\omega}\Big[-2\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\cos\theta\,(1-\nu+2\operatorname{cotg}^2\omega)$$
$$+\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi\cos\theta\,(1-\nu+2\operatorname{cotg}^2\omega)-2\frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\theta\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\qquad(\text{۱۱}a\text{–}c)$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi\sin\theta\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\nu+2\cos^2\varphi\operatorname{cotg}^2\omega)$$
$$+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\varphi\cos\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta-\nu+2\cos^2\theta\operatorname{cotg}^2\omega)\Big]$$

$$N_y=\frac{Ee}{2(1-\nu^2)\sin\omega}\Big[2\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\varphi\,(\nu+\operatorname{cotg}^2\omega)-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos\varphi\cos\theta\,.$$
$$-2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cdot\cos\varphi\cos\theta+2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\omega}+2\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi\left(\nu\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)$$
$$+2\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\left(\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)\Big]$$

همچنین از ترکیب معادله‌های (۲ a—c) و (۱۱ a—c) ، $\bar{N}_x$ و $\bar{N}_y$ برحسب تابعی از همین مشتقات تغییرمکانها بدست میاید . بمعادلات (۱۲ a—c) توجه شود .

چون $\bar{N}_{xy}$ برابر با N_{xy} میباشد پس لزومی ندارد عبارت آن نوشته شود .

$$\bar{N}_x=\frac{Ee}{2(1-\nu^2)\sin\omega}\Big[2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\cos^3\varphi}{\cos\theta\sin^2\omega}-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos^2\varphi$$
$$-2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos^2\varphi+2\frac{\partial v}{\partial y}(\nu+\operatorname{cotg}^2\omega)\cos\varphi\cos\theta$$
$$+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta}\left(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)+2\frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi\left(\nu\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)\Big]$$

$$(12\,a\text{–}c)\qquad \bar{N}_{xy}=N_{xy}$$

$$\bar{N}_y=\frac{Ee}{2(1-\nu^2)\sin\omega}\Big[2\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi\cos\theta\,(\nu+\operatorname{cotg}^2\omega)-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos^2\theta$$
$$-2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\cos^2\theta+2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\cos^3\theta}{\cos\varphi\sin^2\omega}+2\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta\left(\nu\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)$$
$$+2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi}\left(\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\right)\Big]$$

۷ ـ عبارت‌های انرژی تغییرشکل

انرژی تغییرشکل $U_\circ$ ، در واحد سطح سطح میانگین گنبد را میتوان برحسب تابعی از N_x ، N_y ، N_{xy} ، ε_x ، ε_y و γ (شکل ۹a) بیان کرد .

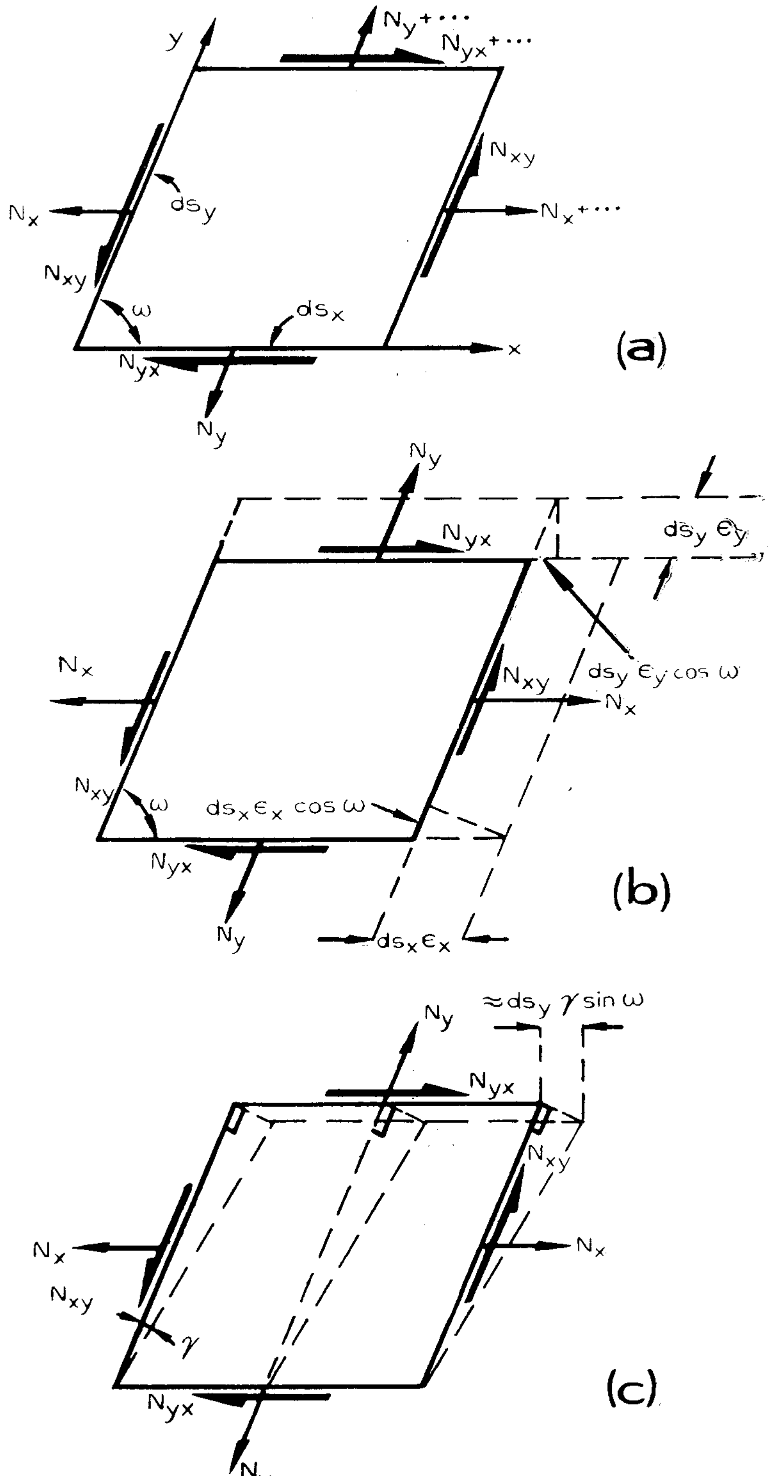
(شکل ۹b) نشان میدهد که کار نیروهای پوسته‌ای ناشی از یک تغییرشکل $dS_x\varepsilon_x$ با درنظرگرفتن جملات از مرتبهٔ اول عبارت خواهد بود از :

$$\frac{۱}{۲}(N_x dS_y)(\varepsilon_x dS_x)+\frac{۱}{۲}(N_{xy}dS_y)(\varepsilon_x dS_x\cos\omega)$$

همچنین کار انجام شده برای یک تغییرشکل جزئی $dS_y\varepsilon_y$ برابر است با :

$$\frac{1}{2}(N_y\, dS_x\, \varepsilon_y\, dS_y + N_{xy}\, dS_x\, \varepsilon_y\, dS_y \cos\omega)$$

کار ناشی از یک زاویهٔ برشی γ منجر بعبارت $\frac{1}{2}(N_{xy} dS_x \gamma \sin\omega\, dS_y)$ خواهد شد زیرا نیروهای دیگر یا عمود بر تغییرمکان میباشد یا کارهای آنها یکدیگر را خنثی میکنند (شکل ۹c) .



شکل (۹)

بالنتیجه برای عنصری از گنبد بمساحت $dS_x dS_y \sin\omega$ ، انرژی تغییرشکل ناشی از تغییر طولهای نسبی ε_x و ε_y وتغییرشکل زاویه‌ای γ را از جمع کارهای جزئی آنها میتوان بعبارت زیر نوشت :

$$U_\circ \, dS_x \, dS_y \sin\omega = \frac{1}{2} N_x \, dS_y \, dS_x \, \varepsilon_x + \frac{1}{2} N_{xy} \, dS_x \, dS_y \, \varepsilon_x \cos\omega$$
$$\frac{1}{2} N_y \, dS_x \, dS_y \, \varepsilon_y + \frac{1}{2} N_{xy} \, dS_y \, dS_x \, \varepsilon_y \cos\omega$$
$$+\frac{1}{2} N_{xy} \, dS_x \, dS_y \, \gamma \sin\omega$$

از تقسیم طرفین معادلهٔ بالا بر $dS_x dS_y$ نتیجه میگردد :

(۱۳) $$U_\circ = \frac{1}{2\sin\omega}\left[(N_x + N_{xy}\cos\omega)\,\varepsilon_x + (N_y + N_{xy}\cos\omega)\,\varepsilon_y + N_{xy}\,\gamma\sin\omega\right]$$

اکنون با دانستن $U_\circ$ میتوان انرژی تغییرشکل را برحسب مشتقات u ، v و w بکمک معادلات (۷) و (۱۱) که‌نیروها وتغییرشکلها بصورت تابعی از آنها میباشد بیان کرد . معادلهٔ (۱۴) انرژی‌تغییرشکل برای تمام سطح خواهد بود :

(۱۴)
$$\begin{aligned}
U = \frac{Ee}{4(1-\nu^2)}\iint \Big[& 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\cos^3\varphi}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin^3\omega} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \cos\varphi\cos\theta\,\frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\,\omega}{\sin\omega} \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \left(\cos\varphi\cos\theta\,\frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\,\omega}{\sin\omega}\right) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\cos^3\theta}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sin^3\omega} \\
& + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \frac{\cos\varphi}{\cos\theta\sin\omega}\left(\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\nu) + 2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi\cos^2\theta\,\mathrm{cotg}^2\,\omega\right) \\
& + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \frac{\cos\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\left(\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta-\nu) + 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\mathrm{cotg}^2\,\omega\right) \\
& - 4\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin^2\omega}\cdot\cos^2\varphi - 4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin^2\omega}\cdot\cos^2\varphi + 4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\cos\varphi\cos\theta\,\frac{\nu+\mathrm{cotg}^2\,\omega}{\sin\omega} \\
& + 4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta\sin}\left(\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\theta\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin\omega}\right) + 4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}\left(\nu\sin\theta - \cos^2\theta\sin\varphi\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin\omega}\right) \\
& + 2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\left(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega} - (1+\nu)\right) + 2\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\left(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega} - (1+\nu)\right) \\
& + 2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\left(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1+\nu)\right) + 4\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\omega}\left(\nu\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\theta\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin\omega}\right) \\
& + 2\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\mathrm{cotg}\,\omega\left(\frac{2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1-\nu)\right) - 4\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\cos^2\theta\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin^2\omega} - 4\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\cos^2\theta\cdot\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin^2\omega} \\
& + 4\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\left(\sin\theta - \cos^2\theta\sin\varphi\,\frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin\omega}\right) + 2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\left(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1+\nu)\right) \\
& + 2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\cos\theta\cos\varphi\,\frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\,\omega}{\sin\omega}\Big]\,dx\,dy
\end{aligned}$$

باید خاطرنشان کرد که انرژی $U_\circ$ را برحسب تابعی‌از تنش هانیزمیتوان بدست‌آورد [۷] ؛ داریم :

$$\sigma'_x = \frac{N'_x}{e} \quad ، \quad \sigma'_y = \frac{N'_y}{e} \quad \text{و} \quad \tau'_{xy} = G\gamma'$$

پس $U_\circ$ برابر است با :

(۱۵) $$U_\circ = \frac{e}{2E}\left(\sigma'^2_x + \sigma'^2_y\right) - \frac{\nu e}{E}\left(\sigma'_x \cdot \sigma'_y\right) + \frac{e}{2G}\,\tau'^2_{xy}$$

توضیح ـ درسطر پانزدهم ازبالا قبل‌از اولین پرانتز حرف ω درمخرج افتاده است.

که درآن e ، E ، G و v بترتیب عبارت از ضخامت گنبد ، ضریب ارتجاعی ، ضریب پیچشی وضریب پوآسون میباشد . بموجب قانون هوك میتوان نوشت :

$$\sigma'_x = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon'_x + v\varepsilon'_y)$$

$$\sigma'_y = \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon'_y + v\varepsilon'_x) \qquad (16)$$

$$\tau'_{xy} = G\gamma'_{xy} = G\gamma' = \frac{E}{2(1+v)}\gamma'$$

با گزاردن مقادیر (۱۶) درمعادلهٔ (۱۵) ، خواهیم داشت :

$$U_\circ = \frac{Ee}{2(1-v^2)}\left[(\varepsilon'^2_x + \varepsilon'^2_y) + 2v\varepsilon'_x\varepsilon'_y + \frac{(1-v)}{2}\gamma'^2\right] \qquad (17)$$

معادله‌های (۱۳) و (۱۷) منتهی بیک نتیجه میگردد . درحقیقت ، عبارت انرژی تغییرشکل برای تمامی سطح گنبد بموجب معادلهٔ (۱۷) چنین خواهد بود :

$$U = \frac{Ee}{2(1-v^2)}\iint\left[(\varepsilon_x'^2 + \varepsilon_y'^2) + 2v\varepsilon_x'\varepsilon'_y + \frac{\gamma'^2(1-v)}{2}\right]dA \qquad (18)$$

که درآن dA معرف عنصر جزئی از سطح میانگین گنبد میباشد که بشرح زیر نوشته میشود :

$$dA = \frac{dx\,dy\,\sin\omega}{\cos\varphi\cos\theta} \qquad (19)$$

۸ ـ تعیین شرایط حدی طبیعی

بموجب آنچه که درمرجع‌های [۸-۱٤] مذکور است ، شرایط حدی‌را میتوان با حداقل گردانیدن انرژی تغییرشکل بدست آورد . عبارت انرژی تغییرشکل تابعی‌از متغیرهای‌مطلق x و y ومتغیرهای‌غیرمستقل u ، v و w میباشد که باید نخست تغییرات آنرا پیدا کرده سپس عبارت بدست‌آمده برای این تغییرات را برابر صفر قرار داد . بدین منظور از قواعد محاسبهٔ تغییرات[1] استفاده شد . محاسبهٔ فوق در مورد گنبدی با محیط مربع مستطیلی باضلاع a و b انجام گردید . مبدأ مختصات‌متعامد x ، y و z درمرکز این‌مربع مستطیل وواقع درسطح میانگین گنبد درنظر گرفته شد .

پس از انجام انتگراسیون‌های جزء بجزء وساده کردن‌های متعدد که ذکر آنها طولانی واز حوصلهٔ صفحات مجله خارج است ، عبارت زیر برای این تغییرات بدست آمد :

۱- Calculus of Variations

$$\delta U = \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(2 \left(\frac{\cos^3\varphi}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin^3\omega} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\cos^2\varphi\cos\omega}{\sin^3\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \cos\varphi\cos\theta \frac{\nu + \mathrm{cotg}^2\omega}{\sin\omega} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right.\right.\right.\right. \tag{۲۰}$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi\sin\varphi\cos\theta}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos^3\varphi\sin\theta}{\sin^3\omega} (\nu - (1-\nu)\,\mathrm{tang}^2\varphi\cos^2\theta) \frac{\partial w}{\partial y} \Big) \delta u$$

$$+ \left(-2 \frac{\cos^2\varphi\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\varphi\cos\theta \frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\omega}{\sin\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right.$$

$$-2 \frac{\cos^2\theta\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta v$$

$$+ \left(2 \frac{\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{2\cos^3\theta\sin\varphi}{\sin^3\omega} (\nu - (1-\nu)\,\mathrm{tang}^2\theta\cos^2\varphi) \frac{\partial v}{\partial y} \right.$$

$$+ \frac{\cos\varphi}{\cos\theta\sin\omega} (\sin^2\theta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - \nu) + 2\sin^2\varphi$$

$$\left.\left. -2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\mathrm{cotg}^2\omega) \frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{cotg}\,\omega \left(\frac{2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1-\nu) \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w \right) dy \Bigg]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$+ \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\left(-2 \frac{\cos^2\varphi\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\varphi\cos\theta \frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\omega}{\sin\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right.\right.\right.$$

$$-2 \frac{\cos^2\theta\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \right) \frac{\partial w}{\partial y} \Big) \delta u$$

$$+ 2 \left(\cos\varphi\cos\theta \frac{\nu + \mathrm{cotg}^2\omega}{\sin\omega} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \cos^2\theta \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ \frac{\cos^3\theta}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\cos^3\theta\sin\varphi}{\sin^3\omega} (\nu - (1-\nu)\,\mathrm{tang}^2\theta\cos^2\varphi) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \Big) \delta v$$

$$+ \left(2 \frac{\cos^3\varphi\sin\theta}{\sin^3\omega} (\nu - (1-\nu)\,\mathrm{tang}^2\varphi\cos^2\theta) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right.$$

$$+ 2 \frac{\cos^2\theta\sin\theta\cos\varphi}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{cotg}\,\omega \left(2 \frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1-\nu) \right) \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\left.\left. + \frac{\cos\theta}{\cos\varphi\sin\omega} (\sin^2\varphi(\cos^2\theta - \sin^2\theta - \nu) + 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\varphi\,\mathrm{cotg}^2\omega) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta w \right) dx \Bigg]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\left(2 \frac{\cos^3\varphi}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\cos^2\varphi \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} \right.\right.$$

$$+ \cos\varphi\cos\theta \frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\omega}{\sin\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\cos^2\varphi \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cos\varphi\cos\theta \frac{4\,\mathrm{cotg}^2\omega + 1 + \nu}{\sin\omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} - 2\cos^2\theta \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$+ 2 \frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta\sin\omega} \left(\sin\varphi - \cos^2\varphi\sin\theta \frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin\omega} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{2\nu\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega} - 2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi \frac{\mathrm{cotg}\,\omega}{\sin^2\omega} \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\cos^3\varphi\sin\theta}{\sin^3\omega} - \frac{(1+\nu)\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega} \left(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega} - (1+\nu) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big) \delta u + \left(-2\cos^2\varphi \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right.$$

$$+ \cos\varphi\cos\theta \frac{4\,\mathrm{cotg}^2\omega + 1 + \nu}{\sin\omega} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - 2\cos^2\theta \cdot \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+ \cos\varphi\cos\theta \frac{1-\nu+2\,\mathrm{cotg}^2\omega}{\sin\omega} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\cos^2\theta \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

$$+2\frac{\cos^3\theta}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sin^3\omega}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+\Big(\frac{2\nu\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}-2\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}+2\frac{\cos^3\theta\sin\varphi}{\sin^3\omega}-\frac{(1+\nu)\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$+2\frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\Big(\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\delta v+\Big(2\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta\sin\omega}\Big(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+\Big(\frac{2\nu\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}-2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}+2\frac{\cos^3\varphi\sin\theta}{\sin^3\omega}$$

$$-(1+\nu)\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$+\Big(\frac{2\nu\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}-2\cos\theta\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}+\frac{2\cos^3\theta\sin\varphi}{\sin^3\omega}-(1+\nu)\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

$$+\frac{2\cos^2\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\Big(\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\theta\sin\omega}\big(\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\nu)+2\sin^2\varphi$$

$$-2\cos^2\varphi\cos^2\theta\operatorname{cotg}^2\omega\big)+2\operatorname{cotg}\omega\Big(\frac{2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1-\nu)\Big)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$+\frac{\cos\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\big(\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta-\nu)+2\sin^2\theta$$

$$-2\cos^2\varphi\cos^2\theta\operatorname{cotg}^2\omega\big)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\delta w+\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2\cos^3\varphi}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin^3\omega}\Big)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos\varphi\cos\theta\cdot\frac{1-\nu+2\operatorname{cotg}^2\omega}{\sin\omega}\Big)$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos^2\varphi\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)$$

$$+2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\varphi\cos\theta\frac{\nu+\operatorname{cotg}^2\omega}{\sin\omega}\Big)-2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos^2\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)$$

$$+2\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}\Big(\nu\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos^2\varphi\,\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)$$

$$+2\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta\sin\omega}\Big(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)$$

$$+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos\theta\cdot\cos\varphi\frac{1-\nu+2\operatorname{cotg}^2\omega}{\sin\omega}\Big)-2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos^2\theta\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)\Big)\delta u+\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\varphi\cos\theta\frac{1-\nu+2\operatorname{cotg}^2\omega}{\sin\omega}\Big)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)+2\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\omega}\Big(\nu\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos^2\theta\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)+2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos^3\theta}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sin^3\omega}\Big)+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos\varphi\cos\theta\cdot\frac{\nu+\operatorname{cotg}^2\omega}{\sin\omega}\Big)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\theta\cos\varphi\cdot\frac{1-\nu+2\operatorname{cotg}^2\omega}{\sin\omega}\Big)-2\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos^2\theta\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos^2\varphi\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)+2\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\Big(\sin\theta-\cos^2\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)-\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\cos^2\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin^2\omega}\Big)\Big)\delta v$$

$$+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)$$

$$+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos^2\varphi}{\cos\theta\sin\omega}\Big(\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)+2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos^2\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\Big(\sin\theta-\cos^2\theta\cdot\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta\sin\omega}\big(\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi-\nu)+2\sin^2\varphi$$

$$-2\cos^2\theta\cos^2\varphi\operatorname{cotg}^2\omega\big)\Big)+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\varphi\sin\theta}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\omega}\Big(\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)$$

$$+2\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\omega}\Big(\nu\sin\varphi-\cos^2\varphi\sin\theta\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\theta}{\cos\varphi\sin\omega}\big(\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta-\nu)+2\sin^2\theta$$

$$-2\cos^2\theta\cos^2\varphi\operatorname{cotg}^2\omega\big)\Big)+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\operatorname{cotg}\omega\Big(\frac{2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1+\nu)\Big)\Big)$$

$$+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{cotg}\omega\Big(\frac{2\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\sin^2\omega}-(1-\nu)\Big)\Big)+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\cos\varphi}{\sin\omega}\Big(\nu\sin\theta-\cos^2\theta\sin\varphi\frac{\operatorname{cotg}\omega}{\sin\omega}\Big)\Big)\Big)\delta w\Big]\,dx\,dy\Big\}$$

با استفاده ازمعادله های (c—a ٦) و (c—a ١٢) وانجام محاسبات بسیار برای اثبات برخی اتحاد های مثلثاتی درعبارت‌های δU ، $\bar{N}_x$ ، $\bar{N}_y$ و $\bar{N}_{xy}$ ، عبارت (٢٠) بشکل سادهٔ زیر منجر شد :

$$\delta U=\Big\{\Big[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\Big(\bar{N}_x\delta u+\bar{N}_{xy}\delta v+(\bar{N}_x\frac{\partial z}{\partial x}+\bar{N}_{xy}\frac{\partial z}{\partial y})\delta w\Big)dy\Big]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$+\Big[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\Big(\bar{N}_{yx}\delta u+\bar{N}_y\delta v+(\bar{N}_y\frac{\partial z}{\partial y}+N_{yx}\frac{\partial z}{\partial x})\delta w\Big)dx\Big]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \qquad (21)$$

$$-\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\Big[\Big(\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y}\Big)\delta u+\Big(\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x}\Big)\delta v$$

$$+\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\bar{N}_x\frac{\partial z}{\partial x}+\bar{N}_{xy}\frac{\partial z}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{N}_{yx}\frac{\partial z}{\partial x}+\bar{N}_y\frac{\partial z}{\partial y})\Big)\delta w\Big]dxdy\Big\}$$

چون بایستی δU برای تمام تغییرات ممکن δu ، δv و δw برابر صفر باشد ، لذا باید عبارتهای زیر علامت انتگرال (٢١) متحد با صفر باشد .

بدینطریق انتگرال مضاعف (٢١) معادله های زیر را نتیجه میدهد :

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x}=0 \qquad (22\ a-c)$$

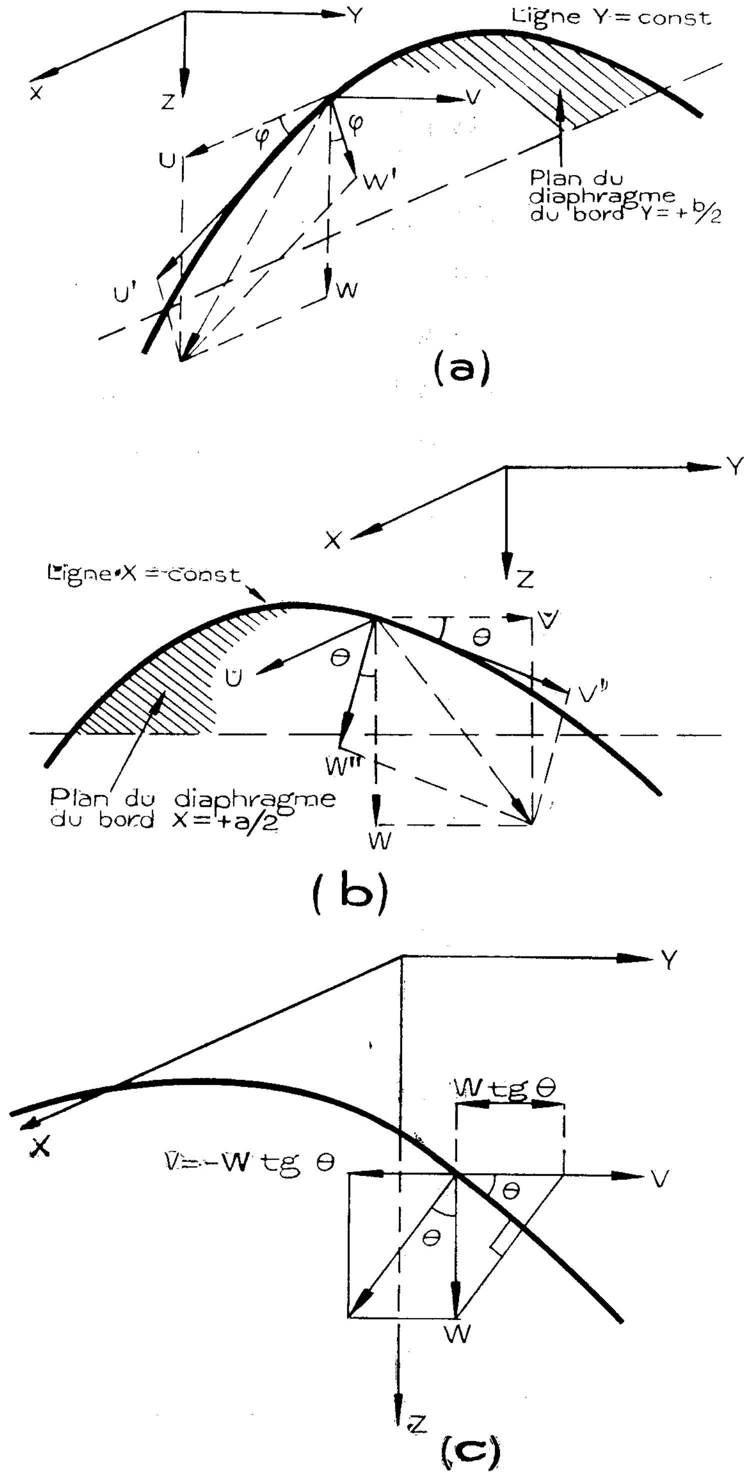
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(N_x\,.\,\frac{\partial z}{\partial x}+\bar{N}_{xy}\frac{\partial z}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\bar{N}_y\frac{\partial z}{\partial y}+\bar{N}_{yx}\frac{\partial z}{\partial x}\Big)=0$$

این معادله ها قسمت متجانس معادله های شناخته شدهٔ تعادل (c—a٣) میباشد که دوباره بدست آمد . چون انرژی تغییرشکل گنبد بدون درنظر گرفتن نیروهای خارجی مؤثر برسطح آن وبالنتیجه انرژی پتانسیل آنها می‌نیمم گردید ، لذا جمله های مربوط باین نیروها درمعادله های (c – a ٢٢) ظاهر نشده است .

شرایط حدی معادلهٔ (٢١) تمام از یک نوع است ، پس اگر شرایط حدی طبیعی را در طول یک ضلع از محیط آن مانند $x=+\frac{a}{2}$ شرح دهیم کفایت خواهد کرد و نتایج مشابهی برای سه ضلع دیگر بدست میآید .

اگر مجدداً نخستین انتگرال معادلهٔ (٢١) را مورد توجه قرار دهیم خواهیم داشت :

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\Big(\bar{N}_x(\delta u+\frac{\partial z}{\partial x}\delta w)+\bar{N}_{xy}(\delta v+\frac{\partial z}{\partial y}\delta w)\Big)dy \qquad (23)$$


Ligne Y = const
Plan du diaphragme du bord Y = +b/2
(a)
Ligne X = const
Plan du diaphragme du bord X = +a/2
(b)
W tg θ
V = -W tg θ
(c)

(شکل ۱۰)

برای آنکه مقدار آن صفر باشد ، لازمست که :

$$\text{یا}\quad \overline{N}_x=\cdot \quad \text{یا} \quad \delta u+\frac{\partial z}{\partial x}\delta w=\cdot \quad \text{باشد} \qquad (\text{۲۴ a , b})$$

و

$$\text{یا}\quad \overline{N}_{xy}=\cdot \quad \text{یا} \quad \delta v+\frac{\partial z}{\partial y}\delta w=\cdot \quad \text{باشد} \qquad (\text{۲۴ c , d})$$

معادله های (۲۴ a—d) شرایط حدی طبیعی درطول ضلع $x=+\frac{a}{۲}$ میباشد . شرایط استاتیکی راجع به $\overline{N}_x$ و $\overline{N}_{xy}$ آشکار است ؛ ولی شرایط سینماتیکی نیاز بتوضیحاتی دارد . بدین جهت تغییرمکان نقطهٔ منظوری را با مؤلفه های آن در دودستگاه جدید مختصات تعریف میکنیم . شکل (۱ . a) یکی از این دستگاههای مبنا را نشان میدهد . مؤلفهٔ u' مماس برخط $y=$ مقداری ثابت میباشد، مؤلفهٔ v تغییرنخواهد کرد، و w' عمود بر u' و v' میباشد . آشکارا نتیجه میگردد که :

$$u'=u\cos\varphi+w\sin\varphi \quad , \quad w'=w\cos\varphi-u\sin\varphi \qquad (\text{۲۵ a—c})$$

بروش مشابهی دستگاه مبنای دوم دارای مؤلفهٔ v' مماس برخط $x=$ مقداری ثابت(شکل ۱ . b) مؤلفهٔ u درامتداد محور x ، ومؤلفهٔ w'' عمود براینددو امتداد خواهد بود . همچنین خواهیم داشت :

$$v'=v\cos\theta+w\sin\theta \quad , \quad w''=w\cos\theta-v\sin\theta \qquad (\text{۲۶ a—c})$$

از معادله های (۲۵ a) و (۲۶ a) نتیجه میگردد که :

$$\delta u'=\delta u\cos\varphi+\delta w\sin\varphi \qquad (\text{۲۷ a})$$

$$\delta v'=\delta v\cos\theta+\delta w\sin\theta \qquad (\text{۲۷ b})$$

دیده میشود که $\delta u'$ و $\delta v'$ تغییرات تغییرمکانهائی است که درعبارت (۲۳) وجود دارد . بموجب معادله های (۲a—c) ، انتگرال (۲۳) را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$\int_{-\frac{b}{۲}}^{\frac{b}{۲}} (N_x\delta u'+N_{xy}\delta v')\frac{dy}{\cos\theta} \qquad (\text{۲۸})$$

بالنتیجه شرایط (۲۴ a—d) بشرح زیر خواهد بود :

$$\text{یا}\quad N_x=\cdot \quad \text{یا} \quad \delta u'=\cdot \qquad (\text{۲۹ a , b})$$

و

$$\text{یا}\quad N_{xy}=\cdot \quad \text{یا} \quad \delta v'=\cdot \qquad (\text{۲۹ c , d})$$

معادله های (۲۹ a—d) بشکل دیگری شرایط حدی طبیعی را درطول ضلع فوق الذکر بیان میکند . چهار ترکیب ممکن از این شرایط حدی طبیعی وجود دارد :

الف ـ لبهٔ آزاد

دراین مورد آشکارا داریم $N_x=\cdot$ و $N_{xy}=\cdot$ ، حقیقتی که انتگرال (۲۸) را صفر میگرداند .

ب ـ لبهٔ متکی بردیافراگم

دراین حالت $N_x = 0$ و $N_{xy} \neq 0$ شرط اخیر لازم میآورد که $\delta v' = 0$ باشد. تغییرات تغییرمکانها وقتی باعث برآورده شدن این شرط میگردد که مؤلفه های v و w طوری باشد که $v' = 0$ گردد، برای تحقق این امر لازمست که بموجب (۲۶a) میان v و w رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$v = -w \, tg \, \theta$$

این رابطه دارای این مفهوم هندسی است که جمع حاملی v و w بایستی عمود برخط لبهٔ گنبد باشد (شکل c . ۱)، یعنی عمود برامتداد N_{xy} گردد.

باضافه چون u نیز عمودبر N_{xy} است، برآیند تغییرمکان عمودبر N_{xy} خواهد بود.

ج ـ لبهٔ متکی برتکیه‌گاه آزاد*

موردیکه $N_{xy} = 0$ و $N_x \neq 0$ باشد ناظر باین حالت است. این‌حالت درعمل کمتر اتفاق‌میافتد. از روی معادلهٔ (۲۸)، شرط $\delta u' = 0$ نتیجه میگردد.

د ـ لبهٔ گیردار

دراینحالت‌دومؤلفه تغییرمکان $\delta u'$ و $\delta v'$ بایستی‌صفر گردد، لذابایستی $v = -w tg\theta$ و $u = -w tg\varphi$ باشد. پس برآیند تغییرمکان عمودبر N_x و N_{xy} یعنی عمودبرسطح میانگین گنبد خواهد بود.

نیروهای‌پوسته‌ای‌مانع چنین تغییرمکانی‌نتواندگردید لذا بوسیلهٔ لبهٔ گیردار کاملاً ازاین تغییرمکان جلوگیری خواهد شد، عاملی که محاسبهٔ تنش‌های ناشی ازگیرداری را امکان‌پذیر میسازد.

* ـ این حالت حکایت از نوع تکیه گاهی دارد که اساس آن خلاف حالت دیافراگم میباشد. این تکیه گاه تغییرمکان را درصفحهٔ خویش اجازه میدهد (پس $N_{xy} = 0$)، ولی‌بحدکافی جسیم‌فرض میشود که هرنوع تغییرمکانی را خارج ازصفحهٔ خویش مانع گردد، بالنتیجه $N_x \neq 0$ است.

فهرست مرجع‌ها

1. Kashani - Sabet , M.H. «Voiles Minces sans flexion , Recherche des conditions aux Limites, «Annales des Ponts et Chaussées , Paris , Janvier - Fevrier 1967 , P. 25 - 41 .

2. *Kashani - Sabet* , M.H. «*Membrane and Bending Theory of Multi - Span Elliptic Paraboloid Shells*» , *Dissertation for the Ph.D. degree , Stanford University , January 1962 , p 1– 32.*

3. *Flügge W.* «*Stresses in Shells*» , Berlin Springer , 1960 P. 165 - 174 .

4. *Flügge , W.* «*Statik und Dynamik der Schalen*» , 2nd ed. , Berlin Springer , 1957 , p. 111-116.

5. *Pucher , A.* «*Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen*» , Beton und Eisen , Vol. 33 (1934) , p. 298.

6. *Geyling* , F.T. «*A General Theory of Deformations of Membrane Shells* , «*Dissertation for the Ph.D. degree* , Stanford University , 1953 , p. 47 - 69.

7. *Flügge* , W. and Geyling , F. T. «*A General Theory of Deformations of Membrane Shells* , «*Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering* , Vol. 17 , 1957 , p. 23-44.

8. *Timoshenko* , S. , and *Goodier* , N. «*Theory of Elasticity*» , New York : Mc.Graw - Hill , 1951 , p. 148.

9. *Courant* , R. and *Hilbert* , *D.* «*Methods of Mathematical Physics*» , Vol. I , New York : Interscience Publishers , 1953 , p. 164 - 216 and 246 - 252 .

10. *Hadamard* , J.H. «*Leçons sur le Calcul de Variations*» , Paris. 1910 .

11. *Courant* , R. «*Calculus of Variations*» , New York University , Institute of Mathematical Sciences , 1945 - 1946 , Revised 1956 - 1957 , p. 10 - 51 .

12. *Bliss* , G.A. «*Lectures on the Calculus of Variations*» , University of Chicago Press , Chicago , 1946 .

13. *Fox,* C. «*An Introduction to the Calculus of Variations*», Oxford University Press, London, 1950.

14. *Weinstock* , R. «*Calculus of Variations*» , New York : Mc. Graw Hill , 1952.