روش جدید برای محاسبه اتحادهای مثلثاتی هیپربولیک (روش هوده‌گام)

نوشته :

(داریوش هوده‌گام فارغ‌التحصیل مهندسی شیمی دانشکده فنی)

چکیده :

برای محاسبه اتحادیه‌های مثلثاتی هیپربولیک ناچار به طی محاسبات وقت‌گیر وهمراه با اشتباهی هستیم ازقبیل استفاده از روش بسط یا استفاده از روابط زیر

$$\cos x = \mathrm{ch}\, ix,\ \sin = \frac{\mathrm{sh}\, ix}{i}$$

ولی با دانستن روش زیر میتوان با توجه به اتحادهای مثلثاتی عادی که بعلت چند سال تکرار درذهن ما نقش بسته است اتحادهای مثلثاتی هیپربولیک را تقریباً بدون محاسبه وسریع بدست آورد واین روش اینست. (روش هوده‌گام)

— بجای سینوس $\sin x$ همیشه ($-\mathrm{sh}x$) وبجای جملات درجه دوم مثل ($\sin x \sin y$) همیشه ($-\mathrm{sh}x\ \mathrm{sh}y$) قرار میدهیم وهمینطور درمورد جملات‌درجه ۳و۴ هر دو مثبت ودرمورد جملات درجه ۵ و۶ هر دو منفی وهمینطور الی آخر ودرمورد $\cos$ هم همیشه ch قرار میدهیم.

درآن هنگام که دردانشکده فنی دانشگاه تهران تحصیل میکردم وپس ازآن طی مطالعات روابط وروشی را یافتم که محاسبات مربوط به اتحادهای مثلثاتی هیپربولیک یعنی coth,th,ch,sh و...... را ازدونظر تسهیل می‌کند نخست ازنظر سرعت ودوم ازاین نظر که امکان اشتباه درمحاسبات راتقریباً به صفر میرساند.

درزیر ابتدا با چند مثال مسأله راروشن نموده سپس روش مورد نظر واثبات ریاضی آنرا بطور خلاصه بنظر خوانندگان عزیز میرسانم. میدانیم

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1,\ \mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$$

(ch کسینوس هیپربولیک و sh سینوس هیپربولیک است).

$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$$

$$ch2x = ch^2x + sh^2x$$

$$shx + shy = 2sh\frac{x+y}{2}\, ch\,\frac{x-y}{2}$$

$$chx - chy = 2sh\,\frac{x+y}{2}\, sh\,\frac{x-y}{2}$$

$$sh3x = 3shx + 4sh^3x$$

$$ch(x+y+z+\cdots) = chxchychz\cdots(1+S_2+S_4+S_6+\cdots\cdot)$$

ودهها اتحاد دیگرکه برای محاسبه این اتحاد ها ناچار به طی محاسبات خسته کننده وهمراه با اشتباه ووقت‌گیری هستیم ازقبیل استفاده ازروش بسط ویا روابط غیر متقارن $sinx = \frac{shix}{i}$ و $cosx = chix$ ولی با دانستن روش زیرکه اثبات هم خواهد شد میتوان با توجه به اتحادهای مثلثاتی عادی که بعلت چند سال تکرار درذهن ما نقش بسته است - اتحادهای مثلثاتی هیپرنولیک را تقریباً بدون محاسبه و سریع بدست آور دواین روش اینست. (روش هوده‌گام).

۱- بجای $sinx$ همیشه $(-shx)$ قرار میدهیم.

۲- بجای جملات‌درجه‌دوم مثل $sinxsiny$ همیشه $(-shx\ shy)$ قرار میدهیم‌وهمینطور درمورد جملات‌درجه ۳ و۴ هر دو مثبت(+)ودرمورد جملات‌درجه ۵ و۶ هردومنفی (-)والی آخر ودرمورد cos هم‌همیشه ch قرار میدهیم.

مثلا ازفرمول

$$cos(x+y) = cosxcosx - sinxsiny$$

داریم

$$ch(x+y) = chxchy - (-shxshy) = chxchy + shxshy$$

ویا ازفرمول

$$sin(x+y) = sinxcosy + sinycosx$$

داریم

$$-sh(x+y) = -shxchy - shychx$$

ویا

$$sh(x+y) = shxchy + shychx$$

وهمینطور درمورد دهها فرمول دیگر واما اثبات روش فوق بطور اجمال- هر اتحاد مثلثاتی ازدو صورت خارج نیست

$$f\begin{bmatrix} sinx,\ sin^3x,\ sin^5x,\ \cdots,\ sin(x+y),\ \cdots\cdots \\ cosx,\ cos^2x,\ cos^3x,\ \cdots,\ cos(x+y),\ \cdots\cdots \end{bmatrix} = O$$

$$f\begin{bmatrix} sin^2x,\ sin^4x,\ sin^6x,\ \cdots,\ sin^2(x+y),\ \cdots \\ cosx,\ cos^2x,\ cos^3x,\ \cdots,\ cos(x+y),\ \cdots \end{bmatrix} = O$$

زیرا طبق خواص اتحادهای مثلثاتی واینکه sin تابعی است فردو cos تابعی است زوج نتیجه می‌شودکه هرگاه دریک اتحاد مثلثاتی دریکطرف سینوس‌ها بصورت توان فرد باشند درطرف دیگر هم سینوس‌ها همگی بصورت توان فرد هستند.

طبق همین خواص اتحاد هاما هراتحاد مثلثاتی گنگ و کسری رامیتوانیم بصورت گویا وغیر کسری درآوریم مثل $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ که بصورت زیر درمیاید $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ ویا $\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x}$ که طرفین وسطین می کنیم وباز طبق همین خواص واینکه $\sin$ تابعی است فرد هرگاه‌دریک اتحاد مثلثاتی دریکطرف $\sin$ بصورت توان زوج باشد طرف دیگر هم بصورت توان زوج است واگر فرد باشدگفتیم که طرف دیگر هم فرد است مثل

همگی فرد

$$\underset{\text{درجه اول}}{\sin 3x} = \underset{\text{درجه اول}}{3\sin x} - \underset{\text{درجه سوم}}{4\sin^3 x}$$

همگی فرد

$$\underset{\text{فرد}}{\sin x} + \underset{\text{فرد}}{\sin y} = 2\underset{\text{فرد}}{\sin\frac{x+y}{2}}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\underset{\text{زوج (درجه دوم)}}{\sin^2 x} = 1-\cos^2 x = \underset{\text{زوج (درجه صفر)}}{\sin^0 x} - \underset{\text{زوج (درجه صفر)}}{\sin^0 x\cos^2 x}$$

حال اگر ازروابط

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad , \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

استفاده کنیم رابطه اصلی اول (سینوس های فرد) بصورت زیر درمیآید

$$f\begin{bmatrix} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} , \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 , \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 , \cdots \\ \cdots , \sin 3x , \sin(x+y) \longleftarrow \text{و بقیه گروه سینوس هامثل} \\ \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} , \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 , \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 , \cdots \end{bmatrix} = O$$

حال اگر بجای x مقدار ix قرار دهیم رابطه بالا بصورت

$$f\begin{bmatrix} \frac{-shx}{i} , \frac{+sh^3x}{i} , \frac{-sh^5x}{i} , \cdots \\ chx, ch^2x, ch^3x, ch^4x, \cdots \end{bmatrix} = O$$

وچون sh درهمه جملات بصورت توان فرد است پس میتوان درهمگی‌ازعامل $\frac{1}{i}$ فاکتورگرفت و از رابطه اصلی اول ـ سینوس های فرد رابطه کلی زیر

$$f\begin{bmatrix} -shx , +sh^3x , -sh^5, \cdots \\ chx , ch^2x , ch^3x , ch^4x, \cdots \end{bmatrix} = O$$

نتیجه می‌شود وعینا باهمین استدلال رابطه اصلی دوم (سینوس‌های زوج) به رابطه کلی زیر تبدیل می‌شود. البته دراین حالت اصولا عامل $\frac{1}{i}$ هم‌وجود ندارد

$$f\begin{bmatrix} -sh^2x, +sh^4x, -sh^6x, \cdots \\ chx,\ ch^2x,\ ch^3x,\ ch^4x, \cdots \end{bmatrix} = O$$

درپایان وظیفه خود میدانم که ازآقایان اساتید محترم ودانشمند آقای دکتر قینی وآقای دکتر پایافر وآقای دکتر شفیعیها استادان‌ریاضی دانشگاه که قسمتی ازوقت خود راصرف مطالعه وتائید درستی این روش فرمودند تشکر نمایم وبسیارخوشحالم که موفق شدم درراه علم خدمتی انجام دهم.

داریوش هوده‌گام (آیرملو).

حل همچندیهاواتحادهائی که خطوط مثلثاتی هیپربولیک درآنها دخالت دارندمتضمن دشواری‌هائی است که براهل فن پوشیده نیست. بنظرمن تکنیکی که آقای داریوش هوده‌گام برای حل اینگونه مسائل پیداکرده‌اند قابل توجه است و محتملا برای آن دسته از دانشجویانی که درحل مسائل مثلثاتی تسلط کافی دارند می‌تواند راه‌گشای خوبی باشد.

دانشیار ریاضیات دانشکده فنی م. ه. شفیعها

روشی که آقای داریوش هوده‌گام جهت حل همچندیهاواتحادهای شامل‌خطوط مثلثاتی‌هیپربولیک ارائه نموده‌اند قابل توجه میباشد.

استادیار پلی‌تکنیک تهران ـ دکتر محمود پایافر