

بررسی خواص شاخه های گذرنده از بینهایت سیستم های فیدبک مثبت در مکان هندسی ریشه ها

دکتر علی محمدزاده عیدگاهی

دانشگاه تهران - دانشکده فنی - گروه مهندسی برق و کامپیوتر

مهندس محمد قوام زاده

دانشگاه تهران - دانشکده فنی - گروه مهندسی برق و کامپیوتر

چکیده

شاخه های گذرنده از بی نهایت در مکان هندسی ریشه ها زمانی بوجود می آیند که درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه سیستم با هم برابر شده و سیستم دارای فیدبک مثبت باشد. این شاخه ها که روش مرسوم رسم گام به گام ارائه شده در کتب کنترل کلاسیک برای ترسیم آنها کفایت نمی کند، شاخه هایی هستند که ابتدا و انتهای آنها نقاط متناهی بوده اما از بینهایت نیز عبور می نمایند. شاخه های گذرنده از بینهایت از یک نقطه متناهی شروع می شوند و به نهایت می روند، سپس از بینهایت به سمت یک نقطه متناهی دیگر باز می گردند. در این گونه شاخه ها مقدار بهره در بینهایت عددی متناهی می باشد. سیستمهای فیدبک مثبتی که در آنها درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه با هم برابر و مساوی n است دارای حداقل یک و حداکثر n شاخه گذرنده از بینهایت در مکان هندسی خود می باشند. در این مقاله روابطی جهت تعیین تعداد شاخه های گذرنده از بینهایت در مکان این گونه سیستم ها ارائه شده است. همچنین امتدادی که این شاخه ها به بینهایت می روند مشخص گردیده و روابط مربوط به مجانب های این گونه شاخه ها، مکان تلاقی آنها با محور حقیقی، و زوایای آنها با محور حقیقی طی قضایای ارائه و اثبات شده اند. در پایان سیستم های مورد بحث از دیدگاه پاسخ زمانی مورد بررسی قرار گرفته و تاثیرات وجود شاخه های گذرنده از بینهایت را در نمودارهای انداره بهره، زاویه بهره و نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه ها مورد مطالعه قرار داده ایم.

۱ - مقدمه

قطع میکنند و زوایای این خطوط مجانب با جهت مثبت محور حقیقی از رابطه زیر حاصل می شوند:

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{|n-m|} \quad i=0,1,2,\dots, |n-m|-1 \quad (2)$$

زمانی که درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه سیستم با هم برابر باشند ($m=n$) طبق روابط (۱) و (۲)، هیچ شاخه بی نهایتی در مکان موجود نبوده و در نتیجه مجانبی نیز برای مکان تعریف نمی شود. این مطلب در مورد سیستم های فیدبک منفی که در آنها درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه با یکدیگر برابرند، کاملاً صادق است. اما در مقاله [۱] نشان داده شده است که سیستم های فیدبک مثبتی که در آنها درجه صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه با یکدیگر

در روش گام به گام برای رسم مکان هندسی ریشه ها که در کتب کنترل کلاسیک [4] - [2] ارائه شده است، چنانچه سیستم دارای m صفر و n قطب باشد و m و n مساوی نباشند، در مکان $|n-m|$ شاخه موجود است که هر یک از آنها از یک قطب متناهی شروع و به یک صفر در بی نهایت ختم می شوند. در نتیجه تعداد خطوط مجانب مکان $|n-m|$ است. تمام خطوط مجانب موجود در مکان یکدیگر را روی محور حقیقی در نقطه ای به طول

(حاصل جمع صفرهای تابع تبدیل حلقه) - (حاصل جمع قطبهای تابع تبدیل حلقه) $\sigma =$

$$|n-m| \quad (1)$$

قضیه ۱: تعداد شاخه های گذرنده از بی نهایت :

تعداد شاخه های گذرنده از بی نهایت موجود در مکان هندسی این گونه سیستم ها در حالت کلی به متناسب بودن ضرایب نظیر به نظیر صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه سیستم مربوط است .

اثبات : بازای هر عدد حقیقی مثبت برای K ، معادله مشخصه دارای n ریشه بوده که بوسیله n نقطه در مکان هندسی ریشه ها مشخص می شوند. هرگاه بازای یک K درجه معادله مشخصه سیستم به $(n-m)$ تبدیل شود، یعنی درجه معادله مشخصه سیستم که یک معادله چند جمله ای است m درجه نزول کند ، می توان نتیجه گرفت که این K متناظر با n نقطه روی مکان می باشد که m عدد از آنها در بی نهایت واقعند.

چون در سیستم مورد بحث تنها K ای که متناظر با قطبی در بی نهایت است K_c نامیده می شود، لذا با بررسی معادله مشخصه سیستم بازای K_c می توان به تعداد شاخه های گذرنده از بی نهایت موجود در مکان پی برد. معادله مشخصه این گونه سیستم ها توسط رابطه (۴) بیان شده است . هرگاه در این رابطه بجای K مقدار K_c را قرار دهیم رابطه زیر بدست می آید:

$$\Delta_c(s) = 1 - K_c G(s)H(s) = 0 \quad (۶)$$

با قراردادن مقدار K_c از رابطه (۵) در رابطه (۶) خواهیم داشت :

$$\Delta_c(s) = 1 - \frac{b_n}{a_n} G(s)H(s) = 0 \quad (۷)$$

هرگاه $G(s)H(s)$ را از رابطه (۳) جایگزین نمائیم رابطه زیر حاصل می شود:

برابرنده، از این مطلب تبعیت نمیکنند زیرا که شاخه های مکان هندسی این گونه سیستم ها از نوع گذرنده از بی نهایت می باشند.

در مقاله [۱] اگر چه شاخه های گذرنده از بی نهایت معرفی و تعریف شده اند ولیکن هیچگونه رابطه ای در مورد وضعیت و تعداد آنها ارائه نشده است و مطالعه ای روی آنها صورت نگرفته است .

در این مقاله ما به ارائه روابطی که بین ضرایب تابع تبدیل حلقه سیستم و تعداد شاخه های گذرنده از بی نهایت ، محل تلاقی مجانب های شاخه های گذرنده از بی نهایت با محور حقیقی و زوایای این مجانب ها با محور حقیقی وجود دارند، می پردازیم .

۲ - مشخصات شاخه های گذرنده از بی نهایت در مکان هندسی ریشه ها

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s)H(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (۳)$$

چنانچه تابع فوق ، مشخص کننده تابع تبدیل حلقه یک سیستم فیدبک مثبت باشد، معادله مشخصه آن بصورت زیر درمی آید.

$$\Delta(s) = 1 - K G(s)H(s) = 0 \quad (۴)$$

همانطور که در مقاله [۱] نشان داده شده است هنگامیکه شاخه های مکان هندسی سیستم از بی نهایت می گذرند مقدار بهره (K) برای قطب های موجود در بی نهایت برابر است با:

$$K_c = \frac{b_n}{a_n} \quad (۵)$$

که آنرا بهره بحرانی می نامیم . شاخه های گذرنده از بی نهایت در مکان هندسی ریشه های این سیستم دارای خواصی هستند که توسط قضایای زیر بیان می شوند.

به همین شکل چنانچه ضرایب S^{n-i} بازای $i=0, 1, 2, \dots, m-1$ همگی صفر باشند یعنی:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \dots = \frac{b_{n-(m-1)}}{a_{n-(m-1)}} = K_c \quad (13)$$

آنگاه مکان شامل m شاخه گذرنده از بی‌نهایت است. «نتیجه این قضیه آن است که در حالت کلی مکان اینگونه سیستم‌ها همواره دارای یک شاخه گذرنده از بی‌نهایت است و معادله مشخصه سیستم بازای K_c حداکثر دارای درجه $(n-1)$ می باشد.»

همچنین از رابطه (۱۳) نتیجه می شود که تعداد شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت موجود در مکان هندسی سیستم‌های تعریف شده توسط رابطه (۳)، در حالت کلی به متناسب بودن ضرایب نظیر به نظیر صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه این سیستم‌ها مربوط است.

بامشخص شدن رابطه بین تعداد شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت در مکان با ضرایب تابع تبدیل حلقه سیستم و تاثیر این شاخه‌ها بر کاهش درجه معادله مشخصه سیستم، باید تعیین کرد که شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت در کدام امتداد از بی‌نهایت عبور می نمایند. این به معنای یافتن معادله خط یا خطوط مجانب موجود در مکان هندسی ریشه‌ها به کمک ضرایب تابع تبدیل حلقه سیستم است.

قضیه ۲: معادله خطوط مجانب موجود در مکان و محل تلاقی آنها با محور حقیقی:

اگر m تعداد شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت سیستم‌های تعریف شده به وسیله رابطه (۳) باشد، مکان شامل $2m$ مجانب است. m عدد برای آن قسمت از شاخه‌ها که رونده به بی‌نهایت هستند و m عدد برای آن قسمت از شاخه‌ها که بازگردنده از بی‌نهایت هستند، تمام این $2m$ خطوط مجانب یکدیگر را در یک نقطه روی محور حقیقی با مختصات زیر قطع می کنند:

$$1 - \frac{b_n}{a_n} * \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} = 0 \quad (8)$$

با مخرج مشترک گرفتن از رابطه (۸) و مساوی صفر قراردادن صورت آن برحسب توانهای نزولی s ، رابطه زیر حاصل می شود:

$$(b_{n-1} - \frac{b_n a_{n-1}}{a_n}) s^{n-1} + (b_{n-2} - \frac{b_n a_{n-2}}{a_n}) s^{n-2} + \dots + (b_1 - \frac{b_n a_1}{a_n}) s + (b_0 - \frac{b_n a_0}{a_n}) = 0 \quad (9)$$

با استفاده از روابط (۶) و (۹) خواهیم داشت:

$$1 - K_c G(s)H(s) = \sum_{i=0}^n (b_{n-i} - \frac{b_n a_{n-i}}{a_n}) s^{n-i} = 0 \quad (10)$$

از رابطه (۱۰) نتیجه می شود که همواره بازای $s^{n-i} = s^n$ صفر می شود. پس نمودار مکان هندسی سیستم‌های تعریف شده بوسیله معادله (۳) همیشه دارای یک شاخه گذرنده از بی‌نهایت می باشد و این موید قضیه ۲ مرجع [۱] می باشد.

اگر بازای $i=1$ نیز ضریب $s^{n-i} = s^{n-1}$ صفر شود رابطه زیر بدست می آید:

$$b_{n-1} - \frac{b_n a_{n-1}}{a_n} = 0$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = K_c \quad (11)$$

در نتیجه دو شاخه گذرنده از بی‌نهایت در مکان موجود است.

اگر رابطه (۱۱) برقرار باشد و بازای $i=2$ نیز ضریب $s^{n-i} = s^{n-2}$ صفر شود آنگاه خواهیم داشت:

$$b_{n-2} - \frac{b_n a_{n-2}}{a_n} = 0$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} = K_c \quad (12)$$

در نتیجه سه شاخه گذرنده از بی‌نهایت در مکان موجود می باشند.

حال معکوس رابطه (۱۷) را در نظر بگیرید:

$$\frac{1}{b-aK} = \frac{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}}{(a_{n-m} K - b_{n-m}) s^{n-m} + (a_{n-m-1} K - b_{n-m-1}) s^{n-m-1} + \dots + (a_1 K b_1) s + (a_0 K - b_0)} \quad (18)$$

صورت و مخرج سمت راست رابطه (۱۸) را برهم تقسیم می‌کنیم. چون هنگام محاسبه خطوط مجانب s^{m-1} به سمت بی‌نهایت میل می‌نماید می‌توان از جملات s^{m-1} به بعد صرف نظر کرد. آنگاه نتیجه خواهیم گرفت:

$$\frac{1}{b-aK} = \left\{ \frac{c_n s^m}{a_{n-m} K - b_{n-m}} \right\} * \left\{ 1 + \frac{1}{c_n} \left[c_{n-1} - \frac{c_n (a_{n-m-1} K - b_{n-m-1})}{a_{n-m} K - b_{n-m}} \right] \frac{1}{s} \right\} \quad (19)$$

$$\frac{1}{b-aK} = \left\{ \frac{c_n}{a_{n-m} K - b_{n-m}} \right\} * \left\{ s \left(1 + \frac{1}{c_n} \left[c_{n-1} - \frac{c_n (a_{n-m-1} K - b_{n-m-1})}{a_{n-m} K - b_{n-m}} \right] \frac{1}{s} \right) \right\} \quad (20)$$

در رابطه (۲۰) هنگامی s به سمت بی‌نهایت میل کند می‌توانیم آکولاد را به صورت زیر بنویسیم:

$$(1 + \epsilon)^{\frac{1}{m}} \rightarrow 0 \quad (21)$$

بر طبق بسط بینم نیوتن عبارت (۲۱) برابر با $(1 + \frac{\epsilon}{m})$ می‌شود. بامیل کردن s به سمت بی‌نهایت، K_c نیز به K تبدیل می‌گردد، در نتیجه رابطه (۲۰) به شکل زیر نوشته خواهد شد:

$$\left(\frac{1}{b-aK_c} \right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{c_n}{a_{n-m} K - b_{n-m}} \right)^{\frac{1}{m}} \left\{ s + \frac{1}{m c_n} \left[c_{n-1} - \frac{c_n (a_{n-m-1} K_c - b_{n-m-1})}{a_{n-m} K_c - b_{n-m}} \right] \right\} \quad (22)$$

چنانچه آن قسمت از شاخه که در حال رفتن به بی‌نهایت است مورد نظر باشد K از سمت مقادیر کوچک تر به سمت K_c میل می‌کند پس $\frac{1}{b-aK_c}$ مثبت است در نتیجه طبق قضیه دموآور [10] و فرض

$$\sigma = \frac{a_{n-m-1} K_c - b_{n-m-1}}{a_{n-m} K_c - b_{n-m}} - \frac{a_{n-1} K_c}{b_n}$$

زاویه های مجانبهای مربوط به آن قسمت از شاخه ها که رونده به بی نهایت هستند از رابطه زیر بدست می آیند:

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{m} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

و زاویه های مجانبهای مربوط به آن قسمت از شاخه ها که بازگردنده از بی نهایت هستند از رابطه زیر بدست می آیند:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{m} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

اثبات: فرض نمائید سیستم تعریف شده توسط رابطه (۲) دارای m شاخه گذرنده از بی نهایت باشد در این صورت رابطه (۱۲) در مورد این سیستم صادق است. اگر رابطه (۱۲) را بصورت زیر بنویسیم:

$$K_c = \frac{b_i}{a_i} = \frac{bc_i}{ac_i} = \frac{b}{a} \quad i = n, n-1, \dots, n-(m-1) \quad (14)$$

رابطه (۴) بصورت زیر درمی آید:

$$\Delta(s) = 1 - K \left\{ \frac{a [c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}]}{b [c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}]} \right\} * \left\{ \frac{1 + \frac{a_{n-m} s^{n-m} + a_{n-m-1} s^{n-m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{a [c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}]}}{1 + \frac{b_{n-m} s^{n-m} + b_{n-m-1} s^{n-m-1} + \dots + b_1 a + b_0}{b [c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}]}} \right\} = 0 \quad (15)$$

هرگاه از رابطه (۱۵) مقدار K را محاسبه نمائیم، رابطه ای به شکل زیر حاصل می شود:

$$K = \frac{b \left(1 + \frac{b_{n-m} s^{n-m} + b_{n-m-1} s^{n-m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{b [c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}]} \right)}{a \left(1 + \frac{a_{n-m} s^{n-m} + a_{n-m-1} s^{n-m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{a [c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}]} \right)} \quad (16)$$

$$b-aK = \quad (17)$$

$$\frac{(a_{n-m} K - b_{n-m}) s^{n-m} + (a_{n-m-1} K - b_{n-m-1}) s^{n-m-1} + \dots + (a_1 K - b_1) s + (a_0 K - b_0)}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_{n-(m-1)} s^{n-(m-1)}}$$

$$\sigma = \frac{\frac{a_{n-m-1}K_c - b_{n-m-1}}{a_{n-m}K_c - b_{n-m}} - \frac{a_{n-1}K_c}{b_n}}{m} \quad (27)$$

پس برطبق رابطه (۲۵) زاویه های جانبی مربوط به آن قسمت از شاخه ها که رونده به بی نهایت هستند از رابطه زیر بدست می آیند:

$$\theta_i = \frac{\gamma \pi i}{m} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (28)$$

همچنین برطبق رابطه (۲۷)، زاویه های جانبی مربوط به آن قسمت از شاخه ها که بازگردنده از بی نهایت هستند از رابطه

$$\theta_i = \frac{(\gamma i + 1)\pi}{m} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (29)$$

حاصل می شوند. همانطور که مشاهده می شود رابطه بدست آمده جهت محاسبه زوایای قسمت های بازگردنده از بی نهایت جانبها، تا حدودی به رابطه موجود در کتب و مقالات [5] - [2] جهت محاسبه زوایای جانبها در RL فیدبک منفی شباهت دارد. به همین ترتیب رابطه بدست آمده جهت محاسبه زوایای قسمت های رونده به بی نهایت جانبها، تا حدودی به رابطه موجود در کتب و مقالات [5] - [2] جهت محاسبه زوایای جانبها در RL فیدبک مثبت شباهت دارد.

برطبق روابط بدست آمده در بررسی قضایای ۱ و ۲ و باتوجه به تابع تبدیل حلقه این سیستم ها، تعداد شاخه های گذرنده از بی نهایت، زوایای جانبی مربوط به آن قسمت از شاخه ها که رونده به بی نهایت هستند، زاویه های جانبی مربوط به آن قسمت از شاخه ها که بازگردنده از بی نهایت هستند و محل تلاقی جانبها با محور حقیقی محاسبه می شوند.

۳ - مثال ها:

نتایج بدست آمده را برای دو مثال که در مرجع [۱] ارائه گشته اند، به نمایش می گذاریم.
مثال ۱: تابع تبدیل حلقه ای بصورت زیر می باشد:

$$G(s)H(s) = \frac{\gamma s^4 + \gamma s^3 + \epsilon s^2 + \lambda s + 1\gamma}{\gamma s^4 + \lambda s^3 + \epsilon s^2 + 1\gamma s - 1\epsilon}$$

$s = \sigma + j\omega$ روابط زیر از رابطه (۲۲) حاصل می شوند:

$$\left(\frac{1}{b-aK_c}\right)^{\frac{1}{m}} \sin \frac{\gamma \pi i}{m} = \left(\frac{c_n}{a_{n-m}K_c - b_{n-m}}\right)^{\frac{1}{m}} \omega \quad (23)$$

$$\left(\frac{1}{b-aK_c}\right)^{\frac{1}{m}} \cos \frac{\gamma \pi i}{m} = \left(\frac{c_n}{a_{n-m}K_c - b_{n-m}}\right)^{\frac{1}{m}} *$$

$$* \left\{ \sigma + \frac{1}{m c_n} \left[c_{n-1} - \frac{c_n (a_{n-m-1} K_c - b_{n-m-1})}{a_{n-m} K_c - b_{n-m}} \right] \right\} \quad (24)$$

از رابطه های (۲۲) و (۲۴) معادله زیر حاصل می شود:

$$\omega = \tan \frac{\gamma \pi i}{m} \left[\sigma - \left(\frac{a_{n-m-1} K_c - b_{n-m-1}}{a_{n-m} K_c - b_{n-m}} - \frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right] \quad (25)$$

چنانچه آن قسمت از شاخه که در حال بازگشت از بی نهایت است موردنظر باشد، $\frac{1}{b-aK_c}$ منفی است پس بر طبق قضیه دمو آور رابطه ای مشابه (۲۵) برای آن قسمت از شاخه که بازگردنده از بی نهایت است بدست می آید:

$$\omega = \tan \frac{(\gamma \pi + 1)i}{m} \left[\sigma - \left(\frac{a_{n-m-1} K_c - b_{n-m-1}}{a_{n-m} K_c - b_{n-m}} - \frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right] \quad (26)$$

معادلات (۲۵) و (۲۶) معادلات خطوط جانب مکان هستند.

برطبق روابط (۲۵) و (۲۶) در مکان بازای m شاخه گذرنده از بی نهایت، تعداد جانبها $2m$ است. این خطوط جانب یکدیگر را در نقطه زیر که روی محور حقیقی واقع است قطع می کنند:

$$\sigma = \frac{\frac{a_{n-m-1} K_c - b_{n-m-1}}{a_{n-m} K_c - b_{n-m}} - \frac{c_{n-1}}{c_n}}{m}$$

باتوجه به رابطه (۱۴)، محل تلاقی جانبی مکان برحسب ضرایب تابع تبدیل حلقه سیستم به شکل زیر حاصل می شود:

در این سیستم داریم:

$$K_c = \frac{b_r}{a_r} = \frac{2}{2} = \frac{b_r}{a_r} = \frac{9}{6} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{12}{8} \neq \frac{b_r}{a_r} = \frac{8}{4}$$

برطبق رابطه (۱۳) در این مثال چهارشاخه گذرنده از بی‌نهایت موجود است در نتیجه $m = 4$ می‌باشد و ۸ مجانب درمکان وجود دارد، ۴ عدد برای آن قسمت از شاخه‌ها که رونده به بی‌نهایت هستند و ۴ عدد برای آن قسمت از شاخه‌ها که بازگردنده از بی‌نهایت هستند.

پس برطبق رابطه (۱۳) در این مثال تنها یک شاخه گذرنده از بی‌نهایت موجود است. مشاهده می‌شود علیرغم مساوی بودن نسبت‌های $\frac{b_r}{a_r}$ و $\frac{b_1}{a_1}$ با $\frac{b_r}{a_r}$ بدلیل عدم تساوی $\frac{b_r}{a_r}$ با آنها تنها یک شاخه گذرنده از بی‌نهایت در این مکان موجود است. در نتیجه $m = 1$ بوده و دومجانب در مکان وجود دارد یکی برای آن قسمت از شاخه که رونده به بی‌نهایت است و یکی برای آن قسمت از شاخه که بازگردنده از بی‌نهایت است.

محل تلاقی مجانبها بامحور حقیقی با توجه به رابطه (۲۷) برابر است با:

$$\sigma = \frac{a_{r-1}K_c - b_{r-1}}{a_r K_c - b_r} = \frac{a_{r-1}K_c}{b_r} = \frac{-4(2/2)}{4(2)} = \frac{-1}{2}$$

محل تلاقی این مجانبها با محور حقیقی بر طبق رابطه (۲۷) بدست می‌آید:

زاویه‌های مجانب‌های مربوط به آن قسمت از شاخه‌ها که رونده به بی‌نهایت هستند برطبق رابطه (۲۸) برابرند با:

$$\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \pi, \theta_3 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sigma = \frac{a_{r-1}K_c - b_{r-1}}{a_r K_c - b_r} = \frac{a_{r-1}K_c}{b_r} = \frac{a_r K_c - b_r}{b_r} = \frac{6(2/2) - 9}{4(2) - 8} = -2$$

و با توجه به رابطه (۲۹) زوایای مجانب‌های مربوط به آن قسمت از شاخه‌ها که بازگردنده از بی‌نهایت هستند برابرند با:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = \frac{5\pi}{4}, \theta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

و با توجه به رابطه (۲۸)، زاویه مجانب مربوط به آن قسمت از شاخه که رونده به بی‌نهایت است برابر $\theta_0 = 0$ است و بر طبق رابطه (۲۹) زاویه مجانب مربوط به آن قسمت از شاخه که بازگردنده از بی‌نهایت است برابر $\theta_0 = \pi$ می‌باشد.

۴ - پاسخ زمانی سیستم‌های فیدبک مثبت واحد دارای تابع تبدیل حلقه معمول

مثال ۲: تابع تبدیل حلقه سیستمی بصورت زیر می‌باشد:

تابع تبدیل یک سیستم فیدبک مثبت واحد که تابع تبدیل حلقه آن بوسیله رابطه (۳) مشخص شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$G(s)H(s) = \frac{2s^2 + 4s^2 + 6s^2 + 8s + 12}{3s^2 + 6s^2 + 9s^2 + 12s - 16}$$

$$T(s) = \frac{K a_n s^n + K a_{n-1} s^{n-1} + \dots + K a_1 s + K a_0}{(b_n - K a_n) s^n + (b_{n-1} - K a_{n-1}) s^{n-1} + \dots + (b_1 - K a_1) s + (b_0 - K a_0)}$$

رابطه زیر بین ضرایب تابع تبدیل حلقه این سیستم برقرار است:

(۳۰)
اگر در رابطه (۳۰) بهره سیستم (K) به سمت مقدار بحرانی خود میل کند، با توجه به رابطه (۵) خواهیم داشت:

$$K_c = \frac{b_r}{a_r} = \frac{2}{2} = \frac{b_r}{a_r} = \frac{6}{4} = \frac{b_r}{a_r} = \frac{9}{6} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{12}{8} \neq \frac{b_0}{a_0} = \frac{-16}{12}$$

و بر حسب K به عنوان دو نمودار مختلف رسم می‌شوند.

در سیستم های حلقه بسته با فیدبک منفی، هرگاه اندازه یک قطب حلقه بسته بی‌نهایت شود قطعاً بهره متناظر با این قطب نیز بی‌نهایت است. پس چنانچه نمودار RL مربوط به یک سیستم شامل n شاخه باشد که $(n-m)$ عدد (تعداد صفرهای تابع تبدیل حلقه سیستم است) از آنها رونده به بی‌نهایت باشند، آنگاه نمودار اندازه بهره سیستم نیز دارای n شاخه است که m عدد از آنها رونده به بی‌نهایت نیستند و بازای بی‌نهایت شدن K به سمت اندازه یک صفر تابع تبدیل حلقه سیستم میل می‌کنند. در عین حال $(n-m)$ عدد دیگر که رونده به بی‌نهایت می‌باشند بازای بی‌نهایت شدن K به سمت بی‌نهایت می‌روند و هیچگونه مجانب قائم نیز برای مکان اینگونه سیستم‌ها تعریف نمی‌شود. اما در سیستم‌های مطروحه در این مقاله که توسط رابطه (۳) معرفی شدند و بر طبق رابطه (۱۲) دارای m شاخه گذرنده از بی‌نهایت هستند، بی‌نهایت شدن اندازه یک قطب حلقه بسته به معنای بی‌نهایت شدن بهره سیستم نیست بلکه m عدد قطب حلقه بسته باندازه بی‌نهایت در مکان موجود است که تمام آنها متناظر با بهره بحرانی می‌باشند. پس در این نمودار بازای K_c یک مجانب قائم تعریف می‌شود که این m شاخه در امتداد این مجانب قائم به بی‌نهایت رفته و سپس در امتداد آن از بی‌نهایت باز می‌گردند. بازای K مساوی بی‌نهایت، n شاخه مکان هر یک به سمت اندازه یک صفر تابع تبدیل حلقه سیستم میل می‌کنند. پس تفاوت اصلی نمودار اندازه بهره سیستم‌های مطروحه در این مقاله با نمودار اندازه بهره سیستم‌های دیگر در وجود مجانب قائم در نمودار سیستم‌های ارائه شده در این مقاله است.

در نمودار زاویه بهره هنگامی که بهره سیستم بی‌نهایت می‌شود m شاخه مکان که رونده به بی‌نهایت نیستند به سمت زاویه یک صفر تابع تبدیل حلقه سیستم میل می‌کنند و $(n-m)$ شاخه دیگر که رونده به بی‌نهایت هستند، به سمت زاویه های مجانبهای

$$T_c(s) = \frac{a_n b_n s^n + a_{n-1} b_n s^{n-1} + \dots + a_1 b_n s + a_0 b_n}{(a_n b_{n-m} - b_n a_{n-m}) s^{n-m} + \dots + (a_n b_1 - b_n a_1) s + (a_n b_0 - b_n a_0)} \quad (31)$$

باتقسیم صورت بر مخرج، رابطه بالا بصورت زیر در می‌آید:

$$T_c(s) = A_m s^m + A_{m-1} s^{m-1} + \dots + A_1 s + A_0 + \frac{B_{n-(m+1)} s^{n-(m+1)} + \dots + B_1 s + B_0}{(a_n b_{n-m} - b_n a_{n-m}) s^{n-m} + \dots + (a_n b_1 - b_n a_1) s + (a_n b_0 - b_n a_0)} \quad (32)$$

بازای ورودی‌های مختلف عبارات $A_m s^m, A_{m-1} s^{m-1}, \dots, A_1 s, A_0$ قادر به تولید یک سری ضربه و مشتقات ضربه در مبداء و در حوزه زمان می‌باشند که موجب بوجود آمدن یک حالت ناپایداری برای سیستم در لحظه صفر می‌شوند. همچنین تابع پله‌ای نیز در حوزه زمان ایجاد می‌کنند که موجب افزایش بهره dc سیستم می‌شود.

۵ - بررسی سیستم های فیدبک مثبت با تابع تبدیل حلقه معمول بوسیله نمودارهای بهره

نمودارهای بهره دو نوع نمودار هستند که ارتباط آنها با منحنی مکان هندسی ریشه‌ها درست مشابه ارتباط نمودار بُودی با دیاگرام نیکویست است. این دو نمودار در سال ۱۹۹۱ معرفی شده‌اند [6].

در این دو نمودار محور افقی نمایش دهنده اندازه بهره سیستم (K) در مقیاس لگاریتمی می‌باشد.

در نمودار اول محور قائم نمایش دهنده اندازه قطب‌های سیستم حلقه بسته در مقیاس لگاریتمی است و به آن نمودار اندازه بهره گویند. در نمودار دوم محور قائم نشانگر زاویه قطب‌های سیستم حلقه بسته می‌باشد و به آن نمودار زاویه بهره گویند. همان طور که می‌دانیم هر نقطه از نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، مشخص کننده یک قطب سیستم حلقه بسته متناظر با یک بهره خاص می‌باشد. در این دو نمودار هر یک از این نقاط بوسیله یک اندازه و یک زاویه مشخص شده

تعریف شده برای RL میل می‌نمایند. اما در سیستم‌های مطروحه در این مقاله که توسط رابطه (۳) معرفی شدند و برطبق رابطه (۱۳) دارای m شاخه گذرنده از بی‌نهایت هستند. بازای بی‌نهایت شدن بهره برای سیستم مجانبی تعریف نمی‌شود و با میل کردن K به سمت بی‌نهایت n شاخه مکان به سمت زاویه‌های صفرهای تابع تبدیل حلقه سیستم میل می‌کنند. بازای بهره بحرانی، هریک از m شاخه گذرنده از بی‌نهایت بازایه ای که توسط رابطه (۲۸) تعریف می‌شود به سمت K_c رفته و با زاویه‌ای که توسط رابطه (۲۹) تعریف می‌شود از K_c باز می‌گردند.

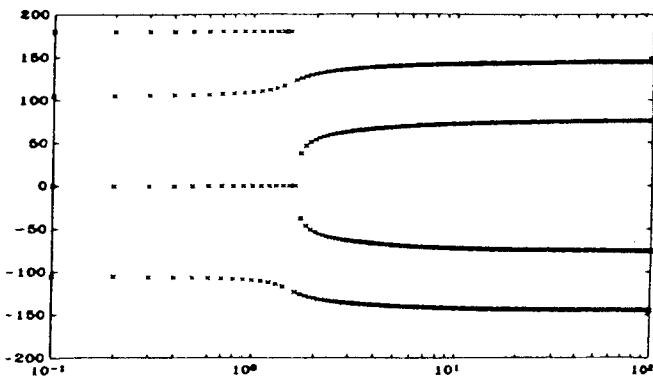
عدم تساوی زاویه‌های قسمت‌های رونده به بی‌نهایت و بازگردنده از بی‌نهایت شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت، موجب پدید آمدن عدم پیوستگی در نمودار زاویه بهره می‌شود.

پس نکته حائز اهمیت در نمودار زاویه بهره اینگونه سیستم‌ها عدم پیوستگی در مورد شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت است.

اشکال ۱ و ۳ به ترتیب نمودار اندازه بهره برای سیستم‌های ارائه شده در مثالهای ۱ و ۲ می‌باشند و اشکال ۲ و ۴ نمودار زاویه بهره برای همان سیستم‌ها را نشان می‌دهند.

می‌توان سیستم‌های ارائه شده در این مقاله را از دید سایر نمودارهایی که با تغییر مختصری در RL حاصل شده اند نیز مورد مطالعه قرارداد [9]-[7].

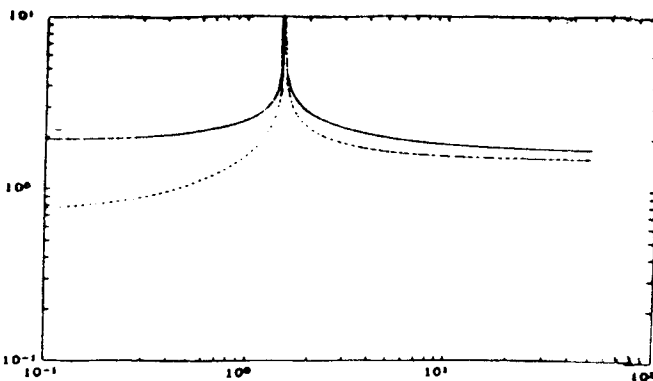
PHASE



GAIN
شکل (۲): نمودار زاویه بهره مثال ۱

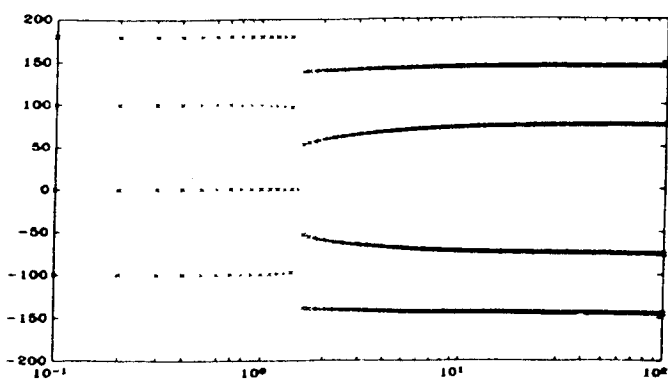
به عنوان مثال سیستم‌های مطروحه در این مقاله را توسط نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌ها مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این نمودار در سال ۱۹۹۴ ارائه گشته است [9].

MAGNITUDE



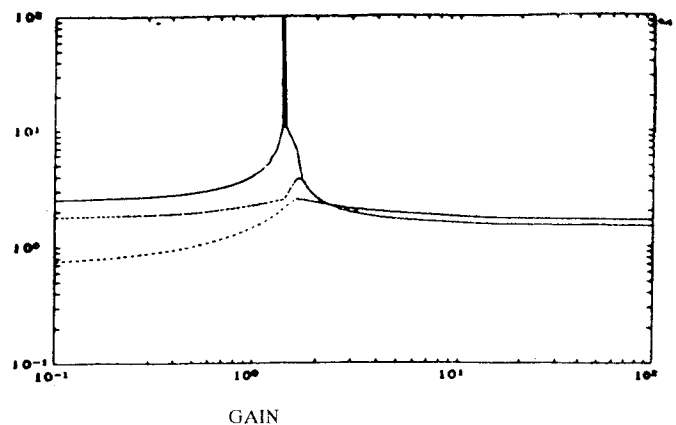
GAIN
شکل (۳): نمودار اندازه بهره مثال ۲

PHASE



GAIN
شکل (۴): نمودار زاویه بهره مثال ۲

MAGNITUDE



شکل (۱): نمودار اندازه بهره مثال ۱

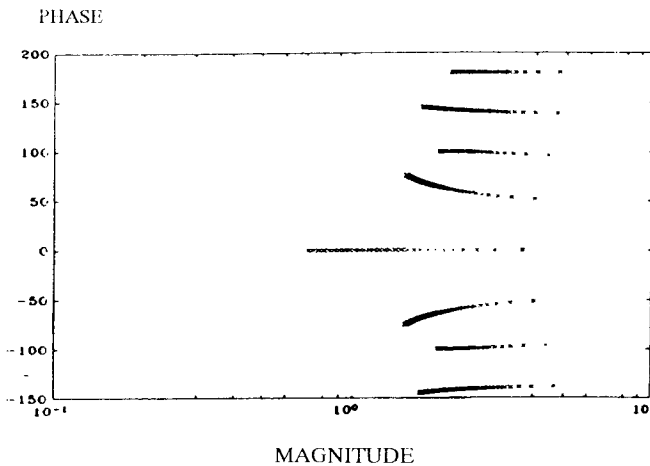
در این نمودار از این نکته استفاده شده است که هرگاه s یک عدد مختلط باشد تابع لگاریتم به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Log}(s) = \text{Log} |s| + j \text{ang}(s) \quad (32)$$

پس هرگاه s قطب تابع تبدیل حلقه بسته یک سیستم باشد، لگاریتم آن برطبق رابطه (۳۲) دارای یک قسمت حقیقی باندازه $\text{Log}(s)$ و یک قسمت موهومی باندازه $\text{ang}(s)$ می‌باشد. اگر این قطبها را در صفحه‌ای که محور افقی آن اندازه s در مقیاس لگاریتمی و محور قائم آن زاویه s باشد، رسم نمائیم، نمودار حاصل را نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌ها گویند.

اگر سیستمی دارای تابع تبدیل حلقه تعریف شده به وسیله رابطه (۳) باشد و بر طبق رابطه (۱۳) دارای m شاخه گذرنده از بی‌نهایت باشد، m شاخه از شاخه‌های موجود در نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌ها در این سیستم بازای یک زاویه خاص که توسط رابطه (۲۸) تعریف شده است به سمت بی‌نهایت رفته و بازای یک زاویه دیگر که توسط رابطه (۲۹) تعریف شده است از بی‌نهایت باز می‌گردند.

اشکال ۵ و ۶ به ترتیب نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌ها برای مثال‌های ۱ و ۲ ارائه شده در این مقاله را نشان می‌دهند.

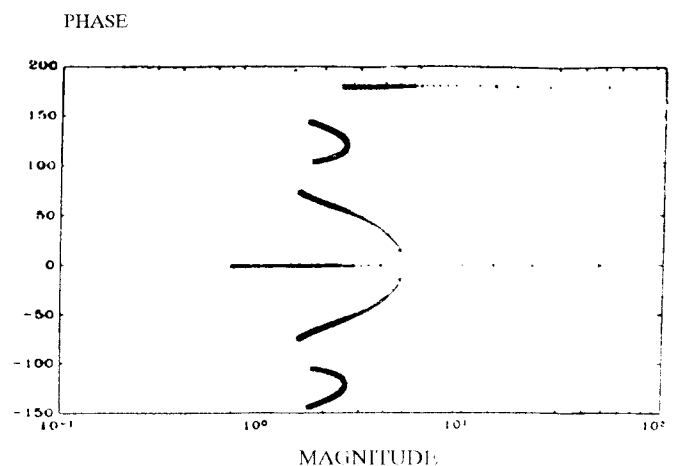


شکل (۶): نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌های مثال ۲

۶ - نتیجه گیری

در این مقاله خواص شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت و رابطه آنها با ضرائب تابع تبدیل حلقه سیستم را در قالب ۲ قضیه ارائه و اثبات نمودیم. در قضیه اول، طریقه محاسبه تعداد شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت موجود در مکان به کمک ضرایب تابع تبدیل حلقه سیستم اثبات شد. قضیه دوم به تعیین معادلات خطوط مجانب برای شاخه‌های گذرنده از بی‌نهایت اختصاص داشت. زوایای مجانبهای موجود در مکان و محل تلاقی آنها با یکدیگر روی محور اعداد حقیقی را نیز قضیه دوم به ما ارائه داد.

اینگونه خاص از سیستم‌های فیدبک مثبت از دیدگاه نمودار بهره و زاویه و نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌ها مورد مطالعه قرار گرفتند. هم چنین نشان دادیم که پاسخ زمانی اینگونه سیستم‌ها بازای بهره بحرانی دارای تابع ضربه و مشتقات آن در مبداء می‌باشد که این خود موید ناپایداری این گونه سیستم‌ها به ازاء بهره بحرانی است. از نکاتی که در این زمینه نیاز به بررسی و تحقیق دارد می‌توان به بررسی عملکرد دینامیکی سیستم در بهره بحرانی اشاره نمود که می‌تواند اطلاعات مفیدی در مورد دینامیک سیستم‌ها در این حالت بدست دهد.



شکل (۵): نمودار لگاریتمی مکان هندسی ریشه‌های مثال ۱

مراجع

- ۱ - ع . محمدزاده عیدگاهی و م . قوام زاده ، شاخه‌های گذرنده از بی نهایت در مکان هندسی ریشه ها ، نشریه دانشکده فنی ، شماره ۵۷ ، صفحه ۹-۱۵ ، خرداد ۱۳۷۵ .
- 2 - B. C. Kuo, Automatic Control Systems. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1991.
- 3 - K. Ogata, Modern Control Engineering. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1990.
- 4 - J. J. D'Azzo and C. H. Houpis, Linear Control Systems Analysis and Design, NY: McGraw-Hill, 1981.
- 5 - C. S. Lorens and R. C. Titsworth, "Properties of root locus asymptotes, "IRE Trans Automatic Control, AC-5, PP. 71-72 , Jan. 1960.
- 6 - T. R. Kurfess and M. L. Nagurka, "Understanding the root locus using gain plots," IEEE Control Systems Magazine, Vol. 11, PP. 37-40, August 1991.
- 7 - M. L. Nagurka and T. R. Kurfess, " Gain and phase margins of SISO systems from modified root locus plots," IEEE Control Systems Magazine, Vol. 12, PP. 123-127, June 1992.
- 8 - J. Gribble, "Modified root locus for SISO systems with time delay," IEEE Control Systems Magazine, Vol. 13, PP. 54-56, Feb. 1993.
- 9 - J. Glaria, R. Rojas and M. Salgado, "Logarithmic root loci for continuous time loops," IEEE Control Systems Magazine, Vol.14, PP. 47-52, April 1994.
- 10 - R. V. Churchill, J. W. Brown, and R. F. Verhey, Complex Variables and Applications, NY: McGraw-Hill, 1974.