محاسبهٔ حجم بعضی از هیپرسطحهای درجهٔ دوم

نوشتهٔ : دکترعلیرضا امیرمعز
استاد دانشکدهٔ فنی دانشگاه تکزاس

فرض میکنیم x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ متغیرهای حقیقی و a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ n عدد حقیقی باشد. برای بدست آوردن هیپرحجمی که توسط هیپرسطح $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1$ محدود شده است از بعضی معادلات پارامتری استفاده مینمائیم.

۱ ـ روش استقراء ـ فرض میکنیم بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ دردست باشد. معادلات پارامتری این منحنی خواهد بود:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

اگر بیضوی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ دردست باشد معادلات پارامتری آن خواهد شد:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t\cos\theta \\ z=c\sin t\sin\theta \end{cases}$$

این روابط ما را هدایت میکنند که بتوانیم برای سطح $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2=1$ معادلات پارامتری زیر را بنویسیم:

$$\begin{cases} x_1=a_1\cos t_1 \\ x_2=a_2\sin t_1\cos t_2 \\ x_3=a_3\sin t_1\sin t_2\cos t_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}=a_{n-1}\sin t_1\sin t_2\cdots\cdots\sin t_{n-2}\cos t_{n-1} \\ x_n=a_n\sin t_1\sin t_2\cdots\cdots\cdots\cdots\sin t_{n-1} \end{cases}$$

۲ ـ حجم یک بیضوی ـ فرض میکنیم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ معادلهٔ یک بیضوی باشد. حجم این جسم از رابطهٔ

$$V=\left|\iint_R x\,dy\,dz\right|$$

بدست میآید که در آن R میدانی است که این انتگرال در روی آن حساب شده . چنانکه دیدیم معادلات پارامتری آن بصورت زیر است :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t\cos\theta \\ z = c\sin t\cos\theta \end{cases}$$

ژاکوبین زیر را حساب میکنیم :

$$\frac{\partial(y\,,\,z)}{\partial(t\,,\,\theta)} = \begin{vmatrix} b\cos t\cos\theta & c\cos t\sin\theta \\ -b\sin t\sin\theta & c\sin t\cos\theta \end{vmatrix} = bc\sin t\cos t$$

لذا داریم :

$$V = ۸\,abc\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t\cos^{۲} t\,dt\right| = \frac{۴}{۳}\pi abc$$

مورد استعمال آن برای حالت کلی : انتگرال

$$V = \left|\iiint_{R}\cdots\int x_{۱}dx_{۲}dx_{۳}\cdots dx_{n}\right|$$

را برای متغیرهای حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ و ... و x_n که در معادلهٔ $\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{۲} = ۱$ صدق مینماید درنظرمیگیریم .

ملاحظه میکنیم که داریم :

$$\frac{\partial(x_{۲}\,,\,\ldots\,,\,x_{n})}{\partial(t_{۱}\,,\,\ldots\,,\,t_{n-۱})} = \left(\prod_{i=۲}^{n} a_{۱}\right)\cos t_{۱}\sin^{n-۲} t_{۱}\cdots\sin t_{n-۱}(\det A)$$

منظور از : $(\det A)$ دترمینان ماتریس A میباشد . میتوان ثابت نمود که ماتریس A قائم و در نتیجه $|\det A| = ۱$ است. ولذا داریم :

$$V = ۲^{n}\left(\prod_{i=۱}^{n} a_{i}\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} dt_{n-۱}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۲} t_{۱}\sin^{n-۲} t_{۱}dt_{۱}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{n-۳} t_{۲}dt_{۲}\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}\cdots\cdots\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t_{n-۲}dt_{n-۲}$$

که اگر از توابع Γ استفاده کنیم مقدار این انتگرال خواهد شد :

$$V = \frac{(\sqrt{\pi})^{n}}{\Gamma(\frac{n}{۲}+۱)}\left(\prod_{i=۱}^{n} a_{i}\right)$$

که دراین عبارت n ، معرف ابعاد فضاست.