

نارسائی تئوری کلاسیک خمش متقارن صفحه‌ها در مورد صفحه‌های گرد

که تحت تأثیر بار متمرکز در مرکز صفحه واقع باشد

نوشته

محمد حسین کاشانی ثابت

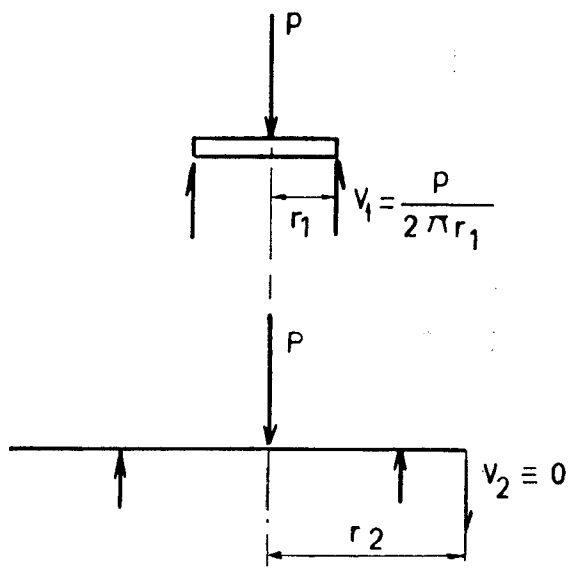
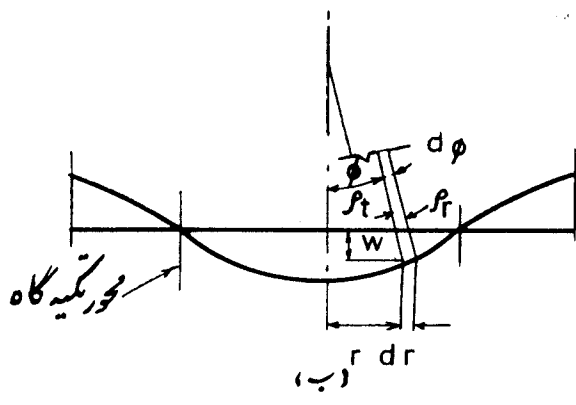
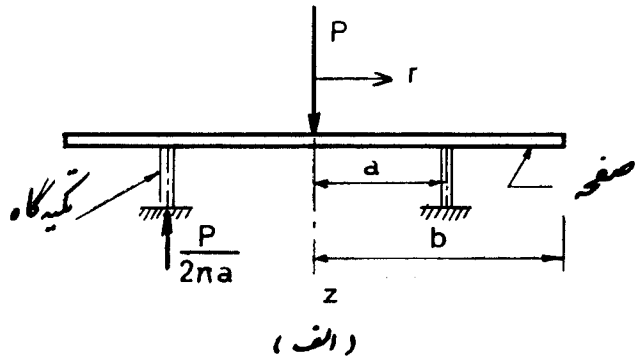
PH.D.

معلم دانشکده فنی و رئیس مؤسسه مهندسی راه و ساختمان دانشکده صنعتی

مقدمه

در شماره دوم دوره دوم نشریه دانشکده فنی و نیز در مراجع [۱ و ۲] این مقاله طرز محاسبه تغییر شکل و تنش‌های صفحه‌های گرد که تحت تأثیر بار گسترده با شدت یکنواختی باشد بررسی گردید. در این بررسی تئوری کلاسیک خمش متقارن صفحه‌ها ذکر شد و معادله دیفرانسیل آن که مبین تغییر شکل و بالنتیجه تنش‌های ناشی از خمش ساده باشد بطور تفصیل مورد بحث قرار گرفت. هدف از نوشتن این مقاله آنست که روشن گردد چطور رعایت این تئوری در مورد صفحه‌های گرد که تحت تأثیر بار متمرکز که وارد بر مرکز صفحه‌ها باشد جوابگوی حل مسئله در تعیین لنگرها و نتیجه تنش‌ها نخواهد بود، بعبارت دیگر این تئوری در حل این مسئله نارسا بوده و نمیتوان آنرا مانند موارد دو بعدی مبحث ارتجاعی حل و فصل کرد بلکه باید تأثیر تنش عمودی σ_z و تنش‌های برنده τ_{xz} و τ_{yz} و τ_{rz} را بر روی خمش در نظر گرفت.

تئوری خمش متقارن صفحه‌های گرد کاملاً شناخته شده است [۳]، لذا در این جا بحث را از معادله با مشتق جزئی که حاکم بر این مسئله است شروع میکنیم و سپس شرایط حد و پیوستگی مربوط را بکار خواهیم برد. در این مورد نیز مسئله را بطور عام در نظر گرفته و فرض میکنیم که صفحه بر تکیه گاه پیوسته گردی میان مرکز و لبه قرار داشته و هیچگونه پیوستگی میان صفحه و تکیه گاه وجود نداشته باشد. صفحه همگن و ایزوتروپ و با ضخامت ثابت اندک در نظر گرفته میشود. کمیت بار مؤثر بر مرکز صفحه و شعاعهای تا تکیه گاه و لبه را بترتیب با p ، a ، b مینمائیم. شعاع یک مقطع مخروطی که زاویه φ با محور z درست کند با r نموده شده که از نقطه‌ای واقع بر سطح میانگین اندازه گیری میشود (شکل ۱ ب). شعاع انحناء ρ در امتداد محیطی عبارت از ضلع سطح مخروطی تولید شده در حول محور z میباشد. شعاع انحناء ρr در امتداد شعاعی متفاوت با ρr میباشد و سطح میانگین را فقط در زاویه $d\varphi$ تشریح میکند.



(ج) - نیروهای برنده برای شعاعهای r_1 و r_2

شکل ۱۰ - صفحه و اجزاء آن

بموجب روابط هندسی تغییر شکل و بادار نظر گرفتن جملات از مرتبه اول ، نتیجه میگردد:

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{\varphi}{r}$$

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dr} , [ds=dr]$$

قسمتی از صفحه که محدود بمحیط داخلی تکیه گاه است در نتیجه تأثیر بار دارای عمل و رفتاری متفاوت با آن قسمتی از صفحه که خارج تکیه گاه واقع است میباشد و با زیر نویس ۱ و ۲ توابع مربوط بآنها را بترتیب نمایش میدهم. طبیعت مسئله طور است که وقتی که توابع φ_1 و φ_2 زوایای مماسهای سرسوم بر منحنی تغییر شکل بدست آمده باشد لنگرهای شعاعی و محیطی و هم چنین تغییر مکانهای w_1 و w_2 (تغییر شکلها) را میتوان مشخص کرد. برای اجتناب از اشکال در نگارش و چاپ ماجز در عبارات نهائی زیر نویس ها را بکار نخواهیم برد.

اصطلاحات و علائم

= a شعاع تکیه گاه گرد

= b شعاع لبه صفحه

$$D = \text{صلبیت خمشی صفحه (شقی)} = \frac{Eh^3(1-\nu^2)}{12}$$

= h ضخامت صفحه

= M_r لنگر خمشی شعاعی در واحد طول که در صفحه $r-z$ اثر میکند .

= M_t لنگر خمشی مماسی در واحد طول که در صفحه $t-z$ اثر میکند .

= p بار متمرکز قائم که بر مرکز صفحه تأثیر میکند .

= V نیروی برنده در واحد طول که موازی با محور z و در سطحی عمود بر امتداد شعاع اثر میکند .

= r شعاع - متغیر مطلق .

= w تغییر شکل صفحه .

= φ زاویه مماس بر منحنی تغییر شکل .

= ν ضریب پواسون .

طرز بدست آوردن معادلات

بموجب ملاحظات ناشی از تعادل و تئوری خمش متقارن صفحه های تحت تأثیر بار، معادله مشخصه

قسمتی از صفحه که میان محور z و تکیه گاه واقع باشد یعنی در یک فاصله r ، دارای شکل زیر میباشد :

$$(1) \quad \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = \frac{V}{D}$$

که در آن V نیروی برنده در واحد طول محیط میباشد. این معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب متغیر را باسانی میتوان بکمک تغییر متغیر Cauchy—Euler بوسیله یک متغیر مستقل t بطوریکه $e^t=r$

باشد انتگره کرد. بکمک این تغییر متغیر و با استعمال :

$$\left[\text{بشکل فوقانی (۱-ج) مراجعه شود} \right] -\frac{P}{2\pi} e^t = -\frac{P}{2\pi r} = V$$

معادله (۱) بصورت زیر نوشته میشود :

$$(۲) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \varphi = -\frac{P}{2\pi D} e^t$$

جواب کلی معادله (۲) بصورت زیر میباشد :

$$(۳) \quad \begin{cases} \varphi = Ae^t + e^{-t} - \frac{P}{4\pi D} te^t \\ \varphi = Ar + \frac{B}{r} - \frac{P}{4\pi D} r \text{Log} r \end{cases}$$

که در آن A و B ثابتهای انتگراسیون میباشد. از روی شرط حد $\varphi = 0$ بازای $r = 0$ در مورد مقدار معین φ نتیجه خواهد شد که :

$$B = 0$$

عبارات لنگرهای خمشی برحسب A چنین خواهد بود :

$$(۴) \quad M_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) = D \left\{ A(1+\nu) - \frac{P}{4\pi D} \left[1 + (1+\nu) \text{Log} r \right] \right\}$$

$$(۵) \quad M_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) = D \left\{ A(1+\nu) - \frac{P}{4\pi D} \left[\nu + (1+\nu) \text{Log} r \right] \right\}$$

در قسمتی از صفحه که واقع بین $r = 0$ و $a = r$ میباشد شرط حد دیگری برای محاسبه A وجود ندارد، ولی پیوستگی میان دو قسمت صفحه که در داخل و خارج تکیه گاه قرار دارد شرط متمم را میدهد. بدین منظور عبارت φ ، M_r ، M_t را در قسمتی که محصور بین $a = r$ و $b = r$ است جستجو میکنیم. چون در این قسمت $V_r = 0$ است معادله (۲) بصورت همگن زیر در خواهد آمد :

$$(۶) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \varphi = 0$$

جواب این معادله بشرح زیر میباشد :

$$(۷) \quad \varphi = Fe^t + Ge^{-t}$$

یا

$$(۸) \quad \varphi = Fr + \frac{G}{r}$$

باتوجه به عبارات عمومی معادلات (۴) و (۵) و باگزاردن مقدار φ از رابطه (۸) چنین بدست بیاید :

$$(9) \quad M_r = D \left[(1+\nu)F - (1-\nu)\frac{G}{r^2} \right]$$

$$(10) \quad M_t = D \left[(1+\nu)F + (1-\nu)\frac{G}{r^2} \right]$$

محاسبه ضریب‌های ثابت

برای محاسبه سه ضریب ثابت A ، F ، G شرایط پیوستگی وحد زیرین بکار برده خواهد شد یعنی:

$$\left(\varphi_1 \right)_{r_1=a} = \left(\varphi_2 \right)_{r_2=a} , \left(M_{r_1} \right)_{r_1=a} = \left(M_{r_2} \right)_{r_2=a} , \left(M_{r_2} \right)_{r_2=b} = 0$$

از این عبارات با گزاردن $\frac{b}{a} = \beta$ نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$(11) \quad \begin{cases} A = \frac{P}{\lambda \pi D} \left(1 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\beta^2} + \nu \text{Log} \frac{b}{a} \right) \\ F = \frac{P}{\lambda \pi D} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\beta^2} \\ G = \frac{P}{\lambda \pi D} \cdot \frac{b^2}{\beta^2} \end{cases}$$

عبارات نهائی لنگرهای خمشی شعاعی و محیطی در دو قسمت صفحه بصورت زیر می‌باشد:

$$(12) \quad M_{r_1} = \frac{P}{\lambda \pi} \left[\nu(1+\nu) \text{Log} \frac{b}{\beta r} + (1-\nu) \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \right]$$

$$(13) \quad M_{t_1} = \frac{P}{\lambda \pi} \left[\nu(1+\nu) \text{Log} \frac{b}{\beta r} + (1-\nu) \left(\frac{1}{\beta^2} + 1 \right) \right]$$

$$(14) \quad M_{r_2} = \frac{P}{\lambda \pi} \cdot \frac{1-\nu}{\beta^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$(15) \quad M_{t_2} = \frac{P}{\lambda \pi} \cdot \frac{1-\nu}{\beta^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

و نیروی برنده در دو قسمت صفحه را چنین می‌توان نوشت:

$$(16) \quad V_1 = -\frac{P}{\nu \pi b} \left(\frac{b}{r} \right) ; V_2 \equiv 0$$

تغییر شکلهای دو قسمت صفحه

اگر تغییر شکلهای دو قسمت صفحه را با w_1 و w_2 بنمائیم، سهولت میتوان آنها را با انتگراسیون

عبارات φ_1 و φ_2 بشرح زیر بدست آورد. اگر w را در جهت مثبت z مثبت بگیریم برای قسمت اول صفحه خواهیم داشت:

$$(17) \quad W_1 = - \int \varphi_1 dr + K_1$$

با رعایت شرط حد $W_1 = 0$ بازای $a = r$ مقدار K_1 بدست میآید و با قراردادن $\beta = \frac{b}{a}$ عبارت نهائی W_1 بشرح زیر خواهد بود :

$$(18) \quad W_1 = \frac{pb^r}{16\pi D} \cdot \frac{1}{\beta^r} \left[\left(2 + \frac{1-v}{1+v} \cdot \frac{1}{\beta^r} \right) \left(1 - \frac{\beta^r r^r}{b^r} \right) + 2 \left(\frac{\beta r}{b} \right)^r \text{Log} \left(\frac{\beta r}{b} \right) \right]$$

با اجرای انتگرالسیون نظیر برای قسمت دوم صفحه و رعایت شرط حد $W_2 = 0$ بازای $a = r$ ، W_2 بعبارت زیر نوشته میشود :

$$(19) \quad W_2 = \frac{pb^r}{16\pi D} \cdot \frac{1}{\beta^r} \left[\frac{1-v}{1+v} \cdot \frac{1}{\beta^r} \left(1 - \frac{\beta^r r^r}{b^r} \right) - 2 \text{Log} \left(\frac{\beta r}{b} \right) \right]$$

حالت خاص

اگر $\beta = \frac{b}{a} = 1$ باشد یعنی لبه صفحه برتکیه گاه قرار داشته باشد معادلات (۱۲)، (۱۳) و (۱۸) بصورت زیر درمیآید :

$$(20) \quad M_r = \frac{P}{8\pi} (1+v) \text{Log} \left(\frac{a}{r} \right)$$

$$(21) \quad M_t = \frac{P}{8\pi} \left[(1+v) \text{Log} \left(\frac{a}{r} \right) + (1-v) \right]$$

$$(22) \quad W = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{r+v}{1+v} (a^r - r^r) + 2r^r \text{Log} \left(\frac{r}{a} \right) \right]$$

و W_{\max} در مرکز صفحه و بعبارت زیر میباشد:

$$(23) \quad W_{\max} = \frac{(r+v)pa^r}{16\pi(1+v)D}$$

معادلات (۲۰ تا ۲۳) که بطریقه فوق بدست آمده است با نتایج حاصله توسط استاد تیموچنکو در این حالت خاص که بطریقه دیگری آنرا بدست آورده اند مطابقت دارد و در صفحه ۶۸ مأخذ سوم این مقاله بترتیب با معادله های شماره (۹۰)، (۹۱)، (۸۹) و (۸۸) و نیز بصورت معادله های شماره (a-c) (۱۰۱) صفحه ۶۶ فصل سی و نهم مرجع چهارم بدون ذکر اثبات داده شده است.

بحث

بطوریکه از معادلات (۱۲)، (۱۳) و (۱۶) دیده میشود وقتی که r بصفر نزدیک میگردد V_1 ، M_{r1} و M_{t1} به بی نهایت میل میکنند؛ لذا این عبارات دیگر مناسب برای پیدا کردن نیروی برنده و لنگرهای خمشی شعاعی و محیطی نمیشود، با اضافه نمودن کلاسیک خمشی صفحات گرد بمبنای مفروضاتی بوده است

که در مجاورت نقطه تأثیر بار متمرکز دیگر معتبر نیست. در نزدیکیهای مرکز دایره نسبت P بر سطح کوچکی از صفحه آنقدر زیاد میشود که دیگر نمیتوان تأثیر آنرا در لنگر خمشی آنچنانکه در تئوری کلاسیک متداول است نادیده گرفت. هم چنین اثر نیروی برشی در تغییر شکل و خمش در این تئوری مورد توجه قرار نگرفته است در صورتیکه تنش آن در نزدیکیهای مرکز صفحه فوق العاده افزایش می یابد و باید اثر آنرا در نظر گرفت و نیز اثر فشارهای عمودی در خمش سطوحی موازی با رویه صفحه در این تئوری نادیده گرفته شده است. در حقیقت معادلات عمومی (ع) و (ه) در مواردیکه خمش صفحه بصورت سطح کروی باشد صادق میباشد. مثالی که در این مورد نمیتوان ذکر کرد همانست که در مقاله سابق اینجانب منتشر شده در شماره دوم دوره دوم نشریه دانشکده فنی در صفحه ۷۴ ذکر شده است یعنی مثال صفحه گرد با سوراخی در وسط که در طول محیط بر تکیه گاه ساده تکیه داشته و در هر دو لبه تحت تأثیر لنگر باشد. در بقیه موارد فرمولهای بدست آمده تقریبی میباشد و درجه دقت جوابهای بدست آمده بستگی به نسبت ضخامت صفحه و شعاع بیرونی آن دارد. فرمولهای دقیق تر را میتوان با کمک معادلات مبحث سه بعدی ارتجاعی جستجو کرد که اغلب بجواب عملی منجر نمیکرد و با اینکه تأثیر نیروی برشی و فشار جانبی را بر روی تغییر شکل W بطرق تقریبی در نظر گرفت. راه حل هائی از این قبیل در صفحه ۷۳ مرجع سوم این مقاله و نیز بوسیله Saint-Venant و غیره ارائه شده است که بحث در آن از حوصله این مقاله خارج میباشد.

فهرست مراجع

- ۱- Sergev, S., and KASHANI - SABET, M. H. "Strength and Deflection of Circular Uniformly Loaded Slab Supported Between Center and Periphery," U. S. A: Journal of the American Concrete Institute, Proceedings V. 60 , No. 2 , Feb. 1963.
- ۲- Prof. Şergev, S. et DR. KASHANI - SABET , M.H. "Contraintes et Déflexions dans les dalles circulaires , Chargées Uniformément et Appuyées Entre le Centre et la Périphérie, Paris : Revue de Béton Armé No. 66 Avril - Mai 1966 Société des éditions André Guerrin.
- ۳- Timoshenko , S. , and Woinowsky - Krieger, S. « Theory of Plates and Shells, » New york : Mc Graw - Hill. 1959.
- ۴- Flügge, w. «Handbook of Engineering Mechanics,» New york: Mc Graw-Hill , 1962.