تطبیق دادن «مدها[۱]» در مسائل ناهمواری‌های[۲] میکروموج توسط روش عددی کمترین مربع‌ها[۳]

نوشتهٔ :

همایون عریضی

دکتر مهندس از دانشگاه سیراکوس ـ مؤسسهٔ عالی آموزش ارتباطات بیسیم پهلوی

چکیده :

میدان الکترومغناطیس درون قسمت‌های مختلف یک شبکه میکروموج را توسط بسط مدی[۴] مناسب تقریب میکنیم . تمام شرایط حدی را روی حدود و فصل مشترك مناطق مینویسیم و انتگرال مجذور اندازه هر کدام را برروی سطوح فصل‌مشترك مناطق مختلف میگیریم . مجموع انتگرال‌ها را تابع خطائی[۵] مینامیم که تابع مثبت و درجه دوم ضرائب مدی است . تابع خطائی فقط یک مینیمم دارد و برای بدست‌آوردن آن کافی است یک معادلـه خطی برحسب ضرائب مدی[۶] مجهول حل کنیم . این دسته معادلـه‌های خطی چند مجهولی را میتوان مستقیماً از شرائط حدی بدست‌آورد. تنها مهنیمم این تابع خطائی بهترین راه تطبیق مدها را از نظر روش کمترین مربع‌ها میدهـد . این روش برای حل مسائل ناهمواریهای گونـاگونی قابل استفاده میباشد . دراینجا فقط از اتصال[۷] دو موج بر با صفحات موازی و دو موج بر بامقطع مستطیلی بحث میکنیم . منبع تغذیه ممکن است مدی پخش شونـده بوده و یـا جریان برق سطحی (میله‌ای) برروی سطح مقطع موج‌بر بـاشد . عامل وزنی[۸] دلخواهی در خطای مربـوط به شرط حدی روی میدان مغناطیسی ضرب میشود و دراینجـا مورد بررسی قـرار میگیرد و اصل بقای انرژی را بعنوان معیاری برای انتخـاب این عامل بکار میبریم .

---

1. mode
2. discontinuity انفصال
3. method of least squares
4. modal expansion گسترش مدی
5. error function تابع بیراهی
6. modal coefficient, modal amplitude
7. junction پیوندگاه
8. weighting factor

مقدمه :

حل مسائل ناهمواریهای موج برها توسط روش های گوناگون ریاضی منجر به تجزیه و تحلیل پیچیده‌ای میشود . حل مسائل ساده ناهمواریها به روش ریاضی دربسیاری موادتقریبی است . روش تغییری[1] که شوینگر[2] درجنگ دوم جهانی ابداع کرد برای بعضی از مسائل ناهمواریهای میکروموج بکار برده شده است .

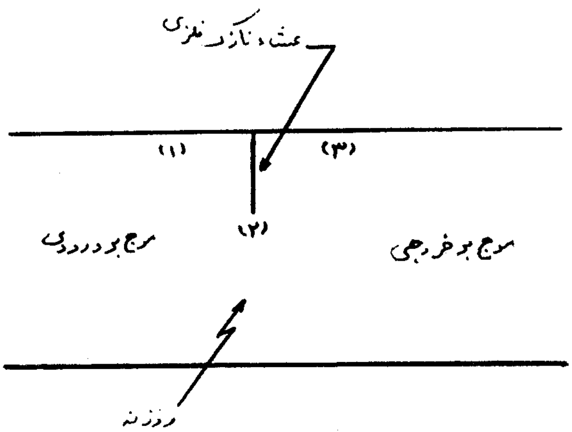
با ظهور وتوسعه ماشین های محاسبه مهندسین میکروموج درپی کشف روش های عددی[3] برآمدند . درمراجع [۱ و ۲ و ۳ و ٤] روش های عددی برای اتصال دوموج براستوانه‌ای تدوین شده‌است، ودرحقیقت مشابه یکدیگر میباشند . اتصال دوموج براستوانه‌ای با محورهای موازی را درنظر میگیریم . میدان الکترومغناطیس درون هردو را توسط سری مدی بسط میدهیم . عبارت های شرائط حدی را روی سطح پیوندگاه سینویسیم وهرکدام را درتابع مدی[4] مناسب ضرب خارجی میکنیم و انتگرال عبارتهای حاصل را روی سطوحی که هرکدام صادق هستند میگیریم و از شرائط تعامد[5] توابع مدی استفاده میکنیم . بدین- ترتیب یک مجموعه معادله‌های خطی نسبت به‌ضرایب مدی مجهول حاصل میشود . سپس از روش های معمولی حل معادلات خطی چند مجهولی میتوانیم استفاده کنیم .

دراین روش پدیده تقارب نسبی[6] ظاهر میشود که میترا در [٤] درباره آن بحث میکند . یعنی نسبت بین تعداد مدهائی که درموج برهای مختلف اختیار میکنیم فقط میتواند مقادیر معینی باشد. به‌عبارت دیگر بررسی ریاضی نشان میدهد که این روش برای بعضی نسبت ها منجر به ماتریس منفرد[7] میشود . موج‌بری با صفحات موازی[8] اتخاذ میکنیم و غشاء نازك فلزی[9] مستطیلی شکلی را درمقطع آن درتماس با یکی از صفحات مطابق شکل ۱ قرار میدهیم . به‌این ترتیب سه موج بر به‌طور متوالی بهم متصل شده است . موج بر میانی که از غشاء نازك فلزی تشکیل شده دارای طول قابل اغماض میباشد . میدان‌درون هرسه موج بر را توسط سری مدی بسط میدهیم . درمرجع [۷] نشان داده شده است که در روش عددی مذکور تعداد مدهای موج بر میانی (میدان روزنه[10]) باید از تعداد مدهای دوموج بر دیگر کمتر باشد . دراین‌روش میدانی برای روزنه (موج‌بر میانی باطول ناچیز) فرض‌میکنند. این‌روش دارای محدودیت‌هائی است . حالتی که مقطع موج بر خروجی کوچکتر بوده و درون آن جای دارد وحالت عکس آن که مقطع موج‌بر خروجی را احاطه میکند . باید جداگانه حل شود . دوموج بر ورودی و خروجی دارای محورهای

---

1. variational method
2. J. Schwinger
3. numerical algorithm
4. mode function
5. orthogonal condition
6. relative condition
7. sigular
8. parallel plate waveguide
9. conducting diaphragm, iris دیواره
10. aperture

موازی هستند و سطح ناهمواری باید منطبق برمقطع[4] موج بر باشد به عبارت دیگر ناهمواری باید درصفحه‌ای باشد که عمود برمحور موج برها است . مثلاً موج بر خم‌دار[1] را نمیتوان بدینسان مورد بررسی قرار داد .



شکل ۱ — موج بر باصفحات موازی دارای غشاء (دیواره) نازك فلزی درمقطع

ازطرف دیگر تعامد توابع مدی‌را باید مسجل کنیم . اگر توابع مدی متعامد نیستند باید آنها را توسط روشی مانند روش گرام‌اشمیت[2] متعامد کرد .

دراین‌مقاله روش عددی عمومی برای ارضای شرائط حدی ناهمواری موج‌برها با استفاده از روش‌کمترین مربع ها ارائه میدهیم ، که فاقد اشکالات فوق است . هرمقدار نسبی را میتوان برای تعداد مدها درقسمت‌های مختلف موج‌برها انتخاب کـرد . سه حالت کوچک شدن و بزرگ شدن مقطع موج‌بر خروجی در پیوندگاه و حالتی که حدود یکی از دو موج بردر دیگر احـاطه نشده است درهم ادغام شده‌اند . تعامد توابع مدی لازم نیست . سطح نـاهمواری میتواند در صفحه‌هائی غیر از مقطع موج‌بر واقع بـاشد . روش کمترین مربع‌ها کاملاً پایدار[3] میباشد و اندازه اجزاء قطری ماتریسی که باید معکوس شود رویهمرفته از اجزاء دیگر ماتریس بزرگتر است . شاید روش کمترین مربع ها برای حل مسائل ناهمواریهای موج‌برهای دایره‌ای بهتر مناسب باشد چون دراین موج‌برها مدهای دژنره ظاهر میشود . روش کمترین مربع‌ها که در اینجا شرح میدهیم برای نـوشتن برنـامه‌های عمومی کامپیوتر بسیار مناسب است و استفاده‌کننده خواهان چنین برنامه‌های عمومی میباشد ، اگر چه بازده محاسبات بخاطر عمومیت برنامه چندان زیاد نیست .

---

1. waveguide bend　　2. Gram-Schmidt　　3. stable

4. degeneracy

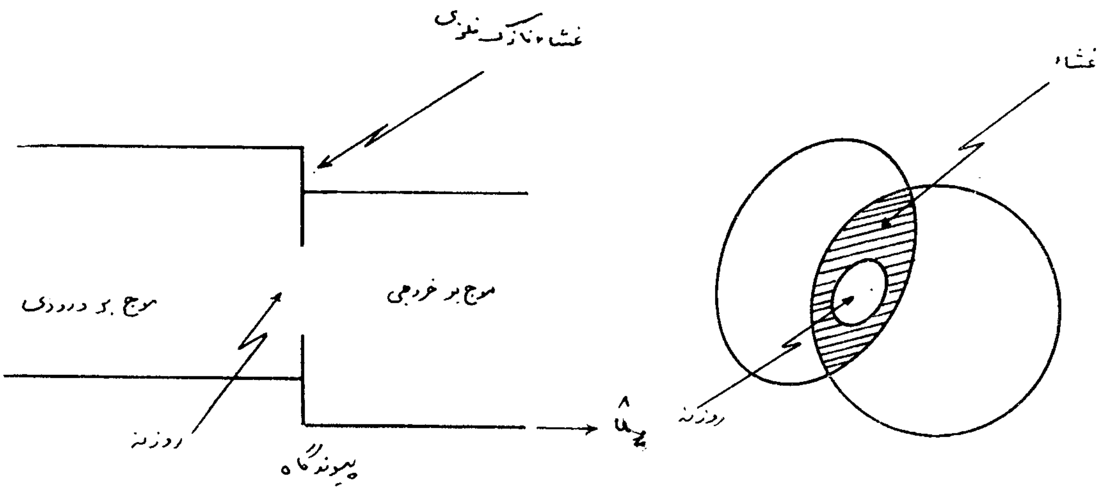
اتصال دوموج براستوانه‌ای را مطابق شکل ۲ درنظر میگیریم . فرض میکنیم موج‌برها از هوا پر شده و محور دوموج‌بر موازی یکدیگر است . فرض میشود موج‌بر خروجی طرف راست پیوندگاه قرار دارد و با بارخود منطبق شده است . (درموج‌بر خروجی موج منعکس شده موجود نیست) میدان الکترومغناطیس درون موج‌برها را توسط بسط سری مدی مینویسیم :

$$\mathbf{E}^1 = \sum_m \left(A_m^+ \exp(-\gamma_m Z) + A_m^- \exp(\gamma_m Z)\right) \mathbf{e}_m^1$$

$$\mathbf{H}^1 = \sum_m \left(A_m^+ \exp(-\gamma_m Z) - A_m^- \exp(\gamma_m Z)\right) \mathbf{h}_m^1 \qquad z \leqslant 0$$

$$\mathbf{E}^2 = \sum_p B_p \exp(-\Gamma_p Z)$$

$$\mathbf{H}^2 = \sum_p B_p \exp(-\Gamma_p Z) \qquad z \geqslant 0 \qquad (۱)$$



شکل ۲ — پیوندگاه دوموج‌بر استوانه‌ای

زیر نویس ۱ و ۲ به‌ترتیب موج بروروودی و خروجی را نشان میدهد . تابع‌های مدی برداری $\mathbf{e}_m^1$ و $\mathbf{h}_m^1$ و $\mathbf{e}_p^2$ و $\mathbf{h}_p^2$ تابع مختصات مقطع موج‌بر مربوطه است . موج‌بر را توسط مد تابش با دامنه مدی A_m^+ و یا یک صفحه جریان برق الکتریکی $\mathbf{J}$ و یا یک صفحه جریان مغناطیس $\mathbf{M}$ روی قسمتی از سطح پیوندگاه تغذیه[۱] (تحریک) میکنیم . دامنه مدهای بازتاب A_m^- و دامنه مدهای گذری B_p هستند . ثابت‌های

۱ — Excite

انتشار به ترتیب درموج‌بر ورودی وخروجی γ_m و Γ_p است ، شرائط حدی مؤلفه های میدان مماس برسطح اتصال برای $z=0$

$$\hat{u}_z \times (\mathbf{H}^2-\mathbf{H}^1)=\mathbf{J} \quad \text{و} \quad (\mathbf{E}^2-\mathbf{E}^1)\times \hat{u}_z=\mathbf{M} \tag{۲}$$

است . برداریکه $\hat{u}_z$ عمود برمقطع میباشد و به درون موج بر خروجی (دوم) ممتد است . شرائط حدی برای مؤلفه هـای عمود به سطح پیوند گـاه خود به‌خود پس از ارضای شرائط حدی مؤلفـه های مماس (۲) حاصل میشود .

برای ارضای شرائط حدی از روش کمترین مربع هـا استفاده میکنیم و یک تابع بیراهی میسازیم . برای ساختن این تابع انتگرال سطحی حاصلضرب هرعبارت شرائط حدی را بامزدوج خود روی سطوح پیوندگاه که هرکدام صادق است میگیریم و عبارت‌های حاصل را جمع میکنیم .

$$\varepsilon=\alpha\int_{ap} |\hat{u}_z\times(\mathbf{H}^2-\mathbf{H}^1)\,\mathbf{J}|^2\,ds+\int_{ap} |\hat{u}_z\times(\mathbf{E}^2-\mathbf{E}^1)+\mathbf{M}|^2\,ds$$

$$+\int_{c(1)} |\mathbf{E}^1|^2\,ds+\int_{c(2)} |E^2|^2\,ds \tag{۳}$$

c(1) سطح غشاء فلزی‌را درپیوندگاه به‌طرف‌موج‌بر ورودی و c(2) سطح غشاء فلزی را درپیوندگاه به‌طرف موج‌بر خروجی نشان میدهد . ap سطح روزنه ها را درپیوندگاه مشخص میکند. تابع ε حقیقی ومثبت‌است و تابع درجه‌دوم نسبت به ضرائب مدی‌میباشد. هرگاه شرائط حدی ارضاء شوند تابع خطائی ε صفرمیشود. بواسطه یگـانگی میدان الکترومغناطیس درون موج‌بر تنهـا مینیمم بیراهی ε مجموعه مدها و ضرائب مدی آنها راکه درمسئله مخصوصی تحریک میشوند بدست میدهد . ولی درعمل بواسطه اینکه تعداد معدودی مد انتخـاب میکنیم ، مینیمم خطا صفر نیست . و این مینیمم ضرائب مدی را برای بهترین تقریب شرائط حدی از نظر کمترین مربع ها میدهد. عامل وزنی α را درخطای‌جزئی‌مربوط به شرائط حدی میدان‌مغناطیس ضرب میکنیم تا آنکه اندازه‌اش هم‌پای اندازه خطای جزئی مربوط به شرائط حدی میدان الکتریکی گردد . هرروش عددی پیداکرد مینیمم[1] یک تابع چندمتغیری را میتوان بکار برد. مشتق های نسبی تابع خطائی نسبت به جزء حقیقی و موهومی ضرائب مدی بایـد درنقطه مینیمم صفر شود . به‌همچنین مشتقهـای نسبی نسبت به ضرائب مدها و مزدوج آنها درنقطه مینیمم باید صفر شود . بهرحال چون خطای ε حقیقی است رابطه $\frac{\partial\varepsilon}{\partial A_n}=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial A_m^{-*}}\right)^*$ بایـد صادق باشد . علامت ستاره مـزدوج متغیر مختلط را نشان میدهـد .

1. optimization technique, minimization method 2. transpose

بنابراین کافیست که مشتقهای نسبی ε را نسبت به ضرائب مدی مساوی صفر قرار دهیم ، چون مشتقهای نسبی ε نسبت به مزدوج ضرائب مدی خود به خود صفر خواهد شد . بنابراین برابر تعداد ضرائب مدی مجهول معادله های خطی نسبت به این ضرائب بدست میآوریم .

اکنون شرائط حدی را بصورت بردار

$$\omega' = [\sqrt{\alpha}\,\hat{u}_z \times (\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}^1) - \mathbf{J}\ ,\ \hat{u}_z \times (\mathbf{E}^2 - \mathbf{E}^1) + \mathbf{M}\ ,\ \mathbf{E}_t^1 \text{ و } \mathbf{E}_t^2] \qquad (٤)$$

مینویسیم . جزء اول و دوم بردار برروی سطوح وزنه ها صادق است . جزء سوم و چهارم بخاطر صفر شدن مؤلفه میدان الکتریکی مماس برغشاء فلزی میباشد که به ترتیب بطرف موج بر ورودی و خروجی است . معادله را میتوان بصورت :

$$\omega = \mathbf{LV} - \mathbf{f} \qquad (٥)$$

نوشت اجزاء بردار $\mathbf{V}' = (A_n^-\ ,\ B_p)$ ضرائب مدی بازتاب A_n^- وگذری B_p است . علامت « ' » برای برگردان ماتریس ۲ است . $\mathbf{f}$ بردار محرك[1] است و بخاطر ضریب مدی تابش A_m^+ و جریان الکتریکی $\mathbf{J}$ و جریان مغناطیسی $\mathbf{M}$ است . L ماتریسی است که به توابع مدی بستگی دارد . تابع خطائی ε را میتوانیم بصورت :

$$\varepsilon = \int_{\text{سطح حدود}} \omega \cdot \omega^* \, ds = \int (\mathbf{LV} - \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{LV} - \mathbf{f})^* \, ds \qquad (٦)$$

بنویسیم بنابراین :

$$\varepsilon = \mathbf{V}^* < L^*\ ,\ L > \mathbf{V} - \mathbf{V}^* < L^*\ ,\ \mathbf{f} > - < \mathbf{f}^*\ ,\ L > \mathbf{V} + < \mathbf{f}^*\ ,\ \mathbf{f} > \qquad (٧)$$

کارگردان[2] $<$ « , » $>$ برای ضرب دوماتریس تعریف میشود که انتگرال هرجزء ماتریس حاصلضرب را روی سطوحی که هرکدام صادق است میگیریم . علامت $*$ دراینجا عمل های مزدوج کردن و برگردان کردن ماتریس را نشان میدهد. بنابراین مشتق های نسبی ε درمعادله(٧) نسبت به مزدوج ضرائب مدی براحتی بدست میآید :

$$\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_m^{-*}}\ ,\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_p^{-*}}\right]' = < L^*\ ,\ L > \mathbf{V} - L^*\ ,\ \mathbf{f} >$$

بحث دیگری برای بدست آوردن معادله ماتریسی فوق در (١٣) آمده است . انواع مختلف ناهمواریها را مثل موج برهای خم دار ، چند موج بر متوالی[3] ، موج بر دوقسمت شده[4] ، پیوندگاه چند موج بر[5] ،

1. forcing vector
2. operator
3. cascade of waveguides
4. bifurcation
5. multiple waveguide junction

موج‌برهائی که نیمه تمام با عایق پر شده است[1] ، میله‌های[2] فلزی که احیاناً توسط جریان برق تغذیه میشود و غیره را میتوان توسط روش کمترین مربع‌ها حل کرد . درفوق این روش را برای اتصال دوموج‌بر استوانه‌ای بکار بردیم ولی نتایج عمومیت دارند . دستوالعمل اینست که تمام شرائط حدی را بصورت معادله ماتریسی :

$$\mathbf{LV}=\mathbf{f} \tag{۸}$$

بنویسیم . و حاصلضرب داخلی معادله (۸) را با $\mathbf{L}^*$ طبق عملیاتی که در فوق ذکر شده بدست آوریم - ماتریس $\mathbf{L}^*$ مزدوج و برگردان ماتریس $\mathbf{L}$ است .

$$<\mathbf{L}^*, \mathbf{L}> \mathbf{V} = <\mathbf{L}^*, \mathbf{f}> \tag{۹}$$

که معادله‌ای است خطی نسبت به ضرائب مدی مجهول $\mathbf{V}$. ماتریس $<\mathbf{L}^*, \mathbf{L}>$ هرمی‌تی[3] است (اگر مزدوج ماتریس هرمی‌تی را برگردان کنیم مساوی خودش خواهد بود .) روش های عددی مخصوصی[4] برای معکوس کردن ماتریس هرمی‌تی وجود دارد که سرعت آنها دو برابر سرعت معکوس کردن ماتریس معمولی باهمان بعد است . بعلاوه برای ذخیره کردن ماتریس هرمی‌تی درحافظه کامپیوتر احتیاج به نصف فضای لازم برای ذخیره ماتریس معمولی است .

عامل وزنی

با انتخاب درست عامل α ممکن است با تعداد معدودی مد مقدار خوبی (با خطای نسبی کم) برای مدار معادل یک ناهمواری بدست آورد .

دراینجا بعضی از خواص این عامل را بررسی میکنیم ، و معیاری برای انتخاب آن میدهیم .

الف - برای تعداد معینی مد تابع خطائی را بصورت $\varepsilon=\varepsilon^e+\alpha\varepsilon^h$ مینویسیم . تابع ε^e بواسطه خطای شرط حدی میدان الکتریکی است وتابع ε^h بواسطه خطای شرط حدی میدان مغناطیسی است. دوخطای

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1{}^e+\alpha\,\varepsilon_1{}^h \tag{۱۰}$$

و :

$$\varepsilon_2=\varepsilon_2{}^e+(\alpha+\triangle\alpha)\,\varepsilon_2{}^h \tag{۱۱}$$

را درنظر میگیریم - زیرنویس ، معرف آنستکه مینیمم ε را برای تعداد معینی از ضرائب مدی و عامل α محاسبه میکنیم .

---

1. patially filled waveguide 2. probe 3. hermitian
4. Cholesky 5. equivalent circuit

به همین ترتیب زیرنویس ۲ معرف آنستکه مینیمم ε را برای همان ضرائب مدی ولی برای عامل α محاسبه میکنیم . اگر تابع خطائی ε را برای هرمجموعه‌ای از ضرائب مدی به غیر از مجموعه‌ای که مینیمم آنرا میدهد حساب کنیم خطا البته بزرگتر میشود . بنابراین :

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2^e + \alpha\, \varepsilon_2^h \qquad (۱۲)$$

اگر نامساوی (۱۲) را از نامساوی (۱۱) کم کنیم :

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > \Delta\alpha\, \varepsilon_2^h \qquad (۱۳)$$

چون ε_2^h همیشه مثبت است ، نتیجه میگیریم که هرگاه مقدار α زیاد شود یعنی $\Delta\alpha$ افزایش یابد مقدار مینیمم ε نیز افزایش مییابد . بنابراین ε تابع صعودی α است. از اینرو مقدار بیراهی ε نمیتواند بعنوان معیاری برای انتخاب عامل α بکار برده شود .

ب ـ واضح است :

$$\varepsilon_1^e + \alpha\, \varepsilon_1^h < \varepsilon_2^e + \alpha\, \varepsilon_2^h \qquad (۱٤)$$

چون برای عامل α ، ضرائب مدی که مینیمم خطا را میدهد با زیرنویس ۱ مشخص میشود وهرگاه خطارا برای مقادیر دیگری از ضرائب مدی حساب کنیم خطا بزرگتر میشود . به همین منوال :

$$\varepsilon_2^e + (\alpha + \Delta\alpha)\, \varepsilon_2^h < \varepsilon_1^e + (\alpha + \Delta\alpha)\, \varepsilon_1^h < \varepsilon_2^e + \alpha\, \varepsilon_2^h + \Delta\alpha\, \varepsilon_1^h$$

برای نامساوی دست راست از نامساوی (۱٤) استفاده میشود . عبارت دست چپ و دست راست نامساوی فوق به :

$$\Delta\alpha\, \varepsilon_2^h < \Delta\alpha\, \varepsilon_1^h \qquad (۱۵)$$

ساده میشود . بنابراین هرگاه مقدار α افزایش یابد مقدار خطای مربوط به میدان مغناطیس کم میشود . نامساوی (۱٤) را نیز میتوان بصورت :

$$\varepsilon_2^e - \varepsilon_1^e > \alpha(\varepsilon_1^h - \varepsilon_2^h) \qquad (۱٦)$$

نوشت . بنابراین میتوانیم نتیجه بگیریم که افزایش عامل α بهتر شرائط حدی میدان مغناطیسی را ارضاء میکند ، چون ε^h کوچکتر میشود و ارضای شرائط حدی میدان الکتریکی ضایع میشود ، چون ε^e بزرگتر میشود برعکس میتوان نشان داد که کاهش عامل α ارضای شرائط حدی میدان مغناطیسی را بدتر میکند و ارضای شرائط حدی روی میدان الکتریکی را بهتر میکند .

پ ـ اگر عامل α را ثابت نگه داریم تعداد مدها را زیاد کنیم ، مقدار خطا کم میشود . این خاصیت واضح است چون اگر یک مد را حذف کنیم ضریب مدی مربوطه را باید مساوی صفر قرار دهیم واین

باعث میشود مقدار خطا افزایش یابد چون مقدار دامنه این مد درمینیمم ε صفر نیست این بدان میماند که ضرائب مدی را مقید[1] کنیم .

ت ـ معادله ماتریسی (۹) را بصورت :

$$(\mathbf{M}_1+\alpha\,\mathbf{M}_2)\mathbf{V}=(\mathbf{f}_1+\alpha\mathbf{f}_2) \qquad (۱۷)$$

مینویسیم : تا بستگی معادلـه به α ظاهر شود . چون ماتریس‌های $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ هرمی‌تی هستند معادلـه مقدار ویژه[2] :

$$\mathbf{M}_n\,\mathbf{v}_i=\lambda_i\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{v}_i \qquad (۱۸)$$

دارای مقدار ویژه‌های[3] حقیقی λ_i و توابع ویـژه[4] $\mathbf{v}_i$ نسبت به ماتریس هـای وزنی[5] $\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ متعامد هستند . (یعنی اگر $i\neq j$ بـاشد و $\mathbf{v}_j{}^*\mathbf{M}_1\mathbf{v}_i=o$ و $\mathbf{v}_j{}^*\mathbf{M}_2\mathbf{v}_i=o$) بنابـراین بردار ضرائب مدی $\mathbf{V}$ را میتوان بصورت مجموع بردارهای پایه $\mathbf{V}_j$ نوشت :

$$\mathbf{V}=\sum_i \beta_i\,\mathbf{v}_i \qquad (۱۹)$$

درمعادله (۱۷) بازاء $\mathbf{V}$ مقدار آنرا ازمعادله (۱۹) قرار میدهیم . وعبارت حاصل را در $\mathbf{v}_j{}^*$ ضرب میکنیم تا β_j بدست آید :

$$\beta_j=\frac{\mathbf{v}_i{}^*\,(\mathbf{f}_1+\alpha\,\mathbf{f}_2)}{1+\alpha\,\lambda_i}\;\frac{1}{\mathbf{v}_i{}^*\mathbf{M}_1\mathbf{v}_i}$$

چون

$$\mathbf{v}_i{}^*\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{v}_i=\lambda_i\,\mathbf{v}_i{}^*\,\mathbf{M}_2\,\mathbf{v}_i$$

بنابراین :

$$\mathbf{V}=\sum_i\frac{\mathbf{v}_i{}^*(\mathbf{f}_1+\alpha\,\mathbf{f}_2)}{1+\alpha\,\lambda_i}\,\mathbf{v}_i \qquad (۲۰)$$

فرض میکنیم توابع ویژه نرمالیزه[7] شده‌اند یعنی هربردار $\mathbf{v}_i$ را بر $(\mathbf{v}_i{}^*\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{v}_i)^{1/2}$ تقسیم میکنیم . هرگاه مقادیر ویژه λ_i وتوابع ویژه $\mathbf{v}_i$ را محاسبه کنیم میتوانیم ضرائب مدی را برای مقادیر مختلف α توسط رابطه (۲۰) محاسبه کنیم بدون‌آنکه معکوس کردن ماتریس $<\mathbf{L}^*,\mathbf{L}>$ برای مقادیر مختلف α لازم باشد .

---

1. constraint
2. eigenvalue equation معادله قدر مشخصه
3. eigenvalue قدرت مشخصه
4. eigenfunction تابع مشخصه
5. weight
6. basis function
7. normalized

برای تفسیر و توجیه نتایج حاصل از برنامه ماشین محاسبه که برای حل مسائل ناهمواریهای موج‌برها مینویسیم چندین نکته را باید بخاطر داشته باشیم .

هرگاه میدان الکتریکی و مغناطیسی را درسطح اتصال دوموج‌بر بدانیم ، میتوانیم میدان الکترو-مغناطیس درون موج‌بر را بدست آوریم . چون بسط مدی را میتوان بعنوان سری فوریه میدان تلقی کرد ، با دانستن میدان الکتریکی و مغناطیسی مماس برسطح اتصال ، دامنه‌های مدی (یا ضرائب فوریه) را میتوان مستقیماً بدست آورد . و نکته قابل توجه اینست که مقدار آنها به تعداد مدهائی که درون موج‌بر فرض میکنیم بستگی ندارد . اما درمسئله موردنظر میدان درون سطح اتصال نامعلوم است. میدان داخل موج‌برها را توسط بسط مدی تقریب میکنیم و این بسطهای مدی را در پیوندگاه (حدود منطقه) تعیین میکنیم . درنتیجه اندازه ضرائب مدی به تعداد مدهائی که فرض میکنیم بستگی دارد .

بدیهی است اندازه نسبی ضرائب مدی که دریک موج‌بر تحریک میشود به‌ناهمواری بستگی دارد و آنها را میتوان با فرض میدان الکتریکی مماس برپیوندگاه تخمین زد . بسط مدی میدان درون موج‌بر باید درپیوندگاه مساوی میدان الکترومغناطیس پیوندگاه باشد. برای مثال ناهمواری پله پائین[1] درموج‌بر با صفحات موازی را درنظر میگیریم و با مد TM[2] تغذیه میکنیم . (در مد TM میدان مغناطیسی مؤلفه‌ای درامتداد محور ندارد) میدان الکتریکی را میتوان توسط سری کوسینوسی بسط داد چون برای اینحالت تابع مدی کوسینوس است .

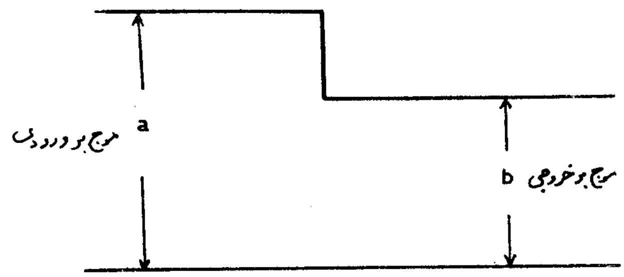
میدان الکتریکی E_t درسطح اتصال را ممکن‌است توسط تابع پله‌ای[3] تقریب کرد . E_t را روی غشاء فلزی صفر و بر روی روزنه ثابت فرض میکنیم . ولی بسط سری کوسینوس تابع پله‌ای هارمونیک زوج ندارد بنابراین پیش‌بینی‌میکنیم که‌اندازه ضرائب‌مدی زوج ازاندازه‌ضرایب‌مدی‌فرد کوچکتراست. (مدپخش شونده میدان TM با شاخص صفر o مشخص میشود) .

میدان‌الکترومغناطیسی که روش کمترین مربع‌ها بدست‌میدهد، شرائط لبه‌ای[4] را ارضاء میکنند. بنابراین نوع ناهمواری (پله ، غشاء فلزی نازک و غیره) و بودن یا نبودن بعضی از مؤلفه‌های میدان (خواه مؤلفه میدان درمقطع موج‌بر بوده ویامؤلفه‌ای درامتداد محور موج‌بر داشته باشد) مؤلفه‌ای ازمیدان الکتریکی و یا مغناطیسی ممکن است منفرد باشد . (به سوی بینهایت میل کند .) میدان الکتریکی مد TM درون موج‌بر باصفحات موازی درامتداد ارتفاع است . برای ناهمواری پله پائین درشکل ۳ مؤلفه

---

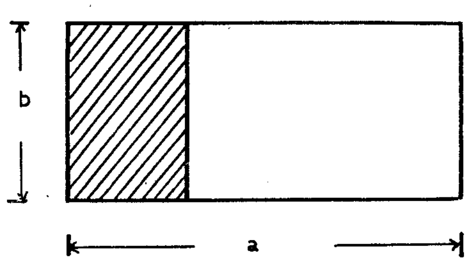
1. step-downdisconuity
2. transverse magnetic
3. step function
4. edge condition [۱۱]

مماس میدان الکتریکی (درمقطع) درلبه پله منفرداست و قدرمطلق میدان الکتریکی E_t روی روزنه نوسان میکند و دامنه نوسانات درنزدیکی لبه زیادتر میشود . برای ناهمواری سلفی[1] درموج بر مستطیلی (مثلاً



شکل ۳ — پله پائین درموج‌بر با صفحات موازی $(a > b)$

غشاء بسیار نازك فلزی مستطیلی شکل درامتداد ضلع کوچکتر موج بر مستطیلی مطابق شکل ٤) که توسط مد پخش شونده TE_{10} تغذیه میشود، برای ارضای شرائط حدی تنها مدهای TE_{mo} (برای $m \geqslant 1$ عدد صحیح) لازم بوده و البته تنها این‌مدها تحریک میشوند . میدان‌الکتریکی درامتداد لبه غشاء فلزی ممتد است و درلبه غشاء منفرد نمیشود . تغییرات اندازه میدان‌الکتریکی درپیوندگاه برروی روزنه تقریباً بشکل نیم موج سینوسی است و روی غشاء فلزی تقریباً صفر است .



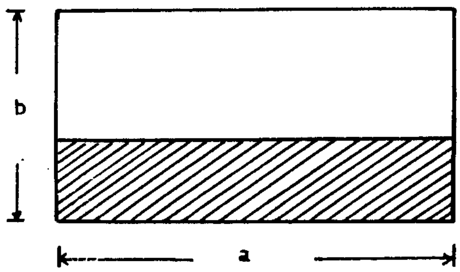
شکل ٤ — ناهمواری سلفی درموج‌بر مستطیلی $(a > b)$

هرگاه موج‌بر مستطیلی با ناهمواری خازنی[2] (غشاء بسیار نازك فلزی مستطیلی شکل در امتداد ضلع بزرگتر موج‌بر مستطیلی مطابق شکل ٥) را توسط مد پخش شونده TE_{10} تغذیه کنیم تنها مدهای TE_{1n} ($n \geqslant 0$ عدد صحیح) و TM_{1n} ($n \geqslant 1$ عدد صحیح) ظاهرمیشوند، که البته برای ارضای شرائط حدی‌لازم و کافی هستند چون مؤلفه میدان‌الکتریکی درامتداد محور موج‌بر وجود دارد ومیدان‌را منفردمیکند.

یک برنامه ماشین محاسبه برای ناهمواری پله پائین در موج بر با صفحات موازی که توسط مد TM تغذیه میشود برای بررسی امکانات روش کمترین مربع‌ها تدوین شده است . تعداد مدهای موج‌بر ورودی و خروجی را میتوان بدلخواه انتخاب کرد . برای مثال فرض میکنیم دریک موج‌بر پله پائین‌نسبت

1. inductive discontinuity
2. capacitive discontinuity

بین ارتفاع ها $\frac{۴ر۰}{۲ر۰}$ باشد وتعداد مدها درهرموج‌بر $N=P=۴۰$ اختیارمیکنیم طول موج $\lambda=1$ وعامل وزنی $\alpha=\frac{1}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}$ دامنه مد پخش شونده تابش $A_o^+\sqrt{\cdot 4}=1$ است .

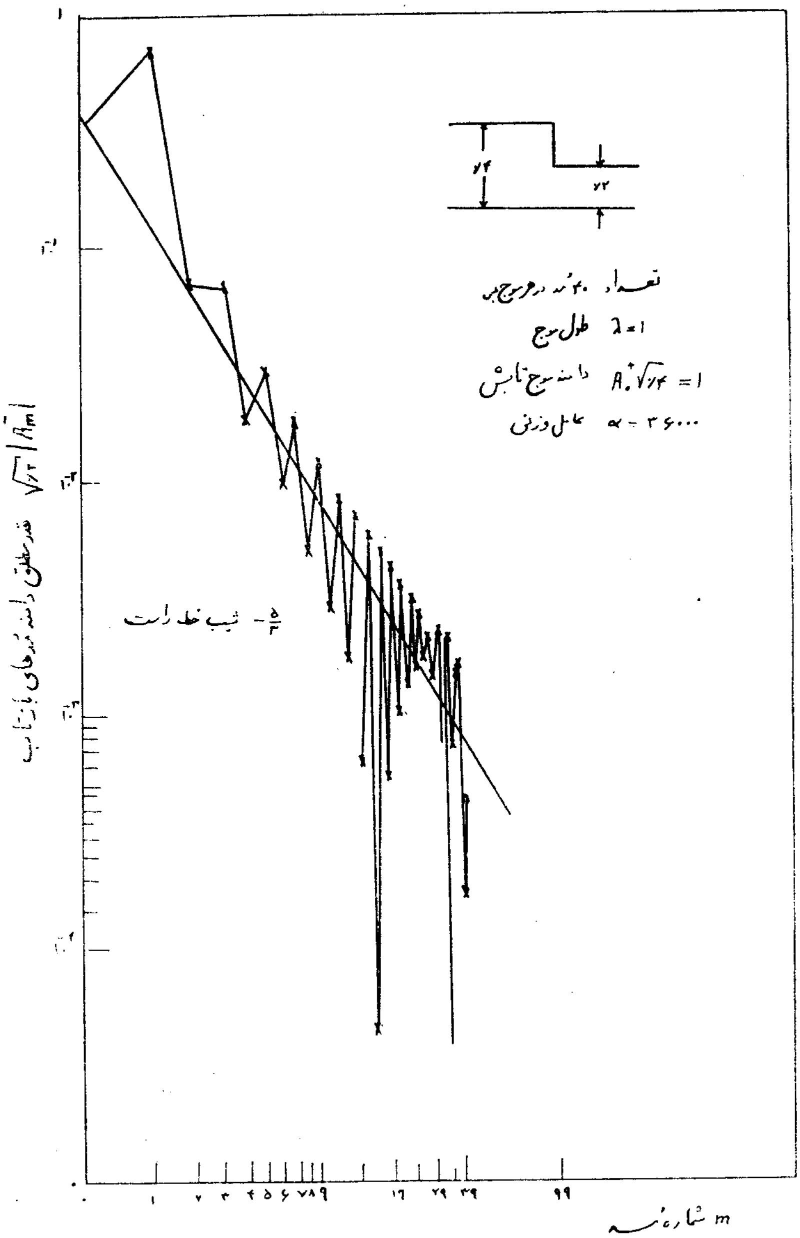


شکل ۵ — ناهمواری هازنی درموج‌بر مستطیلی $(a>b)$

بعد ازمعکوس کردن‌ماتریسی با ابعاد ۴۰×۴۰ ضرائب مدی برگشت‌را بدست میآوریم . ضریب مد برگشت پخش‌شونده $A_o^-\sqrt{\cdot 4}=-\cdot 397-j-1960$ است . ادمیتانس معادل $(A_o^+-A_o^-)/(A_o^++A_o^-)=2+j\cdot 977$ است، سسپتانسی[۱] که مرجع [۳] میدهد با یک درصدبیراهی $\cdot 968$ است . دو مقدار سسپتانس فوق کمتر از یک درصد باهم اختلاف دارند در شکل ۶ اندازه چهل مد برگشت را روی مقیاس لگاریتمی میکشیم . از شرط لبه‌ای نتیجه گرفته میشود که $A_n^-\sim n^{\frac{-5}{3}}$ (n شماره مد است) ودرشکل ۶ نیز واضح است که قدر مطلق دامنه مدها دراطراف خط مستقیمی باشیب $-\frac{5}{3}$ پخش شده‌اند . درشکل ۷ اندازه شدت میدان الکتریکی مماس برسطح اتصال را در امتداد خط $\frac{a}{2}=\frac{\cdot 6}{2}$ میکشیم $\mathbf{E}_t$ برروی غشاء فلزی صفر میشود . بواسطه پیوستگی مؤلفه های مماس $\mathbf{E}_t$ و $\mathbf{H}_t$ نسبت‌های $\left|\frac{\mathbf{E}_t{}^1}{\mathbf{E}_t{}^2}\right|$ و $\left|\frac{\mathbf{H}_t{}^1}{\mathbf{H}_t{}^2}\right|$ را روی روزنه محاسبه میکنیم ودرهمان شکل ۷ ترسیم میکنیم این نسبت‌ها تقریباً یک هستند .

برنامه‌ای دیگر برای اتصال دوموج‌بر مستطیلی تهیه شد . منبع تغذیه موج‌بر میتواند مد تابش TE و یا TM باشد که احیاناً میرا و یا پخش شونده هستند . به‌همچنین منبع تغذیه میتواند جریان برق الکتریکی باشد که درسطح اتصال ازمنطقه‌ای از روزنه‌ها میگذرد . محورها و اضلاع دوموج مستطیلی‌را موازی فرض‌میکنیم . موج‌بر خروجی درطرف راست با بار خود منطبق شده است . (درموج‌بر خروجی مدهای برگشت موجود نیست .) هرتعداد روزنه میتواند موجود باشد وفرض میکنیم اضلاع این روزنه‌ها با اضلاع موج‌برها موازی هستند . این فرض امکان آنرا میدهد که‌انتگرال های سطحی‌مربوطه را بتوانیم بطورنظری

1. susceptance (خودگیری)

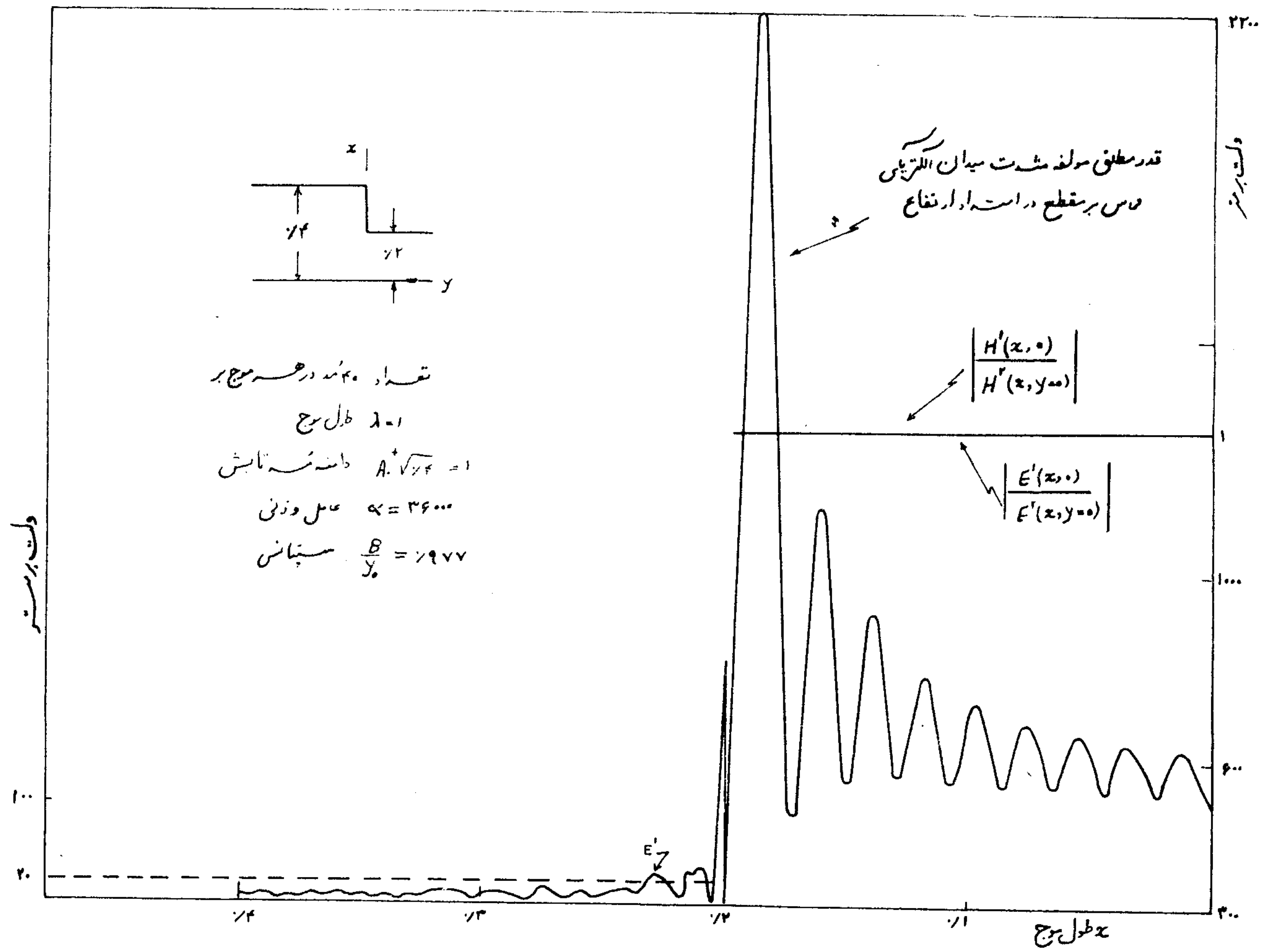


شکل ۶ — ناهمواری پله پائین درموجبر باصفحات موازی ـ قدرمطلق دامنه مدهای بازتاب

حل کنیم . ولی برای روزنه‌هائی که دارای مرز دلخواه هستند باید روش‌های عددی انتگرال گیری بکار برد . مدار معادل بسیاری از ناهمواریها را میتوان توسط این روش بدست آورد . مدارهای معادل بسیاری از ناهمواریها مثل پله پائین و پله بالای متقارن ونامتقارن، غشاء فلزی سلفی و یا خازنی متقارن ونامتقارن در [۳] داده شده است . بسیاری از حالات که درمطبوعات علمی موجود نیامده است مثل غشاء فلزی بشکل L ، پیوندگاه لغزیده(۱) دوموجبر مستطیلی، چندین غشاء یکنواخت فلزی و غیره توسط روش حاضر

1. off-set

حل شده و در [۱۳] جمع‌آوری شده است . هرگاه موج‌برهائی که در دوطرف پیوندگاه قرار دارند همانند باشند، تعداد ضرائب مدی مجهول نصف میشود. یک‌برنامه‌دیگر نیز برای اینحالت تهیه شده‌است [۱۳] .

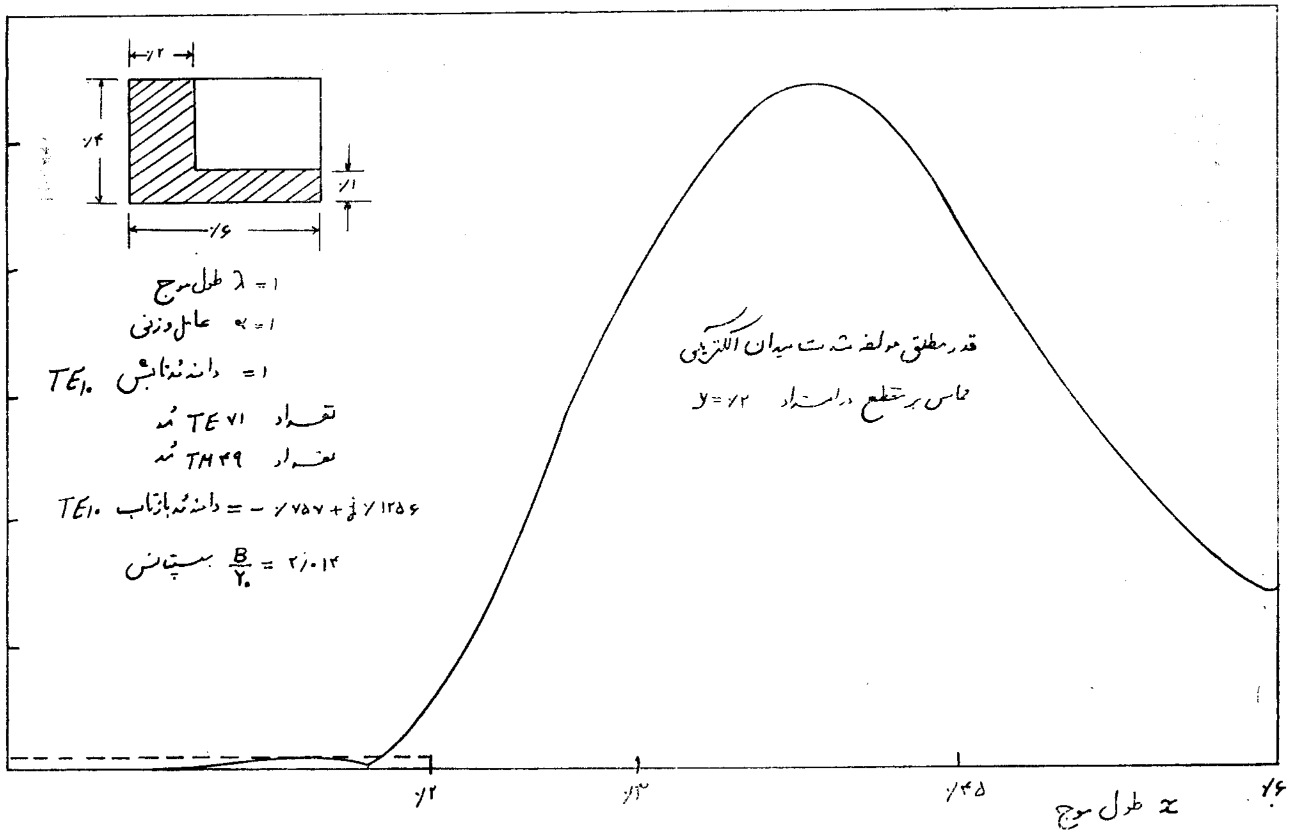


شکل ۷ — ناهمواری پله پائین درموج‌بر باصفحات موازی ـ قدرمطلق شدت میدان الکتریکی درامتداد ارتفاع

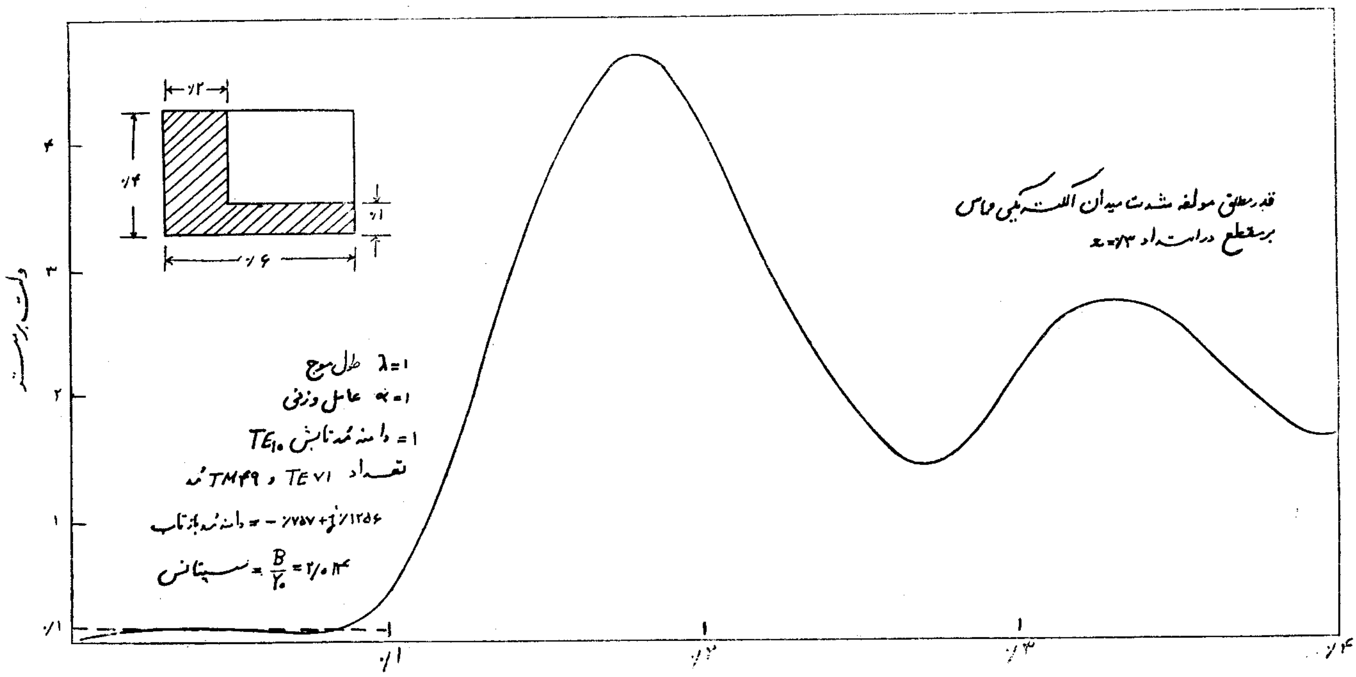
دراین برنامه‌های کامپیوتر از خاصیت هرمیتی ماتریس استفاده نشده است .

برای مثال درشکل‌های ۸ و ۹ شدت میدان الکتریکی مماس برسطح مقطع را برای غشاء نازک فلزی بشکل L به ترتیب درامتدادهای $x = \cdot 3$ و $y = \cdot 2$ ترسیم میکنیم . واضح است که شرائط حدی بخوبی ارضاء شده‌اند . شدت میدان الکتریکی مماس برسطح اتصال خازنی دوموج‌بر مستطیلی مختلف را نیز درشکل ۱۰ نمایش میدهیم در اشکال فوق پارامترهای مختلف را ذکر میکنیم و مدار معادل را محاسبه کرده‌ایم .

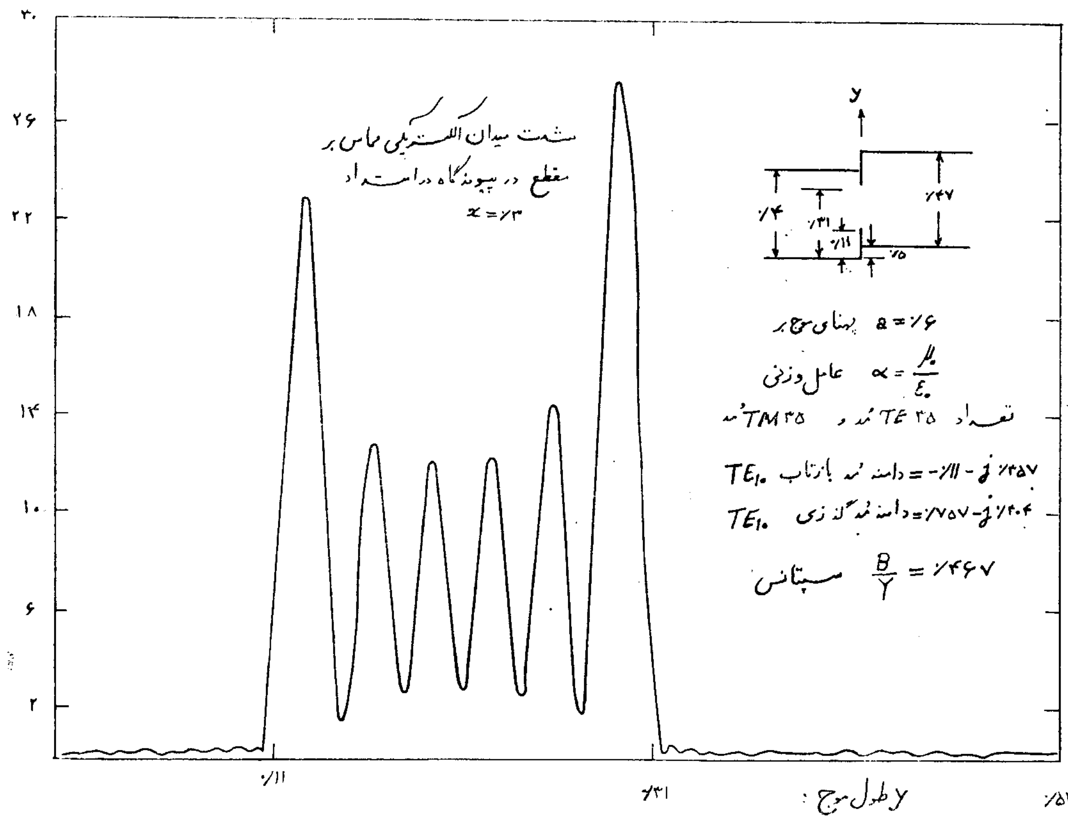
از اصل بقای انرژی بعنوان معیاری برای انتخاب عامل وزنی α و تعداد مدها استفاده میکنیم .



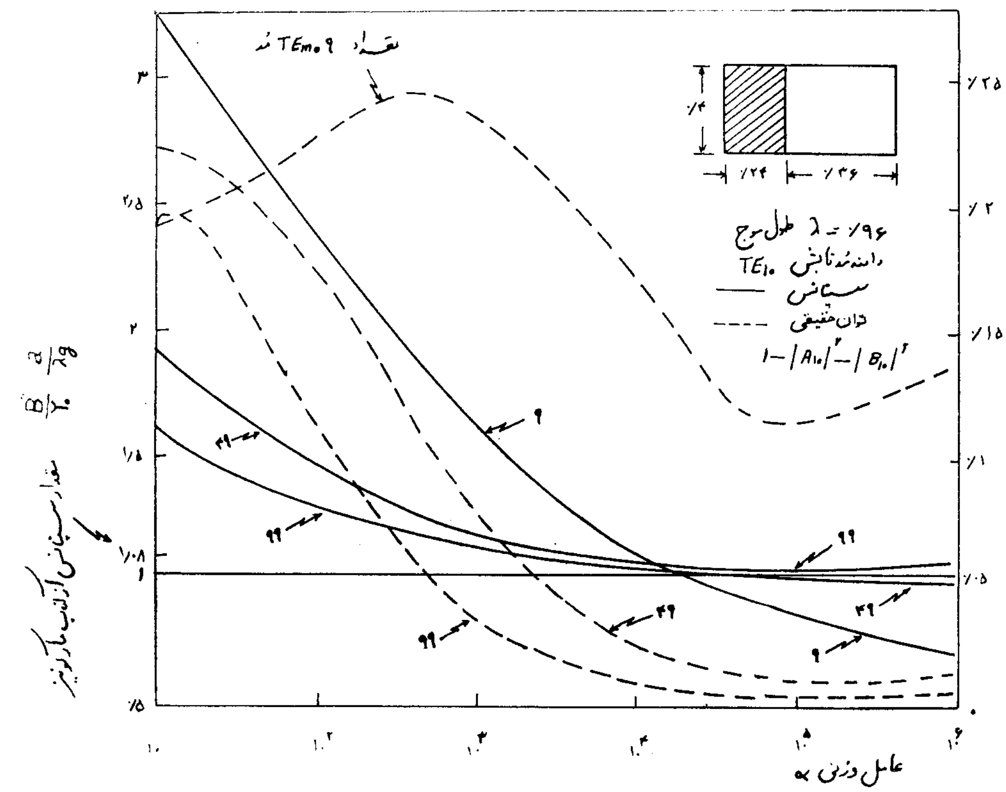
شکل ۸ — غشاء بشکل L درمقطع موج‌بر مستطیلی قدرمطلق مؤلفه شدت میدان الکتریکی
مماس برمقطع درامتداد ۲ر۰=y



شکل ۹ — غشاء بشکل L درموج‌بر مستطیلی ـ مؤلفه شدت میدان الکتریکی
مماس برمقطع درامتداد ۳ر۰=x



شکل ۱۰ — اتصال خازنی دوموج‌بر مستطیلی ـ قدرمطلق مؤلفه شدت میدان الکتریکی مماس برمقطع درامتداد ۰٫۳=x



شکل ۱۱ — سسپتانس و توان حقیقی ـ غشاء فلزی سلفی ناستقارن

از نظر فیزیکی انرژی حقیقی نباید از بین برود . ضریب مد پخش شونده را هم برای محاسبه مدار معادل و هم برای محاسبه توان حقیقی بکار میبریم . بنابراین تا آنجائیکه مربوط به مدار معادل است بهترین عامل وزنی برای حالتی است که اصل بقای انرژی بهتر ارضاء میشود . مدار معادل (مقدار موهومی ادمیتانس نرمالیزه شده) برای غشاء فلزی سلفی را برحسب مقادیر مختلف برای تعداد مختلف مدها در شکل ۱۱ ترسیم میکنیم . اختلاف انرژی حقیقی درموج تابش و مجموع انرژی موج‌های برگشت ومنتقل شده به‌عبارت :

$$P_r = |A_{10}^{+}|^2 - |A_{10}^{-}|^2 - |B_{10}|^2$$

ساده میشود . که درهمان شکل ۱۱ ترسیم میکنیم . منحنی سسپتانس B برای تعداد بیشتر مد شیب کمتری دارد ونسبت به عامل α کمتر حساسیت نشان میدهد . بهمچنین هرقدر تعداد مدها بیشتر شود مقدار P_r کمتر میشود . مینیمم P_r بسیار وسیع است و دراطراف مینیمم P_r مقدار B تغییرات کمی دارد . نتیجه میگیریم که حداقل میتوانیم مقادیری برای α بدست آوریم . برای اینحالت مدار معادلی که مرجع [۳] میدهد $B=1.08$ است و تقریباً درمینیمم P_r قرار دارد .

مراجع

1. Schwinger, J., Saxon, D. «Discontinuities in Waveguides, Notes on Lectures by J. Schwinger», Gordon and Breach, New York, 1968.

2. Lewin, L., «Advanced Theory of Waveguides», Illiffe and Sons, Ltd., London, 1951.

3. Marcuvitz, N., ed. «Waveguide Handbook», McGraw-Hill Book co., New York, 1951.

4. Mittra, R. «Relative Convergence of the Solution of a Doubly Infinite Set of Equations», J. Res. Natl. Bur. Std., 67D, pp. 245-254, 1963.

5. Claricoats, P. J. B., Slinn, K. R., «Numerical Solution of Waveguide Discontinuity Problems», Proc. IEEE, vol. 114, No. 7, pp 878-886, July, 1967.

6. Wexler, A., «Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis», Trans. Microwave Theory & Technique, vol. MTT-15, No. 9, pp. 508-517, September, 1967.

7. Lee, S. W., Jones, W. R., Campbell, J. J., «Convergence of Iris—Type Discontinuity Problems», Microwave Theory & Technique, vol MMT—19, No. 6, pp. 528—536, June, 1971.

8. Thong, V. K., «Solutions of Some Waveguide Discontinuities by the Method of Moments», Microwave Theory & Techniques, vol. MTT—20, No. 6, June 1972.

9. Harrington, R. F., «Time Harmonic Electromagnetic Fields», McGraw-Hill Book co., New York, 1961.

10. Harrington, R. F., «Field Computation by Moment Methods», The Mac Millan co., New York, p. 192, 1968.

11. Mittra, R., Lec, S. W., «Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves», The MacMillan co., New York.

12. Hildebrand, F. B., «Methods of Applied Mathematics», Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

13. Oraizi, H., «A Mumerical Method for the Solution of Waveguide Discontinuities», Ph. D. Dissertation, 1973, Technical Report TR—73—8, Department of Electrical & Computer Engineering, Syracse U., Syracuse, N. Y.

14. «مجموعه اصطلاحات علمی» ، انجمن اصطلاحات علمی : قسمت اول و دوم ، تهران ۱۳۳۰

15. «واژه‌های علمی در درس نگره کاهنربائی» ، محمود حسابی دانشگاه تهران ۱۳۴۰