

جریان لایه‌ای بین دولوله درون هم

نوشته:

هرمزپازوش

استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده: در این مقاله مسئله جریان لایه‌ای یک سیال از بین دولوله متداخل مورد مطالعه قرار گرفته است. با استفاده از معادلات ناویه - استکس ابتدا مسئله بطور تحلیلی حل شده و روابطی برای توزیع سرعت، دبی و ضریب مالش داری - ویسباخ بدست آمده است. سپس توزیع نسبی سرعت، دبی و ضریب مالش برای حدود وسیعی از اندازه و وضعیت نسبی دولوله متداخل با کمک کامپیوتر بطور عددی محاسبه و نتایج درجد اولی خلاصه شده و در شکل‌هایی نشان داده شده است. اثر خارج از مرکزیت بر روی دبی نیز با زاء حدود وسیعی از خارج از مرکزیت نسبی E و نسبت b/a (که در آن a و b بترتیب اشعه دایره داخلی و خارجی هستند) تعیین شده است. یک روش تقریبی برای حل مسئله پیشنهاد شده و نتایج حاصل از این روش و روش دقیق با یکدیگر مقایسه گشته‌اند.

۱ - مقدمه: مسئله جریان از بین دولوله متداخل برای بیش از ۶۰ سال مورد نظر علمای مکانیک سیالات بوده است. یکی از علل این توجه معمول بودن این وسیله برای انتقال سیالات میباشد. مهم‌ترین کاربرد این مسئله در وسائل انتقال حرارت است. در عمل غالباً از مجرای فاضلاب برای عبور لوله‌های آبرسانی استفاده میشود. در رگ‌بهارهای شدید که فاضلاب از تمام مجرا عبور میکنند مسئله به جریان از دو لوله متداخل منجر میگردد.

یکی از سؤالاتی که در این مسئله بخصوص مطرح میشود این است که درجه موقعیتی لوله آب کوچکترین اثر را در روی ظرفیت مجرای فاضلاب دارد. در مورد مخازن آب شهرها نیز غالباً لوله سرریز را داخل لوله آبرسان مخزن قرار میدهند در اینجا نیز سؤال فوق مطرح میگردد. بطور نظری میتوان ثابت نمود که اگر یک سیم نازک را در لوله‌ای که قطر آن ۱۰۰ بار از قطر سیم بیشتر است قرار دهیم دبی لوله بمیزان ۰.۱٪ کاهش مییابد.

از این قبیل اطلاعات پراکنده در حال حاضر بمیزان فوق العاده زیاد وجود دارد و لذا حصول یک یا چند داده چندان بر اطلاعات موجود نمی افزاید. لازم است که جنبه های مختلف دولوله متداخل (annulus) که ممکن است آنرا حلقه نیز نامید) مورد مطالعه تحلیلی قرار گرفته و برای حالات فیزیکی مختلف مسئله را مورد بررسی کامل قرار داد تا بدینوسیله تفاوت های را که در داده های موجود دیده میشود مشخص نمود. در این مقاله علاوه بر توزیع سرعت میزان دبی و ضریب مالش در جریان حلقه ای مطالعه شده و اثر خارج از مرکزیت بر روی دبی حلقه نیز مورد بحث قرار گرفته است. ولی قبل از این مطالعه تحلیلی یک مطالعه ابعادی از عوامل مؤثر در جریان حلقه صورت گرفته تا اعداد بی بعد مؤثر در این جریان شناخته شوند. این مطلب ذیلاً بطور اختصار ذکر شده است و سپس راه حل تحلیلی مسئله آمده و در پایان نتیجه مباحث ذکر شده است.

۲ - عوامل مؤثر در جریان حلقه: طبیعت جریان در حلقه بستگی به خواص سیال (ρ و μ)، مشخصه سرعت جریان v (این مشخصه میتواند سرعت میانگین در مقطع باشد) و عوامل هندسی حلقه a و b و e که بترتیب اشعه دوایر داخلی و خارجی و فاصله مراکز این دو دایره از یکدیگر هستند دارد. در مورد جریان لایه ای بطوریکه میدانیم زبری لوله ها نقش چندان بازی نمیکند. بنابراین مشخصه ای نظیر ضریب مالش داریسی - ویسباخ (Darcy-Weisbach) بصورت رابطه زیر با عوامل فوق مربوط میگردد.

$$f = \text{func}(\rho, \mu, V_m, a, b, e) \quad (1)$$

با کمک آنالیز ابعادی این رابطه را میتوان بصورت زیر درآورد.

$$f = \text{func}(R_e, AR, E) \quad (2)$$

که در آن $AR = b/a$ ، $E = e/(b-a)$ و R_e عدد رینولوز جریان:

$$R_e = \frac{\rho V_m D_{eq}}{\mu}$$

میباشد و D_{eq} قطر معادل است که بنا به تعریف چهار برابر شعاع هیدرولیکی مقطع بوده و بنابراین برابر است با:

$$D_{eq} = \frac{\pi (b^2 - a^2)}{2\pi (b + a)} = \frac{1}{2}(b - a) \quad (3)$$

بطوریکه رابطه (۲) نشان میدهد مقدار f در این مورد برخلاف جریان در یک لوله فقط تابعی از R_e نبوده بلکه بستگی به نسبت دو قطر (ضخامت نسبی حلقه) و خارج از مرکزیت E نیز دارد. تنها توسط مطالعات تجربی یا بروش تحلیلی میتوان رابطه ای بین f با سه عدد بی بعد فوق برقرار نمود.

۳ - راه حل تحلیلی مسئله: محور لوله ها را محور طولی x قرار داده و از مختصات استوانه ای

r و θ و x استفاده می‌کنیم. مبداء مختصات را نیز بمرکز لوله داخلی انطباق می‌دهیم. در جریان لوله‌ای کاملاً توسعه یافته (fully developed) مولفات سرعت بصورت زیر می‌باشد.

$$u_r = u_\theta = 0 \quad \text{و} \quad u_x = f(r)$$

معادلات ناویه - استکس * (N-S) در امتداد محور x در این جریان بصورت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4)$$

نوشته میشود و در امتدادهای r و θ بصورت:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

درمیآید. و نشان میدهد که p تنها تابعی از x میباشد یعنی بجای $\frac{\partial p}{\partial x}$ میتوان $\frac{dp}{dx}$ را قرار داد. معادله (4) را میتوان بصورت زیر ساده نمود.

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

و یا:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} r$$

با دوبار انتگرال گیری از این رابطه نتیجه خواهد شد.

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + A \ln r + B$$

هرگاه بجای $\frac{dp}{dx}$ در رابطه فوق $-P$ را قرار دهیم (یعنی $P = \frac{P_1 - P_2}{l}$)، که P قدرمطلق افت فشار در واحد طول لوله میباشد خواهیم داشت:

$$u = - \frac{P}{4\mu} r^2 + A \ln r + B \quad (5)$$

مقادیر ثابت A و B بستگی به شرایط کرانه داشته و توسط این شرایط میتوان مقدارشان را معین نمود. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم یکی حالتی که دولوله هم مرکز هستند و دیگر حالت دولوله متداخل خارج از مرکز. در واقع حالت اول را بعنوان مثال خاصی از حالت کلی دوم میتوان در نظر گرفت. ولی در اینجا برای ساده شدن مطلب این حالت را جداگانه در نظر گرفته و ابتدا به بحث در آن می‌پردازیم.

۴ - حالت دولوله هم مرکز (Concentric Annulus)

در مورد دولوله هم مرکز شرایط کرانه عبارتند از :

$$u=0 \begin{cases} r=a \\ r=b \end{cases}$$

با قرار دادن این روابط در معادله (۵) مقادیر ثابت A و B حاصل شده و معادله توزیع سرعت بصورت :

$$u = - \frac{P}{4\mu} \left(r^2 - a^2 - \frac{b^2 - a^2}{\ln b/a} \ln r/a \right) \quad a \leq r \leq b \quad (6)$$

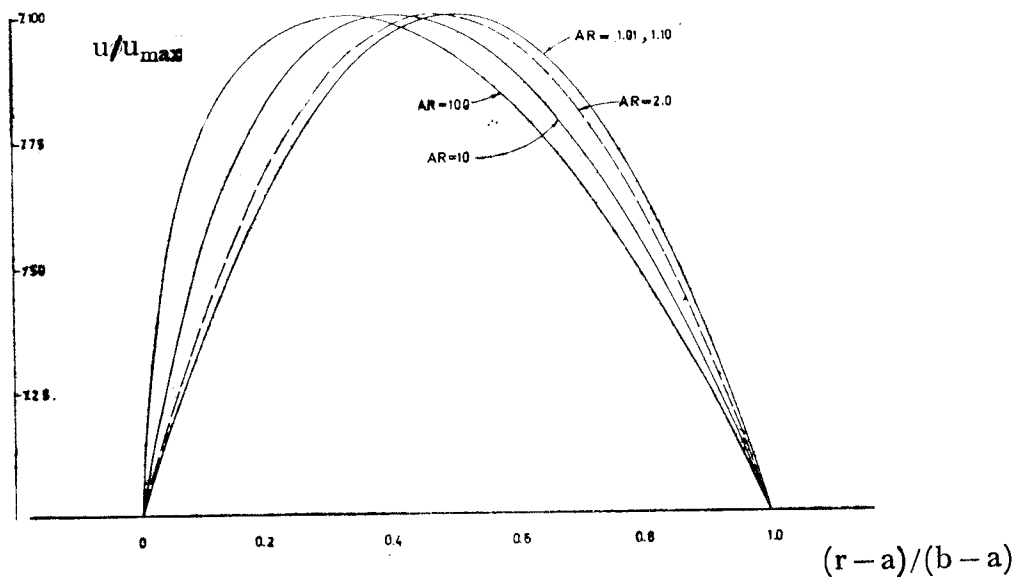
حاصل میشود . فرمول مشابهی در کتاب هیدرودینامیک Lamb (۱)* برای توزیع سرعت داده شده است . در عمل بهتر آنست که بجای این سرعت توزیع نسبی سرعت دانسته شود یعنی رابطه ای برای u/u_{max} بدست آورد . سرعت حداکثر u_{max} در فاصله r_m اتفاق می افتد که از رابطه :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r_m} = 0$$

میتوان آنرا تعیین نمود در نتیجه :

$$r_m = \left(\frac{b^2 - a^2}{r \ln b/a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

سپس u_{max} و نسبت u/u_{max} را محاسبه می کنیم پس از ساده کردن خواهیم داشت .



شکل ۱ - توزیع سرعت بین دولوله هم مرکز برای حدود وسیعی از AR

* این اعداد به شماره مرجع در فهرست مراجع مربوط میشود .

$$u/u_{\max} = \frac{(r/a)^{\tau} - 1 - \tau(r_m/a)^{\tau} \ln(r/a)}{(r_m/a)^{\tau} - 1 - \tau(r_m/a)^{\tau} \ln(r_m/a)} \quad (8)$$

این توزیع سرعت، بطوریکه بعداً خواهیم دید با کمک کامپیوتر دانشگاه محاسبه و نتایج بازاا حدود وسیعی از AR در شکل (۱) نشان داده شده است .

۱ - ۴ - محاسبه دبی : شدت جریان بین دولوله هم مرکز با در نظر گرفتن تقارن بصورت

$$Q_o = \tau \pi \int_a^b u r dr$$

نوشته میشود با قراردادن سرعت از رابطه (۶) در انتگرال فوق جواب زیر حاصل خواهد شد .

$$Q_o = \frac{\pi P}{\lambda \mu} \left[(b^{\epsilon} - a^{\epsilon}) - (b^{\tau} - a^{\tau}) / \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right] \quad (9)$$

این رابطه بصورتی مشابه در کتاب Massey (۲) آمده است . رابطه فوق را بصورت بی بعد زیر نیز میتوان نشان داد .

$$AQ = Q_o / \frac{\pi P a^{\epsilon}}{\lambda \mu} = AR^{\epsilon} - 1 - \frac{(AR^{\tau} - 1)^{\tau}}{\ln AR} \quad (9)$$

سرعت میانگین در این حالت برابر خواهد بود با :

$$V_m = \frac{Q}{A} = \frac{Pa^{\tau}}{\lambda \mu} \left[AR^{\tau} + 1 - \frac{AR^{\tau} - 1}{\ln AR} \right] \quad (10)$$

۲ - ۴ - محاسبه ضریب مالش f : ضریب f را میتوان از فرمول داریسی و سباخ :

$$f = \frac{h_f}{l} \cdot \frac{D_{eq}}{V_m^{\tau} / \tau g}$$

بدست آورد . با کمک روابط (۳) و (۱) از رابطه فوق نتیجه زیر حاصل میشود .

$$f R_e = \tau \epsilon (AR - 1)^{\tau} / \left[AR^{\tau} + 1 - \frac{AR^{\tau} - 1}{\ln AR} \right]$$

با توجه به رابطه (۹) این معادله را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$f R_e = \tau \epsilon (AR - 1)^{\tau} (AR^{\tau} - 1) / AQ \quad (11)$$

حالت خاص ۱ - در موردیکه $b/a \rightarrow \infty$ یعنی برای یک لوله که سیم بسیار نازکی در محور آن

قرار داده شده است خواهیم داشت :

$$f R_e = \tau \epsilon$$

حالت خاص ۲ - دولوله هم مرکز با فاصله بسیار کم $b/a \rightarrow 1$. در این حالت از معادله کوت (Couette) برای جریان بین دو صفحه موازی استفاده می کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود (بمرجع ۵ رجوع شود).

$$q = \frac{P}{12\mu} (b-a)^2$$

که در آن q دبی برای واحد عرض جریان میباشد . دبی کل نتیجه برابر است با $q\pi(a+b)$ و یا :

$$Q_o = \frac{\pi P}{12\mu} (b^2 - a^2) (b-a)^2 \quad (12)$$

این رابطه را میتوان بصورت زیر نیز نشان داد :

$$Q_o = \frac{\pi Pa^3}{12\mu} (AR^2 - 1)(AR - 1)^2 \quad (12)$$

در واقع این معادله یک جواب تقریبی برای دبی دولوله هم مرکز بوده و وقتی به جواب واقعی نزدیک میشود که a بسمت b میل نماید . در این حالت بسهولت میتوان نشان داد که

$$fR_e = 96$$

میشود . بنابراین میتوان نتیجه گرفت که در لوله های متداخل هم مرکز fR_e بین ۶۴ تا ۹۶ تغییر میکنند .

بین دبی حاصل از حل تقریبی (معادله ۱۲) و حل دقیق آن (معادله ۹) نسبت زیر برقرار است

$$\frac{Q_o \text{ تقریبی}}{Q_o \text{ دقیق}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \frac{2AR}{1+AR^2}}{1 - \frac{AR^2-1}{(1+AR^2) \ln AR}} \quad (13)$$

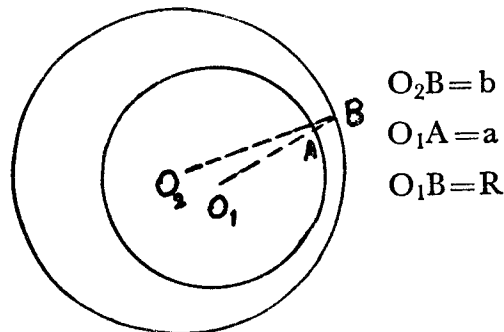
این نسبت برای مقادیر مختلف AR از ۰.۱ تا ۱۰ توسط کامپیوتر محاسبه شده و نتایج همراه با دبی دقیق، دبی تقریبی و دبی ناشی از انتگرال عددی که بعداً توضیح آن خواهد آمد و fR_e در جدول I داده شده است . برای AR های خیلی کوچک دقت ساده در این محاسبه کافی نبوده و از دقت مضاعف برای محاسبه این نسبت استفاده گردید . بطوریکه این جدول نشان میدهد تا $AR=2$ جوابهای حاصل از حل دقیق و حل تقریبی با دقتی بهتر از ۱٪ با یکدیگر برابرند .

جدول I - مقادیر Q و fR_e برای جریان از بین دولوله هم مرکز

AR	دقیق Q	تقریبی Q	انگزال عددی Q	fR_e	تقریبی $Q / \text{دقیق } Q$
1.01	1.34×10^{-6}	1.34×10^{-6}	1.34×10^{-6}	95.9998	1.0
1.02	1.077×10^{-5}	1.0773×10^{-5}	1.0771×10^{-5}	95.9994	1.0
1.05	1.7083×10^{-4}	1.7083×10^{-4}	1.7082×10^{-4}	95.9962	1.0
1.10	1.40019×10^{-3}	1.40×10^{-3}	1.40015×10^{-3}	95.9855	0.9998
1.25	2.34575×10^{-2}	2.3437×10^{-2}	2.34575×10^{-2}	95.9180	0.9992
2.0	2.015748	2.0	2.015746	95.2500	0.992
5.0	2.66111×60^2	256	2.66110×10^2	92.3523	0.962
10	5.74248×10^3	5.346×10^3	5.7245×10^3	89.3717	0.931
50	4.65364×10^6	4.0×10^6	4.65363×10^6	82.5173	
100	7.82896×10^7		7.82894×10^7	80.1129	

۵ - دولوله متداخل خارج از مرکز (Eccentric Annulus). در اینجا رابطه (۵) بصحت خود باقی است منتها شرایط کرانه با حالت قبل تفاوت دارند. در این حالت فاصله مبدأ مختصات (مرکز دایره داخلی) تا سطح دایره خارجی R با مراجعه بشکل زیر در معادله:

$$b^2 = R^2 + e^2 + 2Re \cos \theta$$



θ زاویه بین O_1A و امتداد O_2O_1 میباشد

صداق میکند. از این رابطه R بصورت زیر نتیجه میشود.

$$R = \sqrt{b^2 - e^2 \sin^2 \theta} - e \cos \theta \quad (14)$$

در این حالت شرایط کرانه عبارتند از:

$$u=0 \begin{cases} r=a \\ r=R \end{cases}$$

با قرار دادن این شرایط در معادله ۵ نتیجه زیر حاصل خواهد شد.

$$u = -\frac{P}{4\mu} \left(r^2 - a^2 - \frac{R^2 - a^2}{\ln R/a} \ln r/a \right) \quad a \leq r \leq R \quad (15)$$

برای دولوله هم مرکز $R=b$ بوده و رابطه فوق بمعادله (۶) بدل خواهد شد. سرعت حداکثر در فاصله

r_m اتفاق می افتد که شبیه حالت قبل از رابطه $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r_m} = 0$ بدست می آید. در نتیجه:

$$r_m = \left(\frac{R^2 - a^2}{r \ln R/a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

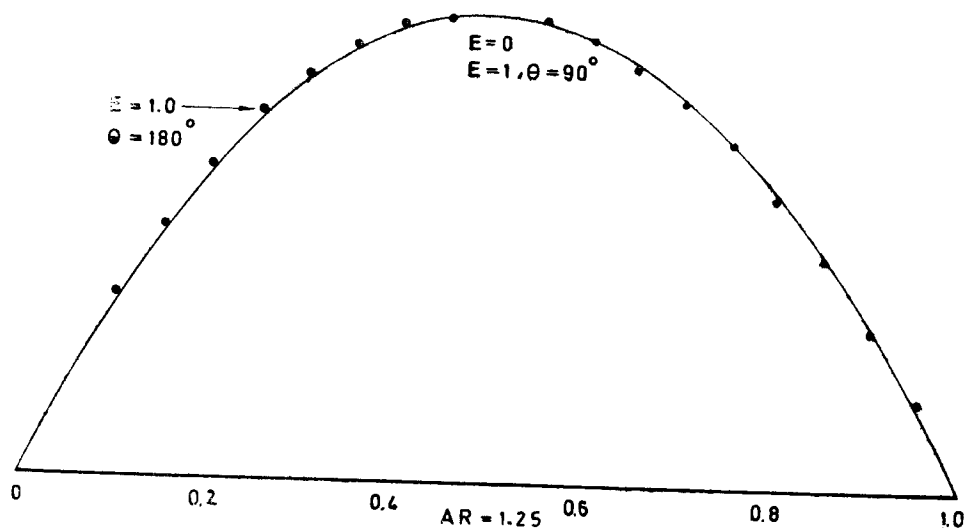
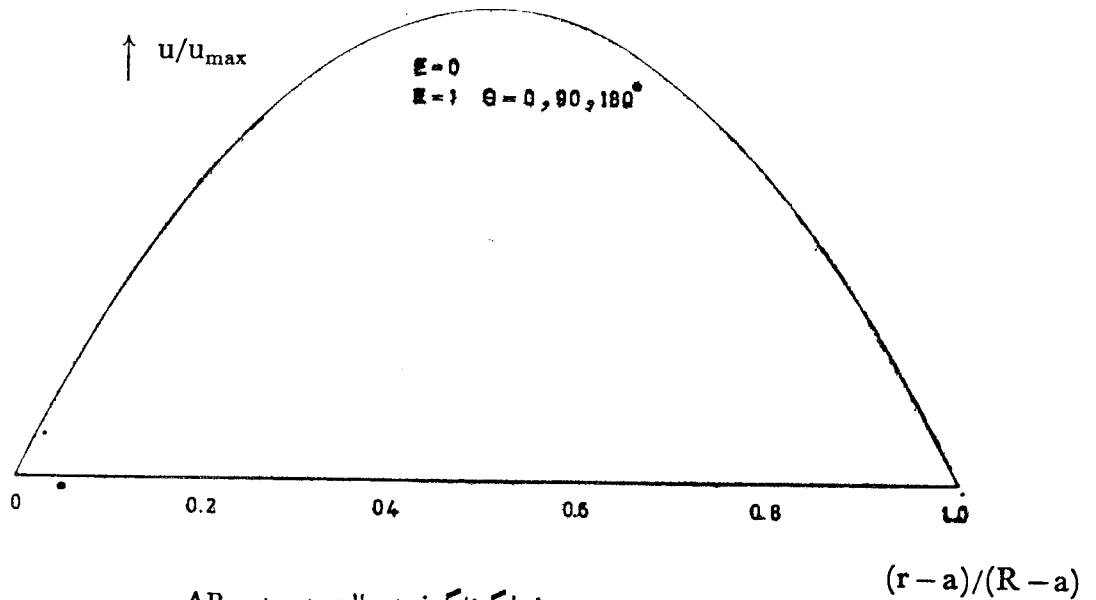
که شباهت کامل بمعادله (۷) دارد با این تفاوت که در اینجا R ثابت نبوده بلکه با زاویه θ تغییر میکند.

از این رابطه و رابطه (۱۵) میتوان u_{max} را که نظیر r_m بستگی بزاویه θ نیز دارد محاسبه نمود. سرعت

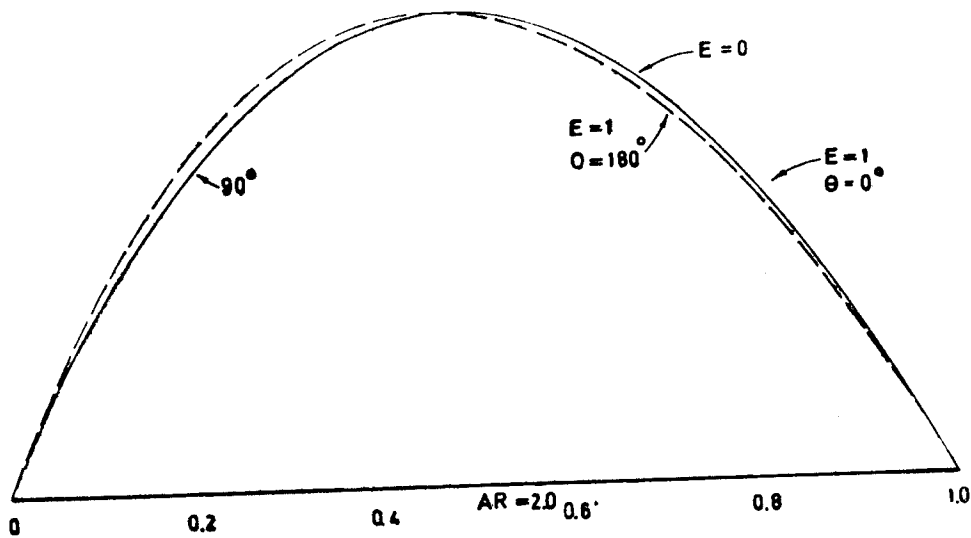
نسبی پس از ساده کردن رابطه ای بصورت زیر خواهد داشت.

$$u/u_{\max} = \frac{(r/a)^2 - 1 - 2(r_m/a)^2 \ln(r/a)}{(r_m/a)^2 - 1 - 2(r_m/a)^2 \ln(r_m/a)} \quad (8)$$

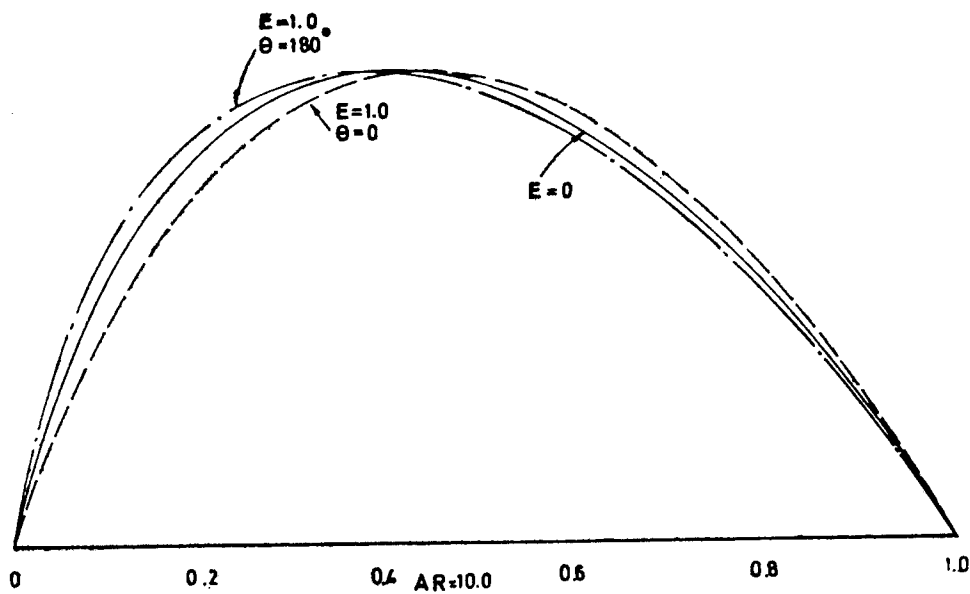
که همان معادله (۸) است منتها در اینجا r_m علاوه بر نسبت b/a با زاویه θ نیز تغییر میکند. تغییرات سرعت در چندین AR و برای E های متفاوت و بازاء زوایای صفر و 90° و 180° در شکل‌های (۲) تا (۵) نشان داده شده است. بطوریکه از این شکلها برمیآید بازاء AR های کوچک توزیع سرعت متقارن بوده و در نتیجه سرعت حداکثر در وسط فاصله بین دولوله اتفاق میافتد. ولی با افزایش نسبت b/a و نیز با اضافه شدن میزان خروج از مرکزیت E توزیع سرعت از شکل متقارن دور شده و مکان سرعت حداکثر بتدریج



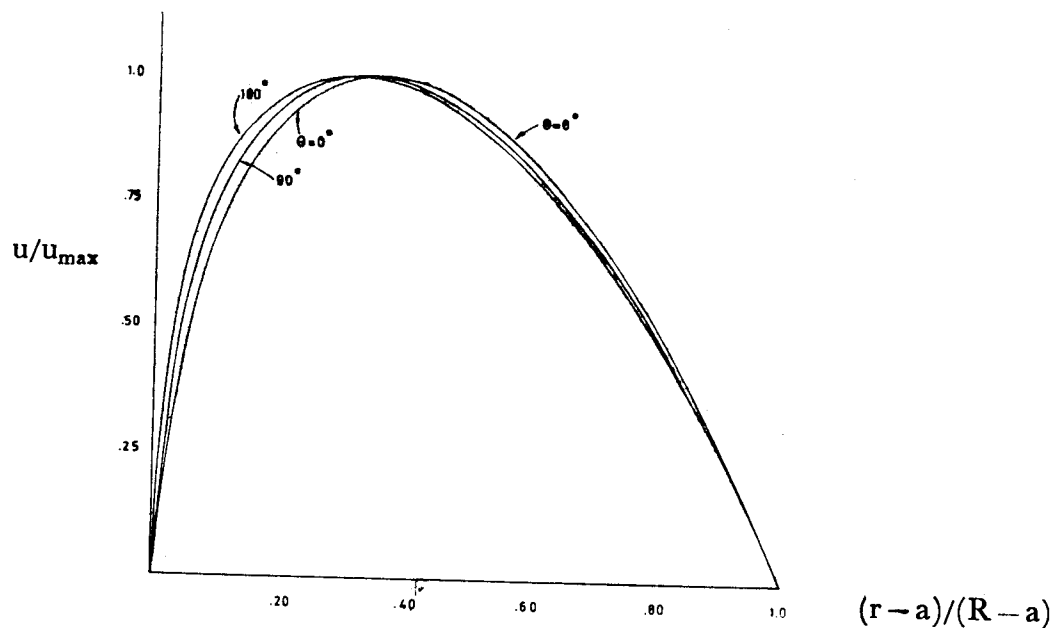
به دایره داخلی نزدیک میگردد . همچنین بازاء شرایط معین با افزایش مقدار θ یعنی با افزایش نسبی درفاصله بین دولوله همین پدیده تکرار میشود . این مطلب را بطور روشن از شکل (۶) میتوان دریافت .



شکل ۴ - توزیع سرعت در شرایط گوناگون در حالت $AR=2.0$



شکل ۵ - توزیع سرعت در شرایط گوناگون در حالت $AR=10.0$



شکل ۶ - توزیع سرعت درمقادیر مختلف θ در حالت ($E=0.6$ ، $AR=100$)

۱-۵ - محاسبه دبی : در این حالت رابطه دبی بصورت :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_a^R u r dr d\theta$$

نوشته میشود . با قرار دادن u از رابطه (۱۰) در رابطه فوق نتیجه میشود .

$$Q = -\frac{P}{4\mu} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^R \left(r^2 - a^2 - \frac{R^2 - a^2}{\ln R/a} \right) r dr$$

از رابطه فوق پس از انتگرال گیری نسبت به متغیر r خواهیم داشت .

$$Q = \frac{P}{16\mu} \int_0^{2\pi} \left[R^4 - a^4 - \frac{(R^2 - a^2)^2}{\ln R/a} \right] d\theta$$

بسیارگی میتوان دید که عبارت داخل کروشه در رابطه فوق تابعی از θ میباشد که انتگرال دقیق آن امکان پذیر نبوده و بنابراین بایستی آنرا بروش عددی محاسبه نمود . در این روش حدود انتگرال را به N قسمت تقسیم نموده و برای هر قسمت عبارت داخل کروشه را محاسبه و آنرا در $\Delta\theta$ مربوط باین قسمت ضرب میکنیم

جدول II - مقادیر α ($\alpha = Q/Q_0$) برای حدود رسی AR و E

E	α برای $AR \approx 1.0$ راه حل تقریبی	AR									
		1.01	1.05	1.10	1.25	2.0	5.0	10	50	100	
0.0	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
0.2	1.06	1.0597	1.0600	1.0601	1.0605	1.0641	1.0728	1.0775	1.0815	1.0817	
0.4	1.24	1.2397	1.2401	1.2404	1.2422	1.2566	1.2916	1.3102	1.3260	1.3270	
0.6	1.54	1.5397	1.5402	1.6411	1.5404	1.5785	1.6578	1.6994	1.7343	1.7363	
0.8	1.96	1.9596	1.9605	1.9621	1.9703	2.0314	2.1735	2.2468	2.3075	2.3105	
1.0	2.50	2.4996	2.5009	2.5036	2.5175	2.6174	2.8420	2.9554	3.0470	3.0509	

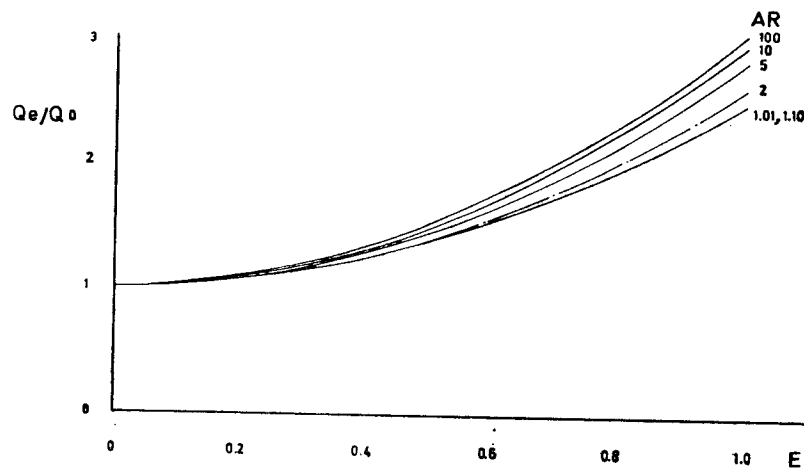
تا ΔQ مربوط بان قسمت حاصل شود. از حاصل جمع این ΔQ ها Q کل نتیجه خواهد شد. هرگاه $\Delta\theta$ ها برابر انتخاب شوند (یعنی $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N}$ باشد) مجموع بصورت زیر درخواهد آمد.

$$Q = \frac{\pi P}{8\mu N} \sum_{i=1}^N \left[R_i^\varepsilon - a^\varepsilon - \frac{(R_i^r - a^r)^r}{\ln R_i/a} \right]$$

این رابطه را بنحویکه در قسمت قبل در مورد Q دیده شد بصورت بی بعد درمی آوریم.

$$AQ = Q / \frac{\pi P a^\varepsilon}{8\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \left(\frac{R_i}{a} \right)^\varepsilon - 1 - \frac{[(R_i/a)^r - 1]^r}{\ln R_i/a} \right\} \quad (17)$$

در این رابطه R_i فاصله دایره خارجی از مرکز مختصات در i امین قسمت میباشد. دبی AQ بروش انتگرال عددی برای حالات مختلف یعنی مقادیر مختلف AR و E بوسیله کامپیوتر محاسبه گردید. نسبت Q به Q_0 مربوطه (یعنی برای $E=0$) که به α نمایش داده شده برای نسبت های مختلف b/a محاسبه و نتایج در جدول II درج شده و در شکل (7) نشان داده شده است.



شکل 7 - مقادیر α بازاء حدود وسیعی از AR و E

2-5 - محاسبه ضریب مالش: در این حالت مشابه حالت قبل میتوان f را محاسبه نمود. نتیجه

خواهد شد.

$$fR_e = \frac{64}{\pi} (AR^r - 1)(AR - 1)^r / AQ \quad (11')$$

که مشابه معادله (11) است منتها در اینجا AQ را بایستی بروش عددی بترتیبی که در بالا آمد محاسبه نمود و چون AQ در اینجا علاوه بر نسبت b/a تابعی از E میباشد بنابراین fR_e نیز تابعی از AR و E

خواهد بود. چون fR_e نسبت عکس با AQ دارد بنابراین میتوان در حالت fR_e را از تقسیم fR_e مربوطه در حالت دولوله هم مرکز که در جدول I داده شده به α که در جدول II آمده است بدست آورد.

۳-۵ = راه حل تقریبی مسئله: در صورتیکه مقدار $b-a$ نسبت بهریک از آنها کوچک بوده و یا

چنین فرض شود یک راه حل تقریبی برای محاسبه دبی وجود دارد. در این روش برای قطاع کوچکی بزاویه $d\theta$ که در روی آن بتوان یک R ثابت فرض نمود از معادله کوت (Couette) برای جریان بین دو صفحه موازی میتوان استفاده نموده و دبی این جزء را محاسبه کرد. داریم:

$$dQ = \frac{P}{2\mu} \left(\frac{R-a}{2} \right)^2 \Delta A = \frac{P}{12\mu} (R-a)^2 dA \quad (18)$$

با توجه بمعادله (۱۴) داریم.

$$R-a = \sqrt{b^2 - e^2 \sin^2 \theta} - e \cos \theta - a$$

بنا بر فرض مسئله $b-a$ نسبت بهریک از دو مقدار a و b کوچک است در نتیجه از $e^2 \sin^2 \theta$ در مقابل b^2 میتوان چشم پوشی نمود در نتیجه داریم.

$$R-a = b-a - e \cos \theta$$

برای dA نیز میتوان رابطه زیر را برقرار نمود.

$$dA = \frac{a+R}{2} \cdot \Delta \theta \cdot \Delta R = \frac{1}{2} (a+b - e \cos \theta)(b-a - e \cos \theta) d\theta$$

با چشم پوشی از $e \cos \theta$ در مقابل $a+b$ در رابطه فوق و قرار دادن آن در معادله (۱۸) نتیجه زیر حاصل خواهد شد.

$$dQ = \frac{P}{24\mu} (a+b)(b-a - e \cos \theta)^2 d\theta$$

حال اگر از رابطه فوق بین 0 و 2π انتگرال بگیریم مقدار دبی کل حاصل خواهد شد.

$$Q = \frac{P}{24\mu} (a+b) \int_0^{2\pi} (b-a - e \cos \theta)^2 d\theta \quad (19)$$

عبارت داخل انتگرال بشکل $f(\theta)$ بوده و میتوان آنرا بصورت زیر ساده نمود.

$$f(\theta) = (b-a)^2 (1 - E \cos \theta)^2 d\theta$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۱۹) و انتگرال گیری رابطه زیر نتیجه خواهد شد.

$$Q = \frac{\pi P}{12 \mu} (b^2 - a^2) (b - a)^2 \left(1 + \frac{2}{3} E^2 \right) \quad (20)$$

از مقایسه این رابطه و معادله (۱۲) که رابطه‌ای تقریبی برای محاسبه دبی بین دولوله هم مرکز می‌باشد نتیجه زیر حاصل می‌شود .

$$Q/Q_0 = 1 + \frac{2}{3} E^2$$

این نسبت فقط تابعی از e بوده و برای $e = E = 0$ معادله (۲۰) به معادله (۱۲) بدل شده و برای $E = 1$ داریم .

$$Q = 2.0 Q_0 \quad (21)$$

این رابطه نشان می‌دهد که در جریان سیال بین دولوله با اشعه تقریباً یکسان وقتی در لوله کاملاً خارج از مرکز قرار داده شوند دبی که از آن می‌توان عبور داد . ۱۰ درصد بیش از حالتی است که دولوله هم مرکز باشند .

نسبت دبی که معادله (۲۰) بدست می‌دهد به دبی واقعی که توسط رابطه (۱۷) داده شده است

برابر است با :

$$\frac{Q_{\text{تقریبی}}}{Q_{\text{واقعی}}} = \frac{2}{3} \times (AR^2 - 1) \quad (22)$$

این نسبت با اضافه مقدار Q تقریبی (معادله ۲) بازاء مقادیر مختلف b/a از ۱.۱ تا ۱.۰ ره و برای مقادیر مختلف E از صفر تا ۱ محاسبه و نتایج در جدول III درج شده‌اند . بطوریکه دیده می‌شود برای نسبت‌های b/a تا حدود ۱/۱ دوجواب کاملاً یکسان هستند ، یعنی راه حل تقریبی همان جوابی را بدست می‌دهد که از روش دقیق حاصل می‌شود . علت این دقت را نیز در کوچک بودن مقدار e نسبت به a یا b بایستی جستجو کرد . برای $AR = 2$ رابطه (۲۰) را با تقریب ۱٪ برای محاسبه دبی بین دولوله هم مرکز و با تقریبی حدود ۵٪ برای خارج از مرکزیت کامل می‌توان بکار برد . این تقریب برای نسبت $AR = 0$ در حالت کاملاً هم مرکز یا خارج از مرکزیت کوچک هنوز خوب بوده ولی برای خارج از مرکزیت‌های بزرگتر و نیز برای مقادیر بزرگتر AR نمیتوان از رابطه ساده (۲۰) استفاده نمود .

جدول III - مقادیر دبی تقریبی و نسبت آن به دبی واقعی برای جریان از بین دو زوله متناخل

AR

E	1.01		1.10		1.25		2.0		5.0	
	تقریبی Q	واقعی Q / تقریبی Q	تقریبی Q	واقعی Q / تقریبی Q	تقریبی Q	واقعی Q / تقریبی Q	تقریبی Q	واقعی Q / تقریبی Q	تقریبی Q	واقعی Q / تقریبی Q
0.0	1.34×10^{-6}	1.0	1.40×10^{-3}	1.0	2.3437×10^{-2}	1.0	2.0	0.993	256	0.965
0.2	1.42	1.0	1.483	1.0	2.486	1.0	2.12	0.99	271.5	0.95
0.4	1.66	1.0	1.735	1.0	2.91	0.998	2.48	0.98	317.5	0.925
0.6	2.063	1.0	2.155	1.0	3.61	0.997	3.08	0.97	394	0.895
0.8	2.625	1.0	2.742	1.0	3.60	0.995	3.92	0.96	501.5	0.87
1.0	3.35	1.0	3.50	1.0	5.86	0.993	5.0	0.95	640	0.845

۱۷ - روش محاسبه توزیع سرعت ، دبی و fR_e : برای حصول یک نتیجه کلی مقادیر بی بعد شده سرعت و دبی محاسبه گردیدند . همانطوریکه قبلاً ذکر شد برای بی بعد کردن سرعت از سرعت نسبی u/u_{max} و برای بی بعد کردن دبی از نسبت $Q / \frac{\pi Pa^4}{8\mu}$ استفاده گردید . برای انجام این محاسبات به پارامترهای دیگری نظیر r_m و R نیز احتیاج است که با تقسیم کردن بر a آنها را نیز میتوان بی بعد نمود . این کمیات نسبی توسط کامپیوتر دانشگاه محاسبه گردید . برنامه بکار رفته ضمیمه شده است . علائم RMO و QO و FREQ در این برنامه بترتیب برای r_m و AQ و fR_e در حالت هم مرکز و R2 ، RM ، QE و FRE بترتیب برای R و r_m و Q و fR_e حالت غیرهم مرکز بکار رفت . بعلاوه نسبت های r/a و u/u_{max} نیز بترتیب بصورت RR و VR معرفی گردیدند .

نحوه انجام محاسبه باین صورت است که ابتدا بازا یک مقدار AR شش حالت مختلف از دولوله کاملاً هم مرکز تا کاملاً خارج از مرکز در نظر گرفته شد (در این حالات E برابر صفر ۰٫۲ ، ۰٫۴ ، ۰٫۶ ، ۰٫۸ و ۱ میباشد) . برای حالت اول ($E=0$) ابتدا مقدار AQ و fR_e طبق رابطه (۹) و (۱۱) محاسبه شد . سپس فاصله بین دولوله به ۲ قطعه مساوی تقسیم و در هر یک از نقاط تقسیم سرعت نسبی توسط معادله (۸) محاسبه گردید . برای حالت $E \neq 0$ فاصله صفر تا π به ۵ قسمت مساوی تقسیم و در هر قسمت عبارت داخل علامت مجموع در معادله (۱۷) محاسبه گشته و حاصل جمع این سری با در نظر گرفتن ضریب ۲ بعنوان AQ منظور گشت . برای اطمینان از کافی بودن تعداد تقسیمات بکار رفته در تعدادی از محاسبات این فاصله به ۱۰ قسمت مساوی نیز تقسیم گشته و AQ محاسبه گردید ولی تفاوت قابل توجهی در این دو محاسبه مشاهده نگردید . در واقع دو نتیجه با حداقل ۴ رقم اعشار با یکدیگر برابر بودند . مقدار fR_e نیز از رابطه (۱۱) تعیین گردید . برای تعیین توزیع سرعت در این حالت سه زاویه ۵ و ۹۰ و ۱۸۰ در نظر گرفته شد و برای هر زاویه فاصله مرکز لوله داخل از دایره خارجی در این نقاط تعیین شده و مشابه حالت قبل سرعت نسبی در این فاصله محاسبه گردید . پس از انجام محاسبات برای آخرین E ($E=1.0$) عملیات برای یک AR دیگر تکرار گردید . برای AR یک حدود بسیار وسیع از ۱۰۱ تا ۱۰۰ بکار رفت (مقادیریکه برای AR انتخاب شد ۱۰۱ ، ۱۰۲ ، ۱۰۵ ، ۱۱۰ ، ۱۲۵ ، ۱۵۰ ، ۱۰۰ و ۱۰۰ میباشد) . برای احتراز از طولانی شدن جداول فقط قسمتی از نتایج حاصل از محاسبات توزیع سرعت در جداول IV و V و VI درج شده است . این جداول نسبت u/u_{max} را بترتیب بازا E برابر صفر ، ۰٫۶ و ۱٫۰ و برای چند AR مختلف بدست میدهند . فاصله RM یعنی فاصله نسبی که در آن سرعت به حداکثر خود میرسد نیز در این جداول داده شده است . لازم بتوضیح است که در مورد $AR=1.01$ و $AR=1.02$ بعلت کوچک بودن صورت و منخرج بعضی از کسرها در محاسبات از دقت مضاعف (Double Precision) بجای دقت ساده استفاده گردید .

جدول VI - توزیع نسبی سرعت در حالت $E=0$

$r/\Delta r$	AR							
	1.01	1.10	1.25	2.0	5	10	50	100
0.00	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.05	0.190	0.193	0.197	0.215	0.267	0.327	0.512	0.590
0.10	0.360	0.365	0.371	0.400	0.476	0.550	0.779	0.779
0.15	0.510	0.516	0.234	0.557	0.639	0.709	0.845	0.884
0.20	0.640	0.646	0.655	0.689	0.766	0.823	0.922	0.947
0.25	0.750	0.456	0.764	0.796	0.861	0.904	0.969	0.983
0.30	0.840	0.845	0.853	0.880	0.929	0.958	0.994	0.998
0.35	0.910	0.914	0.920	0.940	0.973	0.989	1.000	0.998
0.40	0.960	0.963	0.967	0.980	0.996	1.000	0.991	0.983
0.45	0.990	0.991	0.993	0.998	0.999	0.993	0.968	0.956
0.50	1.000	1.000	1.000	0.996	0.983	0.970	0.932	0.917
0.55	0.990	0.988	0.986	0.976	0.951	0.930	0.883	0.868
0.60	0.960	0.957	0.953	0.936	0.902	0.877	0.826	0.808
0.65	0.910	0.906	0.900	0.878	0.838	0.810	0.757	0.739
0.70	0.840	0.835	0.825	0.803	0.759	0.730	0.677	0.660
0.75	0.750	0.744	0.736	0.710	0.666	0.638	0.588	0.572
0.80	0.640	0.634	0.625	0.600	0.558	0.533	0.489	0.475
0.85	0.510	0.505	0.497	0.474	0.448	0.417	0.380	0.369
0.90	0.360	0.356	0.350	0.332	0.305	0.289	0.293	0.255
0.95	0.190	0.188	0.184	0.174	0.156	0.150	0.136	0.132
1.00	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
rm	0.499	0.496	0.491	0.471	0.433	0.404	0.344	0.323

جدول V - توزیع نسبی سرعت در حالت E=0.60

r/Δr	AR											
	1.01			1.10			10°			100		
	0°	90°	180°	0°	90°	180°	0°	90°	180°	0°	90°	180°
0.00	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.05	0.19	0.19	0.19	0.191	0.193	0.194	0.261	0.31	0.373	0.487	0.567	0.637
0.10	0.36	0.36	0.36	0.362	0.365	0.367	0.468	0.531	0.599	0.702	0.763	0.811
0.15	0.51	0.51	0.51	0.512	0.516	0.519	0.631	0.691	0.751	0.831	0.873	0.904
0.20	0.64	0.64	0.64	0.643	0.646	0.650	0.628	0.810	0.856	0.913	0.940	0.959
0.25	0.75	0.75	0.75	0.752	0.755	0.859	0.355	0.894	0.927	0.963	0.979	0.989
0.30	0.84	0.84	0.84	0.842	0.845	0.848	0.925	0.952	0.972	0.991	0.997	1.000
0.35	0.91	0.91	0.91	0.912	0.914	0.917	0.971	0.986	0.995	1.000	0.999	0.995
0.40	0.96	0.96	0.96	0.961	0.963	0.964	0.995	1.000	1.000	0.993	0.986	0.978
0.45	0.99	0.99	0.99	0.991	0.991	0.992	1.000	0.995	0.987	0.971	0.960	0.949
0.50	1.00	1.00	1.00	1.000	1.000	1.000	0.985	0.973	0.960	0.937	0.922	0.908
0.55	0.99	0.99	0.99	0.989	0.988	0.987	0.953	0.935	0.917	0.890	0.873	0.858
0.60	0.96	0.96	0.96	0.959	0.957	0.955	0.905	0.883	0.862	0.831	0.814	0.798
0.65	0.91	0.91	0.91	0.908	0.906	0.903	0.841	0.817	0.794	0.762	0.744	0.729
0.70	0.84	0.84	0.84	0.838	0.835	0.932	0.763	0.737	0.714	0.683	0.665	0.650
0.75	0.75	0.75	0.75	0.748	0.744	0.741	0.669	0.644	0.622	0.593	0.577	0.563
0.80	0.64	0.64	0.64	0.637	0.634	0.631	0.562	0.539	0.519	0.493	0.479	0.467
0.85	0.52	0.51	0.51	0.508	0.505	0.502	0.441	0.422	0.505	0.384	0.372	0.363
0.90	0.37	0.36	0.36	0.308	0.356	0.353	0.307	0.293	0.280	0.265	0.257	0.250
0.95	0.20	0.19	0.19	0.189	0.188	0.186	0.160	0.152	0.145	0.137	0.133	0.129
1.00	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
rm	0.50	0.50	0.50	0.499	0.497	0.494	0.436	0.411	0.387	0.352	0.329	0.310

جدول VI - توزیع نسبی سرعت در حالت $E=1.0$

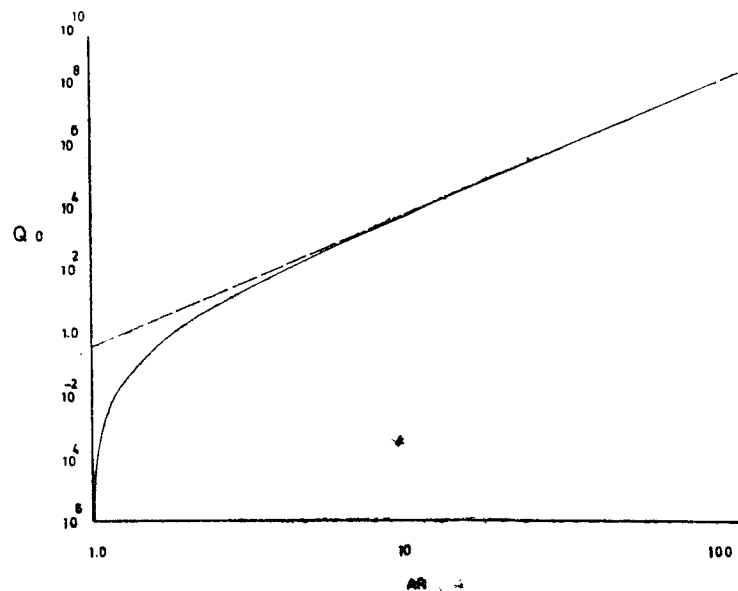
$r/\Delta r$	AR									
	1.01		11.0		2.00		10.00		100.	
	90°	130°	90°	180°	90°	180°	90°	180°	90°	180°
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.05	0.190	0.190	0.193	0.196	0.209	0.235	0.258	0.397	0.363	0.657
0.10	0.360	0.360	0.364	0.366	0.390	0.430	0.463	0.622	0.589	0.824
0.15	0.510	0.510	0.516	0.521	0.547	0.591	0.626	0.770	0.742	0.913
0.20	0.640	0.640	0.646	0.652	0.678	0.722	0.574	0.937	0.849	0.964
0.25	0.750	0.750	0.756	0.762	0.786	0.825	0.851	0.997	0.923	0.991
0.30	0.840	0.840	0.845	0.850	0.871	0.902	0.922	0.984	0.970	1.000
0.35	0.910	0.910	0.914	0.918	0.934	0.956	0.969	0.997	0.994	0.994
0.40	0.960	0.960	0.963	0.966	0.976	0.988	0.994	0.998	1.000	0.975
0.45	0.990	0.990	0.991	0.993	0.997	1.000	0.999	0.984	0.988	0.945
0.50	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.992	0.986	0.954	0.961	0.905
0.55	0.990	0.990	0.987	0.987	0.979	0.965	0.955	0.911	0.920	0.854
0.60	0.960	0.960	0.954	0.954	0.941	0.921	0.907	0.855	0.865	0.794
0.65	0.910	0.910	0.902	0.902	0.885	0.860	0.844	0.786	0.797	0.724
0.70	0.840	0.840	0.830	0.830	0.810	0.782	0.765	0.707	0.717	0.646
0.75	0.750	0.750	0.739	0.739	0.718	0.689	0.672	0.615	0.625	0.559
0.80	0.640	0.640	0.629	0.629	0.608	0.580	0.564	0.513	0.522	0.464
0.85	0.510	0.510	0.500	0.500	0.481	0.457	0.443	0.400	0.408	0.360
0.90	0.360	0.360	0.352	0.352	0.337	0.319	0.308	0.277	0.282	0.248
0.95	0.190	0.190	0.185	0.185	0.177	0.166	0.160	0.144	0.146	0.128
1.00	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
rm	0.500	0.500	0.495	0.492	0.478	0.454	0.439	0.379	0.392	0.303

۷ - خلاصه و نتیجه مطالعه - در این مقاله جریان لایه ای در یک حلقه مورد مطالعه تحلیلی قرار گرفت .

محاسبه دبی ، ضریب مالش و توزیع سرعت با زاء حدود وسیعی از نسبت اشعه داخلی و خارجی (از ۰.۱ تا ۱۰) یعنی جریان بین دولوله با فاصله بسیار کم تا ۱۰۰) و از حالت کاملاً هم مرکز تا خارج از مرکزیت کامل انجام و از آن نتایج زیر حاصل گردید .

در مورد یک حلقه باریک توزیع سرعت بین دولوله شکل متقارن داشته و سرعت بیشینه در وسط فاصله بین دولوله اتفاق می افتد . با ضخیم شدن حلقه و نیز با افزایش خروج از مرکزیت توزیع سرعت در مقطع بطرف داخل کج می شود بدین معنی که سرعت بیشینه به لوله داخلی نزدیکتر می شود .

روابط (۹) و (۱۷) نشان می دهند که دبی متناسب با توان چهارم اندازه حلقه (مثلاً قطر داخلی آن) می باشد . بنابراین با دوبرابر کردن اندازه یک حلقه میتوان دبی آن را ۱۰ بار افزود . میزان دبی برای یک حلقه معین بستگی به نسبت b/a و مقدار E نیز داشته و با افزایش در هر یک از دو مقدار بر میزان دبی افزوده می گردد . نسبت دبی یک حلقه خارج از مرکز به دبی حلقه هم مرکز مربوطه با α مشخص شده است . مقادیر α در جدول II درج شده و در شکل (۷) نشان داده شده است . برای $E=10$ مقدار افزایش دبی برای یک حلقه باریک ۱۰ درصد بوده و برای حلقه های ضخیم از این میزان نیز تجاوز می کند . تغییرات Q_0 با b/a در شکل (۸) نشان داده شده است . این شکل برای $AR > 10$ رابطه زیر را بین دبی و AR پیشنهاد میکند .



شکل ۸ - رابطه Q_0 با AR

$$AQ_0 = 0.066 (AR)^{4.07}$$

این رابطه برای $AR=10$ با دقتی بهتر از ۱۰ درصد میزان دبی را بدست میدهد. با توجه باین رابطه (یا شکل ۸) و مقادیر α که از جدول II و یا شکل (۷) استخراج میشود میتوان دبی را بین هر دو لوله خارج از مرکز بدست آورد.

ضریب مالش داریسی - ویسباخ f در مورد حلقه مشابه جریان لایه‌ای در یک لوله نسبت عکس با عدد رینولوز داشته منتها در اینجا f بعلاوه بستگی به نسبت b/a و میزان خارج از مرکزیت E نیز دارد. بطوریکه این مطالعه نشان میدهد با ضخیم شدن حلقه fR_e کاهش یافته و مقدار آن از ۶ تا ۹ برای یک حلقه بسیار باریک تا ۴ برای دایره کامل تغییر مییابد. تغییر در مقدار fR_e نسبت عکس با میزان دبی داشته و در نتیجه نسبت fR_e در یک حالت به fR_e در همان شرایط وقتی دو لوله هم مرکز باشند برابر با $\frac{1}{\alpha}$ میباشد.

از جریان درهم (turbulent) بین دو لوله در اینجا بحثی بمیان نیامد. این مطلب را نباید به نشانه کم اهمیت بودن جریان درهم تلقی نمود. بلکه علت این است که جریان درهم خود بحث جداگانه‌ای است که در قالب این مقاله نمی‌گنجد. در مورد جریان درهم بعلت وارد شدن پارامترهای اضافی مطالعات تحلیلی مشکل‌تر و پیچیده‌تر بوده و در غالب موارد لزوم مطالعات تجربی نیز پیش خواهد آمد. برای آشنائی با این مبحث شخص میتواند به مرجع (۴) یا مرجع (۳) رجوع نماید. این مراجع حاوی مطالب سودمندی در این مورد میباشد. در مرجع (۴) از تعداد زیادی از مقالاتی که در این مورد وجود دارد نام برده شده و کار هر یک از آنها مختصراً بیان شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

UNIVERSITY OF TEHRAN—COMPUTER CENTER S/360

```

C 11 51. 07. 18 12805 H. PAZVASH ECCENTRIC ANNULUS
C RADIAL DISTRIBUTION OF VELOCITY AND DISCHARGE FOR
C CONCENTRIC AND ECCENTRIC ANNULUS
DOUBLE PRECISION AR, R2, E, QO, QE, RQ
DIMENSION R(10), TETA(10)
READ(1,5) (R(I), I=1,1), (TETA (K), K=1,3)
5 FORMAT (F5.2)
PAI=4.*ATAN(1.)
DO 100 I=1,5
AR=R(I)
QO=AR**4-1.-((AR**2-1.)**2)/DLOG (AR)
RMO=SQRT ((AR**2-1.)/(2.*DLOG (AR)))
FREO=64.*(AR**2.-1.)*((AR-1.)**2)/QO
WRITE (3,6) AR, QO, RMO, FREO
6 FORMAT (1H1, 10X, DISCHARGE FACTOR FOR A CONCENTRIC
1 ANNULUS OF OUTER INNER DIAMETER RATIO» F10.2/2X,
2 D20.10,2F20.8)
E=0.
DO 50 J=1,6
CALL QFUNC (AR, E, 100, QE)
RQ=QE/QO
FRE=64.*(AR**2-1.)*((AR-1.)**2)/QE
WRITE (3,7) E, QE, RQ, FRE
7 FORMAT (//, 10X, «DISCHARGE RATIO FOR ECC. ANNULUS»/
120X, F5.3, D20. 10, 2F20.8)
15 RM=RMO
R2=AR

```

```

GOTO 45
25 DO 20 K=1,3
    Z=PAI*TETA (K)
    ES = E*DSIN (Z)
    EC=E*DCOS (Z)
    R2=SQRT (AR**2 - ES**2) - EC
    IF (R2 - 1.) 20, 20, 35
35 RM=SQRT ((R2**2 - 1.)/(2.*DLOG (R2)))
    KALFA=180.*TETA (K)
    WRITE (3,8) KALFA, R2, RM
8  FORMAT (//20X, I10, 2F20.8/15X, "RADIAL DISTRIBUTION OF
    VELOCITY")
45 DR=(R2 - 1.)/20.
    RR=1.
    RR 1=0.0
    DO40 M=1,20
    RR=RR + DR
    RRS=RR**2
    RMS=RM**2
    VR=(RRS - 1. - RMS*ALOG(RRS))/(RMS - 1. - RMS*ALOG(RMS))
    RR1=RR1 + 0.05
40 WRITE (3,9) RR, VR, RR1
9  FORMAT (/ 10X, 2F20.8, F10.2)
    IF (E - 0.) 50, 50, 20
20 CONTINUE
50 E=E + (AR - 1.)/5.
100 CONTINUE
    CALL EXIT

```

```

SUBROUTINE QFUNC (R, E, N, Q)
DOUBLE PRECISION ES, EC, R2, DY, Y, Q
X=0.0
Y=0.0
PAI=4.*ATAN (1.)
AN=N

```



```

DX=1.0/AN
DDX=2.*PAI*DX
DO 30 I=1,N
ES=E*DSIN (X)
EC=E*DCOS (X)
R2=SQRT (R**2 - ES**2) - EC
DY=R2**4 - 1. - ((R2**2 - 1.)**2)/DLOG(R2)
Y=Y+DY
30 X=X+DDX
Q=Y*DX
RETURN
END

```

فهرست مراجع

1. Lamb, Horace, **Hydrodynamics**, 6 th ed. Dover Publication, 1932, pp. 585-587.
2. Massey, M. B., **Mechanics of Fluids**, Copyright C, Van Nostrand Co. 1968, p. 150 .
3. Nelson, A. R. and J. M. Robertson, Analytical studies of Turbulent Friction in Annular conduits, Report No. 328, Dept. of T. & A. M. , Univ. of Illinois, Nov. 1968.
4. Robertson, J. M. Turbulent Friction in Eccentric Conduits. Report No. 310, Dept of T. & A. M. , Univ. of Illinois at Urbana. Mar 1968 .
5. Schlichting, H. **Boundary Layer Theory**, 4 th ed. McGraw-Hill, 1960, pp. 66-68.

قدردانی

درخاتمه بدینوسیله از کامپیوتر دانشگاه برای وقتی که ، برای انجام محاسبات باینجانب دادند و نیز از آقای غنی فارغ التحصیل رشته راه و ساختمان در سال جاری که در ترسیم شکل ها کمک نمودند تشکر مینماید .