تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت

در مکانیک مایعات

نوشته‌ی

دکتر مهندس فیروزتربیت

استاد دانشکدهٔ فنی

مقدمه

با پیدایش علم فضانوردی در قرن حاضر بشر به‌شگرف‌ترین و درخشانترین موفقیت خود که زمانی برای وی بعنوان رویا تلقی میگردید نائل آمده است . بتدریج که آرزوهای دیرینه‌ی انسان در این مورد جامه‌ی عمل بخود می‌پوشد هرروز دریچه‌ی تحقیقاتی نوینی‌مقابل چشمان‌دانشمندان ومهندسان نسل کنونی گشوده میشود .

توسعه‌ی علم تسلط برفضا همواره با حل یکعده مسئله های پیچیده که باجمیع رشته های علم‌وفن ارتباط دارد مواجه بوده است . پیدایش فکر مسافرت به‌فضا همزمان با اختراع موتورهای واکنشی آغاز شده ودرسیر تکاملی آن دوموفقیت زیرین :

۱- فرستادن راکت‌های سنگین به‌مسافت‌های دور

۲- دسترسی به‌منبع های انرژی جدیدتر مانند انرژی هسته‌ای

که نصیب بشر گردیده دخالت تام داشته است .

حرکت یک راکت با ماده‌ی سوخت مایع در فضای جو از نقطه‌ی نظر مکانیک بمنزله‌ی حرکت یک دستگاه با جرم متغیر محسوب میشود . در مکانیک کلاسیک برای تعیین حرکت یک نقطه‌ی مادی بجرم ثابت از قضیه‌ی مقدار حرکت استفاده میشود . نظربا‌ینکه رشته‌ی مکانیک مایعات دنباله‌ی‌مکانیک کلاسیک میباشد بنابراین جایزاست که دراین‌رشته قضیه‌ی مقدارحرکت بنحوی تعمیم داده شود که‌علاوه برحل مسئله های دشوارتر هیدرولیک صنعتی پاسخگوی احتیاج‌هائی باشد که در نتیجه‌ی توسعه‌ی علم فضا پیمائی وحرکت راکتها بوجود آمده است .

پایه‌های فصل دینامیک در مکانیک مایعات بر روی معادله‌های اولر بنا نهاده شده است نقش عمده‌ی معادله‌های اولر که بصورت دیفرانسیل میباشند وقتی آشکار میشود که ازانتگرال آنهافورمول برنولی، که فی حدذاته کلید حل مسئله های عمومی هیدرولیک صنعتی میباشد، بدست میآید.

یکی ازمبحث‌های فصل دینامیک بررسی ومطالعه‌ی «جریان با انرژی ثابت[۱]» است.

خاصیت مهم این جریان اینست که اختلاف فشار بین هردو نقطه‌ی غیرمشخص آن با جرم مخصوص مایع و اختلاف مربع سرعتهای دو نقطه‌ی مزبور متناسب است. براساس این طرز تفکر امکان تعیین فشار درمحل تلاقی خط جریان با جدارصلب (که «نقطه‌ی توقف[۲]» محسوب میگردد) آشکار میشود.

این فشار معرف عمل مایع برروی جدار بوده وبه «فشار دینامیکی[۳]» موسوم میباشد و مقدار آن برابراست با حاصلضرب جرم مخصوص مایع در مربع سرعت عادی جریان.

در مرحله‌ی بعدی بدست آوردن نیروی عمل مایع برروی سطح ظاهری کلیه‌ی جدارجسم صلب کار ساده‌ای بیش نبوده و بطریقه‌ی تحلیلی (تعیین انتگرال) و یا طریقه‌ی ترسیمی (استعمال پلانیمتر) امکان پذیر میگردد.

مطلب شایان توجه اینست که علاوه برطولانی بودن روش تحلیلی و یا ترسیمی اصولاً دامنه‌ی استعمال فورمول برنولی محدود بوده ودرهرصورت فرض اصلی وجود «مایع کامل[٤]» میباشد.

با روش استفاده از قضیه‌ی مقدار حرکت علاوه بر اینکه تعیین عمل جریان بر روی جدار صلب سهل الوصول می‌باشد اصولاً لزومی به قائل شدن محدودیت هائی از قبیل «فرضیه‌ی مایع کامل» ضرورت پیدا نمی‌نماید.

متجاوز از دویست سال قبل اولر موفق گردید بکمک قضیه‌ی مقدار حرکت فورمول کلی جریان در تلمبه‌ها وتوربین ها را بنیان گذاری نماید. علاوه بر مبحث ماشینهای آبی از قضیه‌ی مقدار حرکت اولر درحل مسئله های عمده‌ی هیدرولیک صنعتی دائماً استفاده میشود.

نکته‌ی اساسی که بایستی آن را همیشه درمد نظر داشت اینست که چه در ماشینهای آبی چه در جریان با انرژی ثابت وچه در مورد سایر مسئله های عادی که در هیدرولیک صنعتی بررسی میگردد فرضیه‌ی اصلی که در طرح مسئله ذکر میشود وجود «جریان دائم[٥]» میباشد. اگر موردهائی پیش آید که این فرضیه‌ی اصلی دیگر صدق ننماید بایستی قاعدتاً قضیه‌ی مقدار حرکت تعمیم داده شده و با فورمول جامعتری بیان گردد.

هدف نوشته‌ی کنونی تحت عنوان «تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت» مشخص نمودن همین فررمول

---

1) Ecoulement à energie constant

2- Point d'arrêt

3) Pression dynamique

4) Fluide parfait

5) Ecoulement permanant

جامع میباشد بنحوی که جوابگوی احتیاج های کنونی بوده ومنظورهائی را که در موردهای مختلف مذکور درفوق به‌آنها اشاره گردید تأمین نماید.

کلیات درمورد قضیه‌ی مقدار حرکت:

برای روشن شدن ذهن خواننده فورمول قضیه‌ی مقدارحرکت درمورد یک دستگاه نقطه‌های مادی بنحوی که درمکانیک کلاسیک بیان شده است ذکر میشود. سپس به‌مسئله‌ی کلی حرکت راکت‌ها بطور ضمنی اشاره شده وبا ذکرمثالی لزوم‌تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت روشن گردیده واهمیت موضوع درک‌میشود.

هرگاه یک دستگاه متحرک حاوی نقطه های مادی به جرمهای متفاوت m و سرعتهای مختلف V بوده و منتجه‌ی کلیه‌ی نیروهای مؤثر براین دستگاه اعم از نیروهای داخلی وخارجی برابر ΣF باشد قضیه‌ی مقدار حرکت در مورد این دستگاه طبق فرمول زیرین خلاصه میشود:

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}\Sigma(mV)$$

کمیت (mV) دراصطلاح مکانیک موسوم است به‌مقدارحرکت. منتجه‌ی نیروهای داخلی بعلت وجود قانون عمل و عکس العمل برابر با صفر میباشد. هرگاه نیرو های خارجی با F_e نمایش داده شده ونقطهٔ های مختلفه بوسیله‌ی i (i از ۱ تا n تغییر می‌کند) مشخص شوند. معادله‌ی مقدار حرکت تحت فورمول وعبارت زیرین خلاصه میشود:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(Fe)_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=n}(m_iV_i)$$

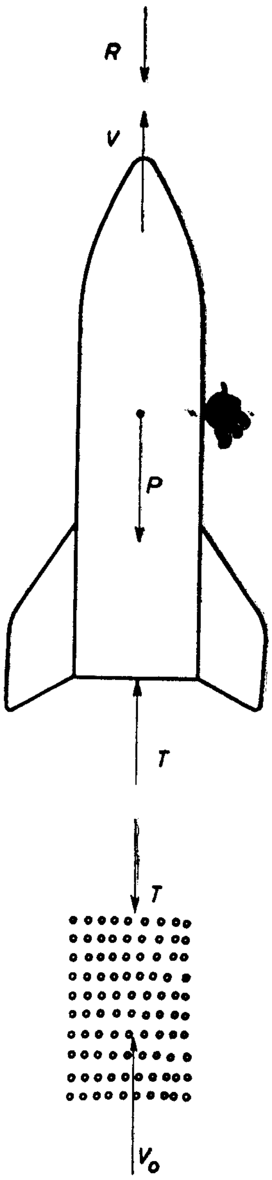
مشتق‌مجموع هندسی‌مقدارحرکت‌های نقطه‌های مادی یک‌دستگاه نسبت به‌زمان بامجموع‌هندسی نیروهای خارجی که براین دستگاه تأثیر می‌نمایند معادل میباشد. درمورد حرکت جسم صلب معادله‌ی‌فوق بوسیله‌ی مرکز جرم بیان میشود.

بنابراین اگر منتجه‌ی کلیه‌ی نیروهای خارجی مؤثر نسبت به مرکز جرم نقطه های مادی ΣF بوده ومجموع جرمها $M = \Sigma m_i$ وبعلاوه شتاب مرکزجرم $\left(\frac{dV}{dt}\right)_G$ باشد فورمول‌قضیه‌ی مقدارحرکت‌درمورد حرکت جسم صلب عبارت میشود از:

$$\Sigma F = M\left(\frac{dV}{dt}\right)_G$$

شکل (۱) راکت فضا پیمائی را نمایش میدهد که جرم کلی آن (با درنظرگرفتن ماده‌ی سوخت) m وسرعت اولیه‌ی آن V فرض میشود بنابراین مقدار حرکت اولیه‌ی دستگاه عبارتست از:

$$(mV) = \text{مقدار حرکت اولیه‌ی دستگاه} \qquad (I)$$



شکل ۱

در لحظه‌ی Δt ی بعد ، جرم راکت بطور کلی $m+\Delta m$ و سرعت آن $V+\Delta V$ خواهد بود .

Δm عبارت از جرم گازیست که از راکت خارج شده بنابراین علامت آن ذاتاً منفی می‌باشد .

در اثنای زمان Δt گاز خارج شده با سرعت مطلق $V_\circ$ در امتداد سرعت راکت حرکت خواهد نمود .

بنابراین سرعت گاز نسبت به راکت $(V-V_\circ)$ و جرم آن $(-\Delta m)$ است .

نظر باینکه علامت Δm ذاتاً منفی است لذا $-\Delta m$ مثبت میباشد .

مقدار حرکت ثانوی دستگاه عبارت خواهد بود از مجموع مقدار حرکت راکت ومقدار حرکت گاز خارج شده یعنی:

$$\text{مقدار حرکت ثانوی دستگاه} = (m+\Delta m)(V+\Delta V) + (-\Delta m)(V-V_\circ) \qquad \text{(II)}$$

طبق «اصل بقاء مقدار حرکت[1]» دومقدار I و II درصورتیکه حرکت فضا پیما بدون تأثیر نیروهای خارجی صورت گیرد با یکدیگر برابر خواهند بود .

اختلاف مقدارحرکت ثانوی‌واولیه‌ی دستگاه یعنی $\Delta(mV)$:

$$\Delta(mV) = [(m+\Delta m)(V+\Delta V) + (-\Delta m)(V-V_\circ)] - [mV] = m\Delta V + V_\circ \Delta m + \Delta m \Delta V$$

معلول‌وجود نیروهای‌خارجی‌مانند وزن‌راکت P ومقاومت‌هوا R می‌باشد واگر چنانچه مجموع هندسی این نیروهای خارجی ΣF باشد مقدار ΣF برابر خواهد بود با حد خارج قسمت $\Delta(mV)$ به‌اختلاف‌زمان (Δt) موقعیکه Δt بسمت صفرمیل‌نماید . نظر باینکه حدمزبورمشتق مقدارحرکت برحسب زمان است در نتیجه معادله‌ی زیرین بدست میآید:

$$\Sigma F = m\frac{dV}{dt} + V_\circ \frac{dm}{dt}$$

مطلب جالب توجه اینست که $V_\circ \dfrac{dm}{dt}$ که‌درشکل بوسیله‌ی حامل T نمایش داده شده نیروی عکس العمل جهش گاز ویا نیروی رانش وسیله‌ی نقلیه میباشد که برای دستگاه (مجموع راکت وگازخارج

---

1) Loi de conservation de quantité de mouvement

شده) درحکم نیروی داخلی است. اگر چنانچه راکت بتنهائی در نظر گرفته شود. نیروی رانش T درحکم نیروهای خارجی است و اگر $\Sigma F = T - (R+P)$ باشد قضیه‌ی مقدارحرکت را میتوان تحت فورمول زیرین خلاصه نمود:

$$[T-(R+P)] = m\frac{dV}{dt}$$

بطوریکه ملاحظه میشود این فورمول با فورمول کلی که سابقاً درمورد جسم صلب نسبت به‌مرکز جرم نوشته شد تفاوتی ندارد.

در مبحث آتیه بیان عمومی تعمیم قضیه‌ی مقدارحرکت تشریح خواهد گردید و سپس معادله‌ی حرکت راکت بعنوان مثال ازآن نتیجه گیری خواهد شد.

بی‌مناسبت‌نیست دراینجا جهت مزید اطلاع توضیح داده شود که‌طرزاستدلال فوق‌براساس اصل‌بقاء مقدار حرکت عمومیت داشته و منحصر به مکانیک کلاسیک نیوتونی نمی‌باشد بلکه در مکانیک «نسبیت انیشتین[1]» نیزبادرنظر گرفتن‌سرعت‌نور (C) ومنظورنمودن m_0 جرم‌درحال سکون‌بعوض‌جرم m میتوان کمیت مقدار حرکت مذکور درفوق را با $\frac{m_0 V}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{C}\right)^2}}$ جانشین نمود. بدینطریق معادله‌ی راکت بوسیله‌ی اصل بقاء مقدارحرکت درمکانیک‌نسبیت انیشتین حاصل میگردد ودرصورتیکه C سرعت نوربسمت‌بینهایت میل کند فورمول با نتیجه‌ی حاصل از مکانیک کلاسیک منطبق میباشد.

بیان عمومی قضیه‌ی مقدارحرکت:

همانطورکه فوقاً ذکرگردید قضیه‌ی مقدار حرکت درحل مسئله های مکانیک مایعات نقش‌فوق‌العاده مؤثری دارد.

یکی‌ازمشخصه های فیزیکی حرکت‌مایعات «بده جریان[2] (Q)» می‌باشد. هرگاه وزن‌مخصوص مایع γ وشتاب ثقل g باشد مشخصه‌ی فیزیکی فوق‌را میتوان بوسیله‌ی کمیت $(\frac{\gamma}{g}Q)$ «بده‌جرمی جریان[3]» معرفی نمود. یکی از جالب‌توجه‌ترین طرز نمایش قضیه‌ی مقدار حرکت بمنظور استفاده ازآن درمکانیک مایعات باجانشین ساختن $\frac{\gamma}{g}Q$ بده جرمی جریان بعوض جرم m آشکار میگردد.

علت این امراینست که $(\frac{\gamma}{g}\overrightarrow{QV})$ هم بعد نیرو بوده و کمیت‌حاملی‌میباشد. بکمک‌ترکیب‌حامل مقدارحرکت با سایر نیروهای مؤثر حل یک مسئله‌ی دینامیکی مایع منجر به‌حل مسئله‌ی‌استاتیکی‌میشود. قدم اول در رسیدن به‌هدف مزبوراینست که یک «حجم مشخص[4]» مناسب انتخاب شود.

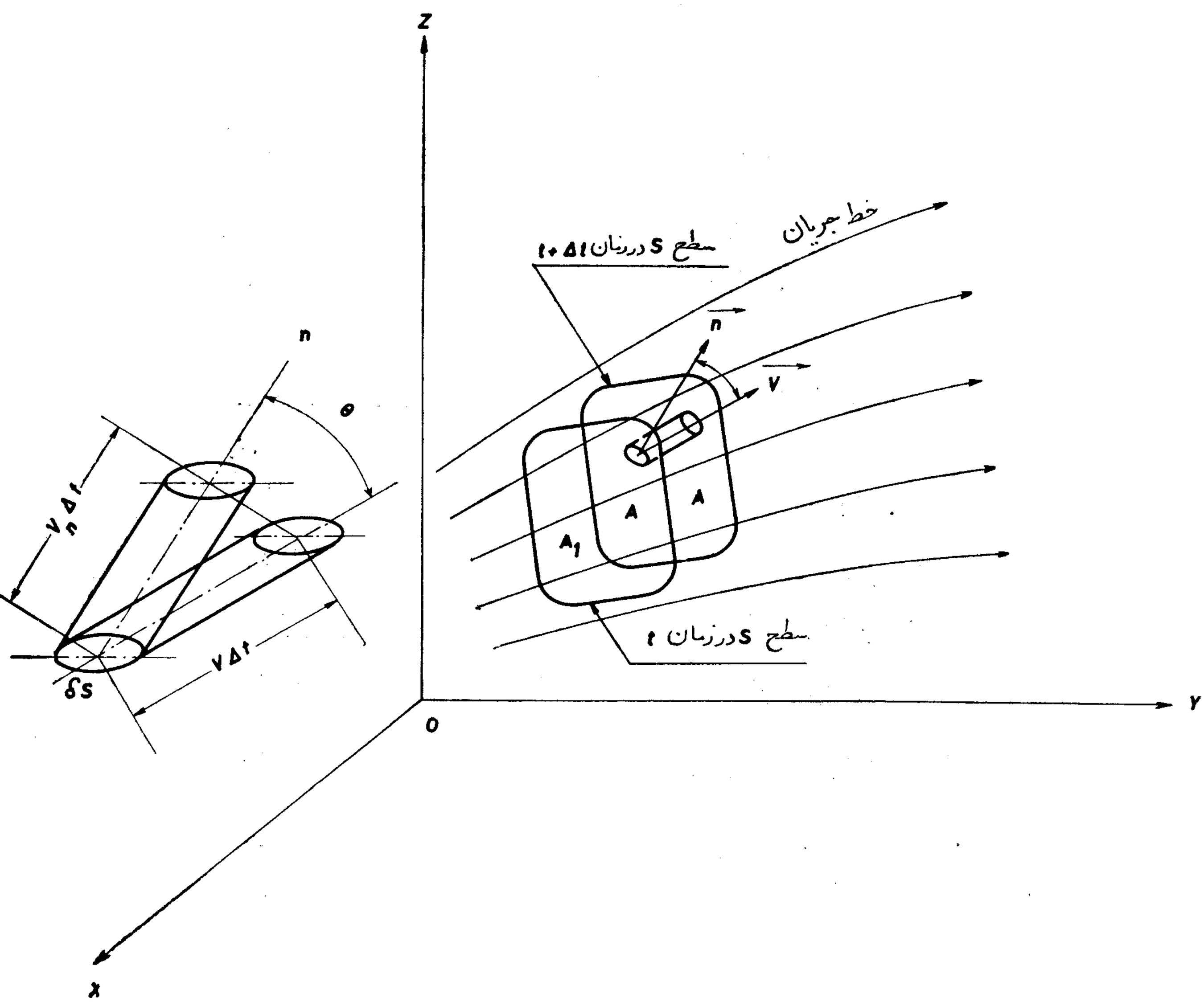
1) Mecanique relativiste
2) Debit
3) Debit en masse
4) Volume caracteristique

جسم‌های صلبی که درون مایع متحرك غوطه‌ور بوده ویا آن‌را احاطه مینمایند در نحوه‌ی هدایت مایع نقش مؤثری دارند . با توجه به‌شکل ظاهری اینگونه جدارهای صلب که با جریان در حال تماس میباشند میتوان‌حجم مشخص مناسبی‌تعریف نمود نحوه‌ی انتخاب این حجم درتعیین نیروهای مجهول‌اهمیت بسزائی دارد .

قدم ثانی عبارتست ازبیان قضیه‌ی مقدار حرکت با عبارت کلی زیرین:

مشتق مجموع هندسی مقدارحرکت ذره‌های مایع داخل حجم مشخص برحسب زمان برابر است با مجموع هندسی نیروهای خارجی‌که براین حجم مشخص تأثیرمینمایند.

در (شکل ۲) حجم مایعی که در لحظه‌ی t از دوقسمت A و A_1 تشکیل شده وبه‌سطح S محدود میشود بعنوان حجم مشخص انتخاب میشود .



شکل ۲

روش اصولی برای تعیین مشتق مزبور بقرار زیر است:

۱- ابتدا وضع حجم مشخص مذکور در فوق درلحظه‌ی $t+\Delta t$ در نظر گرفته میشود. بطوریکه در (شکل ۲) ملاحظه میشود این حجم از دوقسمت A و $A_۲$ که به‌سطح S' محدود میشود تشکیل میگردد (حجم A برای هردو وضع حجم مشخص درلحظه‌های t و $t+\Delta t$ مشترك است).

۲- مقدار حرکت ذره‌های سایع درحجم مشخص مزبور درلحظه‌های t و $t+\Delta t$ محاسبه میگردد. خارج قسمت اختلاف دومقدار حرکت مزبوربه‌زمان Δt وقتیکه Δt بسمت صفر میل نماید عبارتست ازمشتق مقدار حرکت.

برای اجرای منظورفوق یک ذره‌ی سایع داخل حجم مشخص به‌جرم δm وبه‌حجم δv درنظر گرفته میشود. نظربا اینکه جرم مخصوص سایع ρ وسرعت آن V است لذا مقدار حرکت ذره‌ی مزبور:

$\delta m V=\rho\delta v V$ خواهد بود.

اختلاف مقدارحرکت ذره‌های سایع داخل حجم مشخص بین دولحظه‌ی t و $t+\Delta t$ عبارتست از:

$$\text{اختلاف‌مقدارحرکت‌ذره‌های سایع بین دولحظه}=\left(\Sigma_A \rho\delta v V+\Sigma_{A_۲}\rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\Sigma_A \rho\delta v V+\Sigma_{A_۱}\rho\delta v V\right)_t$$

اختلاف مقدار حرکت فوق را میتوان بصورت زیرین نوشت:

$$\left[\left(\Sigma_A \rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\Sigma_A \rho\delta v V\right)_t\right]+\left[\left(\Sigma_{A_۲}\rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\Sigma_{A_۱}\rho\delta v V\right)_t\right]$$

حد خارج قسمت مقدار فوق را به‌زمان Δt موقعیکه Δt بسمت صفر میل میکند میتوان درفورمول زیرین خلاصه نمود.

$$\lim_{\Delta t\to ۰}\left\{\underbrace{\frac{\left(\Sigma_A \rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\Sigma_A \rho\delta v V\right)_t}{\Delta t}}_{\text{I}}+\underbrace{\frac{\left(\Sigma_{A_۲}\rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\Sigma_{A_۱}\rho\delta v V\right)_t}{\Delta t}}_{\text{II}}\right\}$$

برای تعیین حد عبارت فوق کافیست حدهای دوقسمت تشکیل دهنده‌ی آن بطور جداگانه تعیین‌شوند.

حد قسمت I :

$$\frac{\left(\Sigma_A \rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\Sigma_A \rho\delta v V\right)_t}{\Delta t}$$

صورت کسر فوق عبارتست‌از تغییر مقدار حرکت ذره‌های داخل‌حجم مشترك A بین دولحظه‌ی t و $t+\Delta t$:

هرگاه Δt بسمت صفر میل نماید حجم مشترك A بسمت حجم مشخص میل نموده ومقدارحدمزبور عبارت خواهد شد از:

مشتق جزئی مجموع هندسی مقدارحرکت‌ذره‌های داخل حجم مشخص ونظربا اینکه‌جمیع نقطه‌های

داخل حجم مشخص دراین محاسبه منظور میشوند لذا نتیجه منجر میشود به‌تعیین یک‌انتگرال مرتبه‌ی‌سوم درون حجم مشخص یعنی :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\left(\sum_A \rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\sum_A \rho\delta v V\right)_t}{\Delta t}\right\}=\frac{\partial}{\partial t}\sum\rho\delta v V=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{حجم مشخص}}\rho\delta v V$$

حد قسمت II :

$$\frac{\left(\sum_{A_2}\rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\sum_{A_2}\rho\delta v V\right)_t}{\Delta t}$$

برای محاسبه‌ی این حد حجم A_2 واقع بین سطح S' وقسمت S_2 از سطح S بوسیله‌ی استوانه‌های‌جزئی‌بشرح زیرین به‌حجم‌های کوچکتر منقسم میشود . قاعده‌ی δS استوانه‌های مزبور برروی قسمت S_2ی سطح S قرار داشته ومولدهای‌آن‌بموازات‌سرعت V وبه‌طول $V\Delta t$ خواهد بود . بنابراین اگربرسطح δS عمود $\vec{n}$ اخراج شده وتصویر V برروی این عمود V_n درنظرگرفته شود $(\vec{V}\cdot\vec{n}=V_n)$ حجم استوانه‌های مزبور $\delta SV_n\Delta t$ وجرم‌مایع داخل این حجم $\rho V_n\delta S\Delta t$ خواهد بود . در(شکل ۲) یکی ازاستوانه‌های مزبورخارج محوطه‌ی جریان با مقیاس بزرگترنشان‌داده شده است) . مقدار حرکت وابسته به‌جرم‌مایع داخل حجم A_2 درلحظه‌ی t عبارتست از :

$$\left(\sum_{A_2}\rho\delta v V\right)_t=\left(\sum_{S_2}\rho V_n\delta S\Delta t V\right)_t$$

با روش استدلال مشابه‌باآنچه فوقاً تشریح گردید حجم A_1 به استوانه‌های‌جزئی تجزیه گردیده‌ومقدارحرکت جرم مایع داخل حجم A_1 درلحظه‌ی $t+\Delta t$ عبارتست از:

$$\left(\sum_{A_1}\rho\delta v V\right)_{t+t\Delta}=\left(\sum_{S_1}\rho V_n\delta S\Delta t V\right)_{t+\Delta t}$$

طبق استدلال فوق نتیجه میشود که قسمت II را اصولاً میتوان بشکل زیرین بصورت ساده تری تبدیل نمود .

$$\frac{\left(\sum_{A_2}\rho\delta v V\right)_{t+\Delta t}-\left(\sum_{A_1}\rho\delta v V\right)_t}{\Delta t}=\left(\sum_{S_2}\rho V_n\delta SV\right)+\left(-\sum_{S_1}\rho V_n\delta SV\right)=\sum_{S_1}\rho V_n\delta SV$$

کمیت $[\rho dQ]=\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dS=\rho V_n\delta S$ بطوریکه سابقاً گفته شد موسوم است به‌بده جرمی جریان از سطح δS . هرگاه درعبارت بده جرمی‌جریان بجای ρ مقدار (ρV) جانشین شود کمیت حاصله‌عبارت‌میشود

از $[(\rho V)V_n\delta S]$ وموسوم است به«گذر مقدار حرکت[1]» ازسطح δS وازاینجا علت تبدیل فوق بسادگی واضح و روشن میگردد.

تنها مطلبی که دراینجا ذکرآن لازمست وجود علامت منفی درپرانتز دوم وبیان قرارداد کلی دراین مورد میباشد. طرز تفکر درمورد قرارداد مربوط به‌علامت بقرار ذیل می‌باشد:

در موقع محاسبه‌ی مقدار حرکت بایستی توجه داشت که زاویه‌ی θ بین دو حامل $\vec{n}$ و $\vec{V}$ در مورد جرمهای مایع داخل حجم A_2 حاده و در مورد جرمهای مایع داخل حجم A_1 منفرجه است « رجوع شود به (شکل ۲)».

علامت V_n در نتیجه برای حالت اول مثبت ودر حالت دوم منفی میباشد.

برای محاسبه‌ی‌مقدارحرکت چنین قرار داد میشود:

هرگاه گذر مقدار حرکت از درون سطح S بخارج آن باشد علامت مثبت و درصورتیکه گذر مقدار حرکت از خارج سطح S بسمت داخل آن باشد گذر مقدار حرکت فوق‌منفی منظورمیگردد. بدینطریق وجود یک علامت منفی در داخل پرانتز ویک علامت مثبت درخارج آن به‌آسانی توجیه میگردد.

بنابراین حد قسمت II عبارتست ازگذر مقدار حرکت از سطح $S_1+S_2=S$ که در لحظه‌ی t حجم مشخص مفروضی‌را محدود می‌سازد. محاسبه‌ی کمیت $\sum\limits_S \rho V_n\delta SV$ منجر میشود به تعیین انتگرال درجه‌ی دوم زیرین:

$$\sum_S \rho V_n\delta SV=\iint_S \rho V_n\delta SV$$

نتیجه‌ی تمام استدلال‌های بالا بشرح زیرین خلاصه میشود:

۱- مشتق مجموع هندسی مقدارحرکت ذره‌های داخل حجم مشخص در لحظه‌ی t برحسب زمان حاصل جمع دومولفه است.

مولفه‌ی‌اول: مشتق جزئی مجموع هندسی‌مقدار حرکت ذره‌های مایع‌داخل‌حجم مشخص‌برحسب زمان که با یک انتگرال درجه‌ی‌سوم محاسبه میشود. مشتق مزبور درمورد یک ذره‌ی‌مایع به‌حجم δv وجرم δm در (شکل ۳) بوسیله‌ی حامل $\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\delta mV}$ نمایش داده شده است.

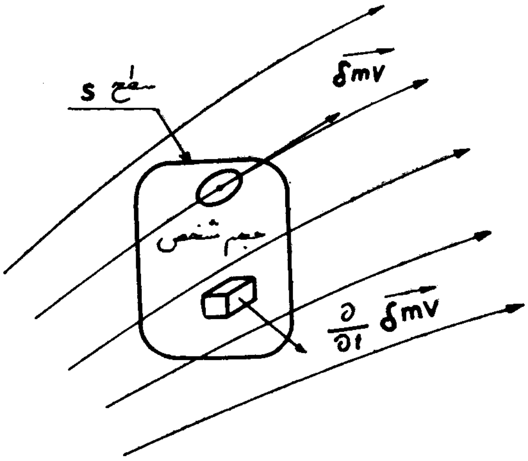
مولفه‌ی دوم: گذرمقدارحرکت ازسطح S که دوره‌ی ظاهری حجم‌مشخص محسوب میشودوبکمک یک انتگرال درجه‌ی دوم محاسبه میشود.

درمورد یک‌ذره‌ی‌مایع مذکور دربالا گذرمقدارحرکت‌بوسیله‌ی‌حامل $\overrightarrow{\delta mV}$ نمایش داده شده است.

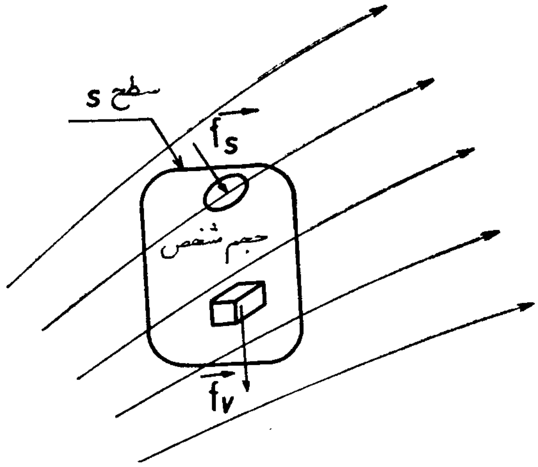
---

1) Debit de quantité de mouvement

۲- حاصل جمع دو مولفه‌ی فوق برابر است با مجموع نیروهائی که برذره‌های داخل حجم مشخص تأثیر می‌نمایند. نیروهای مزبور از دو گروه تشکیل شده‌اند:



شکل ۳



شکل ٤

گروه اول: نیروهائی هستند که برسطح S دوره‌ی ظاهری حجم مشخص تأثیرمی‌نمایند. بطوریکه در (شکل ٤) ملاحظه میشود هرگاه $\overrightarrow{f_s}$ نیروئی باشد که درنقطه‌ی مفروض سطح S بطورعمود برواحدسطح مزبور تأثیرمی‌نماید، برای سطح جزئی δS حول نقطه‌ی مفروض‌مقدار نیروی‌مزبور $\overrightarrow{f_s\delta S}$ بوده‌ومجموع نیروهای مزبور F_s بوسیله‌ی یک انتگرال درجه‌ی دوم با فورمول زیرین محاسبه میشود:

$$\overrightarrow{F_s}=\iint_S \overrightarrow{f_s\,\delta S}$$

گروه دوم: نیروهائی که برذره‌های مایع داخل حجم مشخص تأثیر می‌نمایند. مقدار این نیروها برای حجم جزئی δv برابر با $\overrightarrow{f_v\delta v}$ بوده و مجموع نیروهای مزبور $\overrightarrow{F_v}$ بوسیله‌ی یک انتگرال درجه‌ی سوم با فورمول زیرین محاسبه میشود:

$$\overrightarrow{F_v}=\iiint \overrightarrow{\rho f_v\delta v}$$

فورمول نهائی قضیه‌ی تعمیم داده شده‌ی مقدار حرکت درمکانیک‌مایعات‌بطورحاملی عبارتست‌از:

$$\iint_S \overrightarrow{\rho V_n\delta S V}+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\text{حجم مشخص}}\overrightarrow{\rho\delta v V}=\iint_S\overrightarrow{f_s\delta S}+\iiint_{\text{حجم مشخص}}\overrightarrow{\rho\delta v f_v}$$

رابطه‌ی حاملی فوق را میتوان برروی سه محور مختصات تصویرنموده و ازآن سه معادله بدست‌آورد.

بطوریکه گفته شد در اغلب مسئله‌هائی که در هیدرولیک صنعتی طرح میشوند میتوان جریان را

از نوع دائم در نظر گرفت بنحوی که این جریان دائم با سرعت متوسط V_m بطورعمود از مقطعی بمساحت S عبور نماید. دراین قبیل موردها بده جرمی جریان عبارتست از:

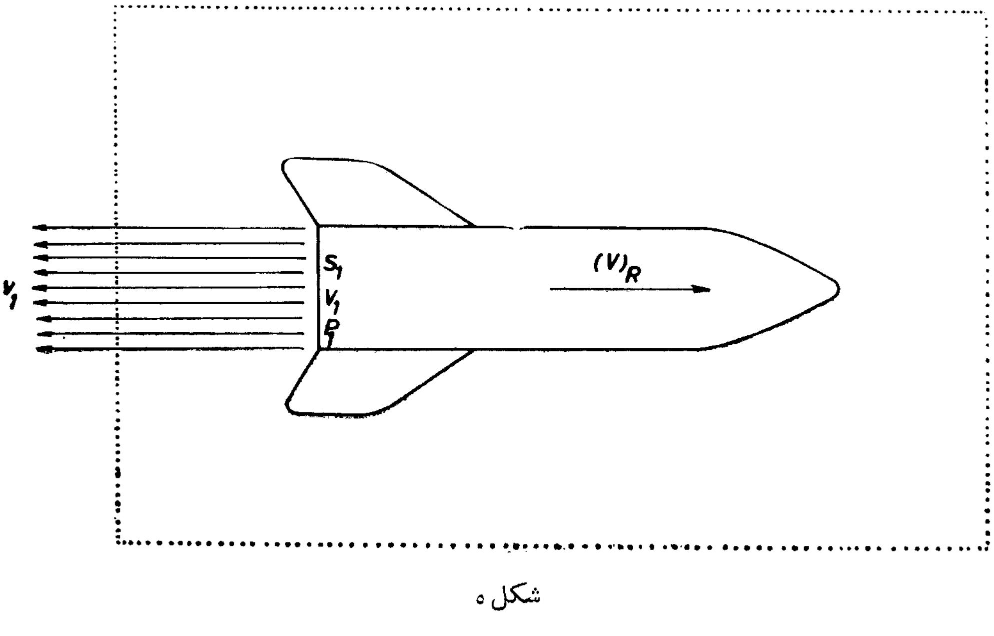
$$\iint \rho V_m \delta S = \frac{\gamma}{g} S V_m = \frac{\gamma}{g} Q$$

جمله‌ی انتگرال مرتبه‌ی سوم سمت چپ معادله‌ی مذکور درفوق صفر بوده وجمله‌ی وابسته به گذرمقدار حرکت بصورت عبارت زیرین خلاصه میشود:

$$\iint \frac{\gamma}{g} V_n \delta S V = \frac{\gamma}{g} S V_m \cdot V_m = \frac{\gamma}{g} Q V_m$$

ذیلاً دومسئله ذکر میگردد که در مورد آنها انتگرال مرتبه‌ی سوم صفر نمی‌باشد. دراین قبیل موردها یا جرم متغیر است ویا سرعت ویا هردو. ذیلاً دومثال ازهیدرولیک صنعتی‌وحرکت راکت‌فضاپیما ذکر میگردند تا مورد استعمال تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت و فورمول بالا بخوبی روشن شود.

مثال ۱ـ راکتی که در (شکل ٥) نشان داده شده است بطور مستقیم الخط درفضائی‌حرکت‌مینماید که درآنجا فشار جواصطکاك هوا ونیروی جاذبه‌ی‌زمین همه صفرفرض‌میشوند. مجموع جرم راکت ومادهٔ سوخت درلحظه‌ی ابتدائی برابر m_0 ومصرف سوخت β واحد جرم درثانیه است. درمحل خروج گاز ازراکت مقطع برابر S_1 اندازه‌ی فشار وجرم گازبترتیب برابر P_1 و ρ_1 وبعلاوه سرعت‌خروج گازنسبت‌به‌راکت V_1 میباشد.



شکل ٥

راکت نسبت به دستگاه اینرسی دارای حرکت متغیر (شتابدار) می‌باشد و بنابراین سرعت آن V_R نسبت بدستگاه اینرسی متغیر است. مطلوبست تعیین معادله‌ی حرکت راکت.

حل ـ از نقطه‌ی نظر تجزیه وتحلیل قضیه‌های مکانیک منطقی‌راه حل‌های مختلفی را میتوان برای

حل این مسئله پیشنهاد نمود. برحسب انتخاب «حجم مشخص» دو راه حل تشخیص داده میشود:

حالت اول : حجم مشخص متحرك ـ حجم مشخص بطوریکه در (شکل ٥) نشان داده شده است به‌راکت وابسته بوده ومجموعه‌ی راکت وحجم‌مشخص بصورت‌یک‌دستگاه با همان‌سرعت V_R راکت نسبت به دستگاه ثابت تغییر مکان پیدا می‌کند.

حالت دوم : حجم مشخص ثابت ـ حجم مشخص وابسته به‌دستگاه اینرسی بوده ونسبت به‌آن ثابت فرض میشود. بطوریکه در مکانیك کلاسیك ذکر شده است در حالت اول در معادله‌ی دینامیك بایستی علاوه برنیروهای مؤثر یك نیروی مجازی که درنتیجه‌ی حرکت‌شتابدار دستگاه نسبی (حجم مشخص)نسبت به‌دستگاه ثابت بوجود میآید منظورگردد . در حالت ثانی نظر باینکه حجم مشخص بطور ثابت در دستگاه اینرسی انتخاب میشود نیروی مجازی وجود نخواهد داشت ولی این کمیت درمعادله‌ی تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت جلوه‌گر میشود. راه حل دوم دراینجا بتفصیل توضیح داده میشود.

جهت مثبت ازسمت چپ به‌راست انتخاب میشود.

در محاسبه‌ی نیروها فقط $\iint f_s \delta S$ مخالف صفراست. زیرا تنها نیروی مؤثر $P_1 S_1$ می‌باشد وسایر نیروها مساوی با صفر هستند.

دوجمله‌ی مربوط به‌مشتق جزئی مقدار حرکت بطریق ذیل محاسبه میشوند:

محاسبه‌ی $\iint_S \rho V_n \delta SV$ ویا گذر مقدار حرکت ازسطحی که حجم مشخص را محدود می‌سازد :

سرعت گاز خروجی نسبت به‌حجم مشخص (یا دستگاه اینرسی) $(V_1 - V_R)$ می‌باشد. بده جرمی جریان ازسطحی که حجم مشخص را محدود می‌کند بایستی با همین مقدار سرعت حساب‌شود وبرابر است‌با $\rho_1 S_1 (V_1 - V_R)$. بنابراین گذر مقدار حرکت عبارت‌میشود از :

$$-\rho_1 S_1 (V_1 - V_R) \cdot (V_1 - V_R)$$

محاسبه‌ی $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{حجم‌مشخص}} \rho \delta v V$ ویا مشتق جزئی برحسب زمان مقدار حرکت‌راکت ومادہ‌ی سوخت درون آن:

در موقع محاسبه‌ی این‌قسمت بایستی دقت‌بیشتری‌مبذول داشت زیرا m و V_R جرم و سرعت‌راکت هردو متغیرند. مشتق جزئی مقدارحرکت $[mV_R]$ عبارتست از :

$$\frac{\partial}{\partial t}(mV_R) = m\frac{dV_R}{dt} + V_R\frac{dm}{dt}$$

ولی مطلب شایان‌توجه اینست که بعلت وجود جهش لوله‌ای‌درهرلحظه مایع درون حجم‌مشخص باندازه‌ی $\rho_1 S_1 V_R$ زیاد میشود واین‌مایع اضافه شده‌نسبت به‌دستگاه اینرسی سرعتی برابر $-(V_1 - V_R)$ خواهدداشت

لذا ذره‌های درون حجم مشخص دارای مقدار حرکتی برابر با $-(V_1-V_R)\rho_1 S_1 V_R$ خواهند بود که بایستی آن را نیز منظور نمود. نتیجه‌ی محاسبه عبارتست از:

$$m\frac{dV_R}{dt}+V_R\frac{dm}{dt}-\rho_1 S_1 V_R(V_1-V_R)$$

فورمول نهائی تعمیم قضیه‌ی مقدارحرکت بصورت زیرین خلاصه میشود:

$$P_1S_1=-\rho_1 S_1(V_1-V_R)(V_1-V_R)+m\frac{dV_R}{dt}+V_R\frac{dm}{dt}-\rho_1 S_1 V_R(V_1-V_R)$$

همانطور که گفته‌شد حرکت راکت فوق بمنزله‌ی حرکت یک نقطه‌ی مادی با جرم متغیراست.

جرم راکت و ماده‌ی سوخت واحیاءکننده m_0 بوده و مصرف سوخت برابر β در واحد زمان است بنابراین قانون تغییر جرم درفضا عبارتست از:

$$m=m_\circ-\beta t \tag{1}$$

اما درمورد تغییر جرم موجود در حجم مشخص بایستی رابطه‌ی پیوستگی را نیز در نظر گرفت.

طرزتفکر دراین مورد بقرار ذیل است:

تقلیل جرم موجود در داخل حجم مشخص برابراست با بده جرمی که ازسطح محدودکننده‌ی حجم مشخص خارج میشود یعنی:

$$\underbrace{\iint \rho V ds}_{\text{سطح محدود کننده‌ی حجم مشخص}}=\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint dm}_{\text{حجم مشخص}}$$

واز آنجا نتیجه میشود که:

$$\frac{\partial m}{\partial t}=-\rho_1 S_1 V_1 \tag{2}$$

اگر دو مقدار m و $\frac{\partial m}{dt}$ طبق رابطه‌های (۱) و (۲) درفورمول نهائی‌تعمیم قضیه‌ی مقدارحرکت‌قرارداده شوند چنین نتیجه میشود:

$$P_1S_1=-\rho S_1(V_1-V_R)+(m_\circ-\beta t)\frac{dV_R}{dt}-\rho_1 S_1 V_1 V_R-\rho_1 S_1 V_R(V_1-V_R)$$

وبعد از ساده کردن نتیجه بقرار زیر خواهد شد:

$$P_1S_1=-\rho_1 S_1 V_1^2+(m_\circ-\beta t)\frac{dV_R}{dt}$$

واز اینرو یک معادله‌ی دیفرانسیل درجه‌ی اول برحسب V_R حاصل میشود:

$$dV_R = \frac{dt}{m_0 - \beta t}(P_1 S_1 + \rho_1 S_1 V_1{}^2)$$

از انتگرال معادله‌ی دیفرانسیل فوق معادله‌ی حرکت راکت عبارت میشود از :

$$V_R = \frac{-(P_1 S_1 + \rho_1 S_1 V_1{}^2)}{\beta} \ln(m_0 - \beta t) + C^{te}$$

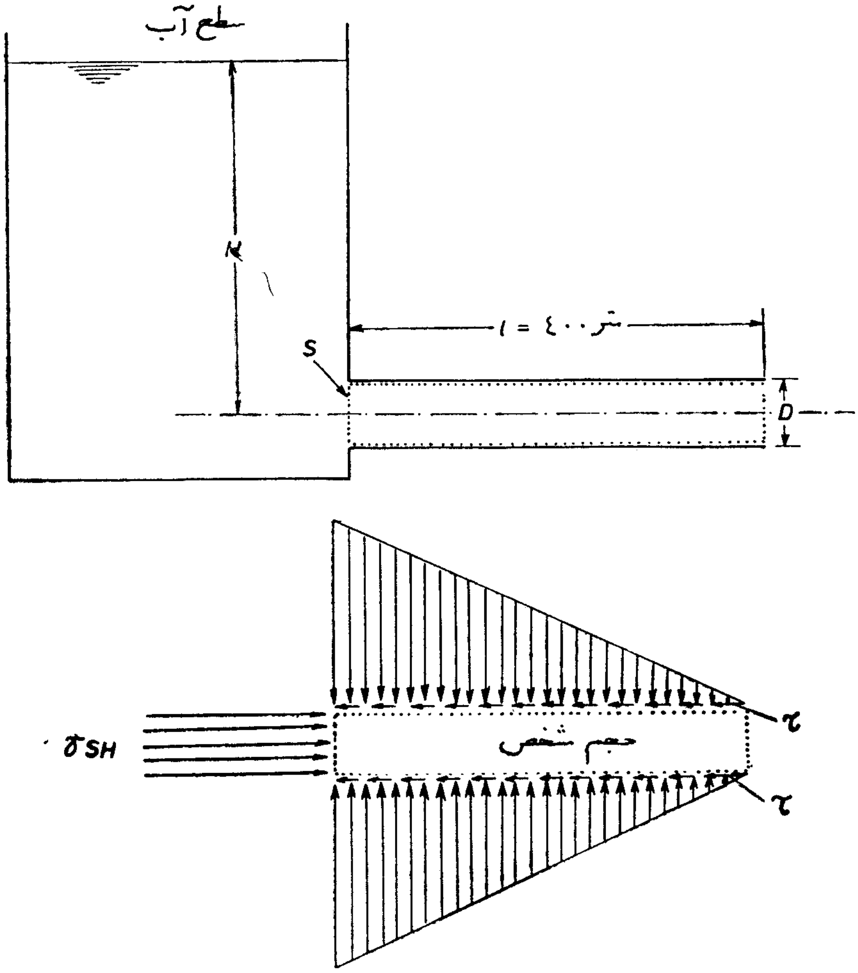
وقتی $t=0$ باشد $V_R=0$ واز آنجا نتیجه میشود که:

$$C^{te} = \frac{P_1 S_1 + \rho_1 S_1{}^2}{\beta} \ln \; m_0$$

ونتیجه‌ی نهائی عبارتست از :

$$V_R = \frac{P_1 S_1 + \rho_1 S_1 V_1{}^2}{\beta} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \beta t}\right)$$

مثال ۲ـ یک جریان غیردائم از یک مخزن بعنوان مثال دوم ازهیدرولیک صنعتی انتخاب‌میشود.



شکل ۶

یک لوله‌ی افقی مدور متحدالمقطع بطول متر ۴۰۰ = l بطوریکه در (شکل ۶) نشان داده شده‌است

به‌یک مخزن متصل گردیده است. در حالتی که سطح مایع در داخل مخزن باندازه‌ی ۶ متر بالاتر از محور لوله بطور ثابت نگاه‌داشته شود مایع در داخل لوله دارای جریان دائمی باسرعت ثابت می‌باشد.

سئوال‌مسئله‌از اینقرار است: سطح مایع در داخل مخزن بایستی تاچه ارتفاعی برسد تا جریان مایع در داخل لوله دارای‌شتابی برابر ۰٫۱ سانتیمتر در ثانیه باشد.

حل ـ H ارتفاع مجهول‌سطح‌آب ازمحور لوله است. حجم مایع داخل لوله بطوریکه در(شکل ۶) نشان داده شده بعنوان «حجم مشخص» انتخاب میشود. رابطه‌ی حاصلی‌ی تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت را با در نظر گرفتن علامت مثبت از چپ براست میتوان بطریق زیرین بیان نمود:

محاسبه‌ی نیروها : نیروی وزن قائم بوده ودر امتداد محور مـولفه ندارد بنابراین $\iiint \rho f_x dv$ صفر میباشد.

نیروی‌محرکه‌ی F فشارمایع داخل مخزن بارتفاع H است. این‌نیرو برابر است با $F = \gamma SH$.

نیروی‌مقاوم R درنتیجه‌ی‌اصطکاك مایع‌باجدارلوله‌است : اگرطول لوله l وقطرآن D وتلاش برشی وابسته‌به اصطکاك جدارلوله τ باشد در اینصورت $R = \tau\pi Dl$ است بنابراین $\iint f_s \delta S$ عبارتست از $F - R$

محاسبه‌ی مشتق مقدارحرکت : جمله‌ی وابسته به گذر مقدارحرکت از سطح محدود کننده‌ی حجم مشخص یعنی $\iint \rho V_n \delta S V$ صفر است. علت اینست که لوله‌متحدالمقطع بوده وسرعت‌ثابت است. جمله‌ی وابسته به‌مشتق جزئی مقدار حرکت ذره‌های موجود درون حجم مشخص صفرنبوده وعبارتست از:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint V dm = \frac{\gamma}{g} Sl \frac{dV}{dt}$$

بنابراین استعمال تعمیم قضیه‌ی مقدار حرکت درمورد این مسئله به‌نتیجه‌ی زیرین منتهی میشود:

$$\frac{\gamma}{g} Sl \frac{dV}{dt} = F - R$$

اما محاسبه‌ی R فوق‌العاده ساده است زیرا برای جریان دائم ارتفاع سطح‌آب ازمحور لوله برابر ۶ متر است بنابراین $R = \tau\pi Dl = ۶\gamma S$ واز آنجا نتیجه میشود که:

$$\gamma SH - ۶\gamma S = \frac{\gamma}{g} Sl \frac{dV}{dt}$$

$$H - ۶ = \frac{l}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{۴۰۰}{۱۰} \times ۰٫۱۵ = ۶ \text{ متر}$$

بنابراین هرگاه ارتفاع سطح آب درداخل مخزن باندازه‌ی دوبرابر ارتفاع اولیه‌ی‌آن بالاتر ازمحورلوله برسد جریان با شتابی برابر ۰٫۱ سانتیمتر درثانیه صورت میگیرد.