

# تعیین توزیع دمای حاصل از چشمه‌های متحرک حرارتی

دکتر حسین شکوهمند

دانشیار مهندسی مکانیک دانشکده فنی دانشگاه تهران

مهندس مجید ایزدخواه

فارغ التحصیل دوره کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشکده فنی

## چکیده

در این مقاله توزیع دما در اطراف چشمه‌های متحرک حرارتی و نحوه انتقال حرارت از آنها به محیط جامد اطراف بصورت دو بعدی با در نظر گرفتن حالت تغییر فاز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. هدف از این مطالعه ارائه یک تحلیل مناسب برای جریان حرارتی حاصل از چشمه‌های متحرک و تعیین تاریخچه توزیع دما، زمان و سرعت سرد شدن در جامدات مختلف است. برای این منظور ابتدا معادلات حاکم و شرایط مرزی بیان شده و سپس روش حل بکار رفته ارائه گردیده است. آنگاه نتایج حاصل با نتایج تجربی موجود مقایسه گشته‌اند و بعلاوه تأثیر پارامترهای مهم در این فرآیند مورد بررسی قرار گرفته است.

## مقدمه

قرار می‌گیرد ما را در امر بالا بردن کیفیت این فرآیند یاری می‌کند.

شروع کار در زمینه چشمه‌های متحرک حرارتی توسط آقای [۱۰] روستال<sup>۱</sup> در سال ۱۹۴۱ صورت گرفت. وی مسئله را بصورت تحلیلی با فرضیات زیر حل نمود:

خواص حرارتی ماده نسبت به دما تغییر نمی‌کنند، افتهای حرارتی به محیط ناچیز هستند، چشمه حرارتی در یک نقطه متمرکز شده و با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

البته پاسخ‌های ارائه شده توسط نامبرده مربوط به حالت شبه ثابت است. این حالت مدتی پس از حرکت

مسائل مربوط به پیچش، خمش، تنشهای اضافی و تغییر شکل مواد در نزدیکی اتصالات جوش شده مبحث مهمی در صنایع جوشکاری می‌باشند. این مسائل در ارتباط مستقیم با سیکلهای حرارتی ایجاد شده در اثر عبور چشمه از روی آن ماده هستند.

دمای بالای ایجاد شده در اثر حرارت ورودی باعث تغییر ساختار متالورژیکی در اطراف ناحیه جوشکاری می‌شود که خود تعیین کننده خواص مکانیکی، مقاومت کششی و سختی آن ماده است. بنابراین پیش‌بینی دقیق تاریخچه توزیع دما در ماده‌ای که تحت عملیات جوشکاری

می شود.

در مقاله حاضر فرضیات ساده کننده فوق در نظر گرفته نشده است و سعی گشته تا حد ممکن مسئله در حالت کلی حل شود برای این منظور از یک چشمه سطحی گوسین<sup>۵</sup> که عملاً به حالت واقعی نزدیکتر می باشد، استفاده خواهد شد. در ضمن بدلیل شبیه سازی حرکت کاملاً پیوسته برای چشمه، می توان توزیع دما را برای هر یک از محلهای قرارگیری چشمه چه در حالت ابتدای حرکت و چه در حالت پایدار با دقت بسیار خوبی تعیین نمود.

#### معادلات حاکم و فرضیات موجود:

با توجه به فرض دو بعدی بودن مسئله، معادله حاکم با

در نظر گرفتن چشمه حرارتی Q بصورت زیر می باشد:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + q \quad (1)$$

فرض دو بعدی بودن جریان حرارتی در جسم کاملاً دور از ذهن نیست و در مسائل کاربردی نیز بدلیل شدت حرارت بالای ورودی نسبت به ضخامت جسم عملی خواهد بود.

یکی از امکاناتی که در حین حرکت چشمه روی سطح ایجاد می شود، حالت تغییر فاز ماده است. در این حالت بعلاوه شدت حرارت ورودی در نقاط نزدیک به چشمه، تغییر فاز روی داده و در نتیجه آن مقداری از ماده ذوب شده و یک حوضچه مذاب رادر اطراف چشمه تشکیل میدهد. این حوضچه مذاب با حرکت چشمه محل خود را تغییر خواهد داد و همانطور که در جلو، حوضچه تغییر فاز جامد به مایع داریم، در انتهای آن تغییر فاز مایع به جامد صورت می گیرد، در نتیجه با مسائل مرز متحرک روبرو خواهیم شد.

چشمه رخ می دهد و در طی آن جریان حرارتی در اطراف چشمه به شکل تقریباً پایدار می رسد.

در سال ۱۹۵۶ آقای گراش<sup>۱</sup> [۵] همین مسئله را با فرض تغییرات خطی خواص حرارتی نسبت به دما بصورت تحلیلی در حالت شبه ثابت حل کرده است.

با توجه به محدودیت هایی که از فرضیات حل های تحلیلی ایجاد می گردد پاسخ های بدست آمده به جز در موارد خاصی دارای کاربرد نیستند. به این دلیل جهت بدست آوردن حل بهتر و کامل تر، بطوری که بتوان شرایط واقعی را در مسئله وارد کرد، باید از روش های عددی استفاده نمود.

در سال ۱۹۵۹ آقای [۹] پاولیک<sup>۲</sup> در فرآیند جوش کاری صفحات براساس تئوری چشمه خطی روشی را ارائه داد که امکان تعیین دمای ماکزیمم در ناحیه متأثر از حرارت (HAZ) را با خطای ۱۰٪ نسبت به آزمایشات تجربی فراهم می آورد.

منظور از ناحیه متأثر از حرارت (Heat Affected Zone) ناحیه ای است که در آن بعلاوه شدت حرارت بالا، بدون ایجاد حالت تغییر فاز در ماده، ساختار مولکولی تغییر می کند.

آقایان کائو<sup>۳</sup> و فقری<sup>۴</sup> در سال ۱۹۸۹ مسئله مشابهی رادر مورد پدیده ابلاسیون سپرهای حرارتی حل کرده اند. در مسئله مورد نظرایشان توزیع شار حرارتی یکنواخت بوده بعلاوه خواص فیزیکی ماده نیز ثابت منظور شده اند.

فرضیات ساده کننده مشابه آنچه توسط فقری و کائو انجام گرفته در سایر تحقیقات از جمله [۶] و [۵] و [۳] دیده

گرفته شده است. شرایط اولیه و مرزی (با توجه به شکل ۱) عبارتند از:

$$T(x,y) = 25^{\circ}\text{C}, \quad t=0$$

و شرایط مرزی خواهند شد:

$$-K \frac{\partial T}{\partial y} = -q_y \quad y = \frac{-W}{2}$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial y} = +q_y \quad y = \frac{+W}{2}$$

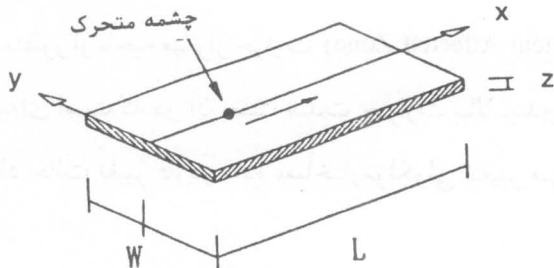
$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = -q_x \quad x=0 \quad (۳)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = +q_x \quad x=L$$

$q_y$  و  $q_x$  بترتیب شارحرارتی واگذار شده از صفحه فلزی به محیط در جهت  $x$  و  $y$  می باشند.

بعلاوه در محاسبات انجام شده، مبنای محاسبه آنتالپی دمای محیط یعنی ۲۵ درجه سانتیگراد منظور شده است. یعنی:

$$H(T=25^{\circ}\text{C})=0$$



شکل ۱- نحوه قرارگیری محورهای مختصات در دامنه

یکی از روشهایی که برای حل اینگونه مسائل بکار رفته است، روش استفان می باشد. در این روش معادلات هدایت حرارتی یکبار در بخش جامد و یکبار در بخش مذاب آن هم فقط برای انتقال حرارت یک بعدی حل می شوند. انتقال حرارت بین این دو بخش باعث حرکت مرز دو فازی در جسم خواهد شد که معادله سوم برای ارضاء شرایط این مرز اعمال می گردد.

در مسئله مورد بحث مابه علت دوبعدی بودن انتقال حرارت و توزیع دوبعدی دما در فازهای جامد و مایع بلافاصله قبل و بعد از حوضه چشمه حرارتی، استفاده از روش استفان میسر نیست. به این دلیل برای تعیین مرز دو فاز از متغیر آنتالپی استفاده می کنیم.

استفاده از این فرمولاسیون روش حل مناسبتری برای مسئله می باشد. از مزایای این روش این است که معادله حاکم در کل ناحیه مورد نظر (شامل فازهای جامد و مایع) همه جابکار می رود و به این ترتیب نیازی به حل معادله هدایت حرارتی بصورت مجزا در فازهای مایع و جامد و نیز مرز متحرک نمیباشد.

با استفاده از این روش معادله حاکم بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K \frac{\partial T}{\partial y} \right] + q(x,y) \quad (۲)$$

که در این رابطه:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \rho(T) \cdot C(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

است.

در این روش افت حرارتی بصورت جابجایی از تمام سطوح جسم و بصورت تشعشع از حوضچه مذاب، در نظر

یکی از نکات مهم در حل مسئله، نحوه تغییر مکان حوضچه مذاب است. بعلت وجود پارامترهای غیر قابل اندازه گیری در عمل، از جمله فشار گاز حاصل از قوس الکتریکی در این ناحیه، اثر انتقال حرارت جابجایی در بخش مذاب با یک ضریب هدایت حرارتی مؤثر جبران شده است. مقدار این ضریب توسط محققین مختلف در

بدیهی است در حل معادله (۲) از شکل کارتزینی معادله (۴) یعنی:

$$q(x,y) = q(0) \cdot e^{-C'(x^2+y^2)}$$

استفاده میشود.

### روش حل عددی و برنامه کامپیوتری:

برای حل معادله دیفرانسیل انرژی حاکم بر مسئله می توان آن را بروش صریح فرموله نمود. باید توجه داشت که بدلیل متغیر بودن خواص حرارتی ماده نسبت به دما و همچنین گرادیان حرارتی موجود در دو جهت  $x$  و  $y$  ضریب هدایت حرارتی در مرزهای اطراف هر گره دارای مقادیر متفاوتی خواهد بود که در هر مرحله با توجه به دمای دو گره واقع در طرفین مرز با میانبایی هارمونیک محاسبه شده است.

برای حل معادلات اختلاف محدود بدست آمده برنامه کامپیوتری تنظیم شده است. ورودی های این برنامه شامل نوع چشمه، شدت حرارت ورودی و سرعت حرکت آن است. (در این محاسبات از چشمه حرارتی گوسین استفاده شده است). سپس ابعاد نمونه، دمای اولیه و خواص حرارتی آن وارد برنامه شده و نهایتاً شرایط محیط مورد آزمایش سؤال خواهد شد.

در این برنامه پس از شبکه بندی ناحیه بصورت متغیر (برای بدست آوردن دقت بالاتر در نواحی نزدیک به چشمه) معادلات حاکم برای هر محل قرارگیری چشمه حل شده است و به این ترتیب دمای نقاط مختلف دامنه در هر لحظه تعیین می شود.

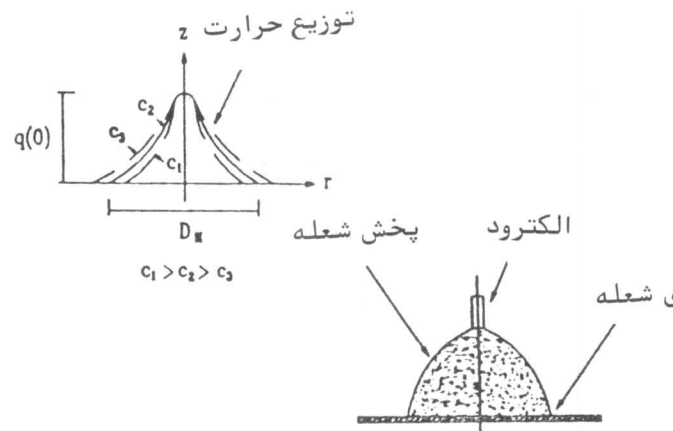
خروجی های این برنامه شامل منحنی های توزیع دما

حدود 4 تا 7 برابر ضریب هدایت حرارتی ماده در حالت جامد و در دمای ذوب پیشنهاد شده است. در مقاله حاضر از ضریب 5 استفاده شده است که با مقایسه با نتایج تجربی موجود (۱۲) از دقت خوبی برخوردار است.

### چشمه حرارتی

بدلیل اهمیت و تأثیر مستقیم چشمه حرارتی در نحوه توزیع دما در جسم باید نوعی از چشمه را انتخاب کرد که به حالت عملی نزدیکتر باشد. چشمه سطحی گوسین که توسط آقای پاولیک [۹] پیشنهاد شد نمونه خوبی برای این منظور است. توزیع شار حرارتی در این چشمه بصورت زیر خواهد بود.

$$q(r) = q(0) \exp(-C'r^2) \quad (۴)$$



شکل ۲- توزیع شار سطحی گوسین

که در این رابطه  $q(r)$  شار سطحی در نقطه  $(x,y)$  می باشد بطوریکه:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$q(0)$  شار سطحی در مرکز چشمه،  $C$  ضریب تمرکز چشمه و  $r$  فاصله شعاعی از مرکز چشمه خواهد بود.

برای هر لحظه دلخواه از ابتدای حرکت چشمه تا انتهای آن و همچنین منحنی های نرخ سرد شدن برای نقاط مختلف دامنه می باشد. از مزیت های این برنامه تعیین دقیق توزیع دما برای لحظات اولیه حرکت چشمه قبل از رسیدن جریان حرارتی به حالت پایدار می باشد که این امر با شبیه سازی حرکت چشمه بطور پیوسته امکان پذیر شده است.

روش عددی از لحاظ پایداری با استفاده از معیار پایداری ون نیومن<sup>۱</sup> امتحان شده و  $\Delta t$  مربوط به پله های زمانی این روش، از این طریق تعیین شده است.

#### بحث و نتیجه گیری:

شکل (۳) منحنی های تک دما برای سه حالت از حرکت چشمه (قوس الکتریکی جوشکاری) روی صفحه ای به ابعاد ۵ × ۲ cm از جنس تانتالیم<sup>۲</sup> که توسط آقای شریر [۱۲] ارائه شده است را نشان می دهد. در این شکل شار حرارت ورودی برابر  $\frac{4400 \text{ watt}}{\text{cm}}$  بوده و سرعت حرکت چشمه 1.67mm/sec است.

بمنظور اطمینان از صحت حلهای ارائه شده در مقاله حاضر، آنها را با نتایج آقای شریر<sup>۳</sup> [۱۲] مقایسه کرده ایم (شکل ۴). بطوریکه ملاحظه می شود نتایج بدست آمده باداده های تجربی نامبرده به خوبی توافق دارند.

پارامترهای مهمی که در این فرآیند نقش اصلی را ایفاء می کنند عبارتند از:

- نوع چشمه
- مقدار حرارت ورودی
- سرعت حرکت چشمه

- دمای اولیه جسم (دمای پیش گرم)

- خواص حرارتی ماده

- افت های حرارتی از ماده به محیط اطراف

برای بررسی اثر این پارامترها یک نمونه از جنس فلز روی با دمای ذوب 420C مد نظر قرار گرفته است. شکل های (۵) تا (۹) نحوه اثر پارامترهای مختلف در این فرآیند را نشان می دهند.

شکل (۵) مربوط به سه حالت مختلف از حرکت چشمه روی نمونه تحت آزمایش است. در شکل (۵-الف) چشمه حرارتی در ابتدای صفحه قرار دارد و در حالتی است که جریان حرارتی به حالت پایدار خود دست نیافته است.

منظور از حالت پایدار همانگونه که در مرجع (۱۰) نیز تعریف شده حالتی است که در آن توزیع دما در نقاط نزدیک به چشمه به حالت تقریباً ثابتی در می آید.

شکل (۵-ب) مربوط به حالت پایدار جریان حرارتی است.

شکل (۵-ج) حالت نهایی حرکت چشمه روی سطح نمونه را نشان می دهد.

همانطور که مشاهده می شود منحنی های ایزوترم بصورت بیضی هایی هستند که به سمت عقب چشمه حرارتی کشیده شده اند در نتیجه دمای دو نقطه با فواصل مساوی در جلو و عقب چشمه با هم متفاوت است. بالاتر بودن دمای نقطه واقع در پشت چشمه نسبت به نقطه جلویی بعلا آن است که چشمه از روی نقطه پشتی عبور کرده است. بدین ترتیب در حالتی که نقاط جلوی چشمه به

کاهش سرعت حرکت چشمه رسم شده‌اند در نتیجه در این حالت میزان حرارت ورودی به سطح در واحد زمان بیشتر بوده و پهنای ایزوترم‌ها نسبت به حالت قبل افزایش یافته است. بعلت سرعت کمتر چشمه، در این حالت پایداری جریان حرارتی زودتر رخ خواهد داد.

شکل (۹) اثر تغییر دمای اولیه جسم را روی منحنی‌های توزیع دما نشان می‌دهد شکل (۹-الف) با  $50^{\circ}\text{C}$  افزایش دمای اولیه نسبت به حالت نرمال و شکل (۹-ب) با  $100^{\circ}\text{C}$  افزایش نسبت به حالت اولیه بدست آمده‌اند. مشاهده می‌شود که محل منحنی‌های تک دما در این حالت نسبت به حالت قبل بترتیب در حدود  $50^{\circ}\text{C}$  و  $100^{\circ}\text{C}$  تغییر می‌یابند که البته در نواحی نزدیک به حوضچه مذاب این قانون صدق نمی‌کند و علت آن شدت بالای انتقال حرارت در این ناحیه است.

شکل (۱۰) نرخ سردشدن را برای حرارت ورودی‌های مختلف نشان می‌دهد. محور افقی نشان دهنده زمان و محور عمودی نشان دهنده دمای ماده است. این منحنی برای نشان دادن نرخ سردشدن یک نقطه دلخواه از ناحیه که مختصات آن در زیر شکل آورده شده رسم گردیده است. ماکزیمم دما مربوط به حالتی است که چشمه به آن نقطه نزدیک شده و از روی آن عبور می‌کند. مدتی پس از عبور چشمه از روی این نقطه، نرخ سردشدن به حالت تقریباً ثابتی در می‌آید که به خواص حرارتی ماده و شرایط محیط وابسته است.

با توجه به منحنی‌های ارائه شده می‌توان دریافت که میزان حرارت ورودی به جسم اولین عامل تعیین‌کننده

جذب حرارت برای افزایش دمای خود می‌پردازند، نقاط پستی حرارت وارد شده را به سمت عقب هدایت می‌کنند.

شکل (۶) مربوط به حرکت چشمه نقطه‌ای روی همان نمونه تحت آزمایش قبلی در حالت پایدار جریان حرارتی است. مشاهده می‌شود که بیضی‌های حالت قبل، دنباله تیزتری پیدا کرده‌اند و این بدلیل تمرکز حرارت ورودی در آن نقطه است.

تفاوت بین شکل‌های (۵-ب) و (۶) این است که شکل (۵-ب) مربوط به توزیع گوسین و شکل (۶) توزیع حرارت نقطه‌ای است.

شکل (۷) نشان دهنده اثر حرارت ورودی روی نحوه توزیع دما در جسم می‌باشد که در سمت راست (۷-الف) منحنی‌های توزیع دما را با ۲۰٪ افزایش در حرارت ورودی نشان می‌دهد در حالی که در سمت چپ (۷-ب) حرارت ورودی ۲۰٪ کاهش داده شده است. اثر این تغییرات در پهنای حوضچه مذاب کاملاً واضح است.

شکل (۸) نشان دهنده اثر تغییرات سرعت ورودی به میزان ۲۰٪ + نسبت به حالت اولیه است. با افزایش سرعت، همانطور که در شکل (۸-الف) مشاهده می‌شود منحنی‌های تک دما شکل باریکتری بخود گرفته‌اند. در این حالت پایداری جریان حرارتی در زمان طولانی‌تری از ابتدای حرکت ایجاد می‌شود زیرا قبل از اینکه جسم فرصت کافی برای رسیدن به تعادل حرارتی با محیط اطراف خود را داشته باشد، چشمه حرارتی از محل خود تغییر مکان داده و به جلو حرکت می‌کند.

در شکل (۸-ب) منحنی‌های توزیع دما برای ۲۰٪

چگونگی توزیع دما در جسم است و نقش اصلی را در شکل‌گیری حوضچه مذاب ایفا می‌کند. در نتیجه برای تغییر اندازه حوضچه می‌توان در قدم اول میزان حرارت ورودی را کنترل کرد.

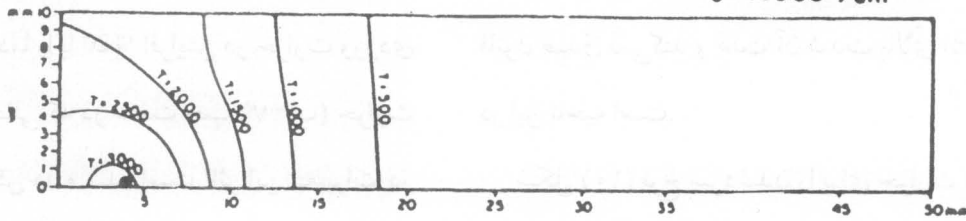
سرعت حرکت چشمه عامل مهم دیگری در توزیع دما می‌باشد. کاهش و افزایش سرعت باعث تغییر میزان حرارت ورودی در واحد زمان به جسم خواهد شد. از طرفی با افزایش سرعت، پهنای ناحیه متأثر از حرارت کاهش می‌یابد. در نتیجه اگر بخواهیم مثلاً در حین جوشکاری بخش کمتری از ماده تحت تأثیر تغییر ساختار مولکولی قرارگیرد باید با تنظیم حرارت ورودی سرعت

حرکت چشمه را افزایش دهیم.

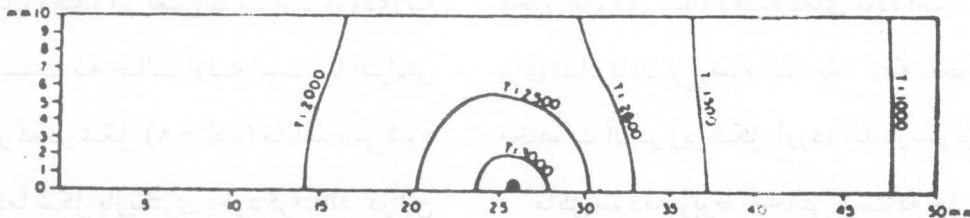
عامل دیگری که در شکل‌گیری منحنیهای هم دما مؤثر است دمای اولیه جسم می‌باشد. با افزایش دمای اولیه یا پیش‌گرم کردن جسم می‌توان گرادیان‌های حرارتی ایجاد شده در جسم را کاهش داد و باعث جلوگیری از خمش و پیچش در جسم شد.

در پایان ذکر این نکته ضروریست که به کمک روش پیشنهاد شده در مقاله حاضر میتوان بدون نیاز به امکانات پیچیده آزمایشگاهی مقادیر پارامترهای مؤثر در جوشکاری مواد مختلف را تعیین نموده و حالات بهینه فرآیند را بدون صرف هزینه بالا بدست آورد.

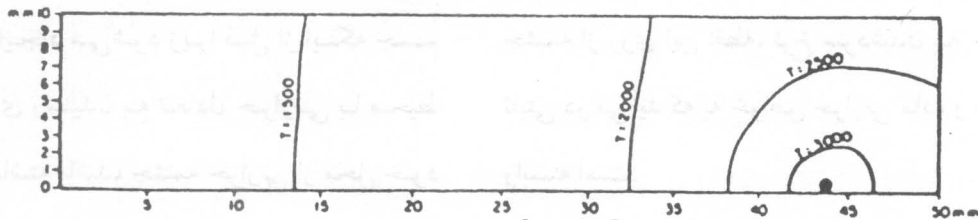
$$J = 360 \text{ l/cm}$$



شکل ۳-الف - حالت ابتدای حرکت

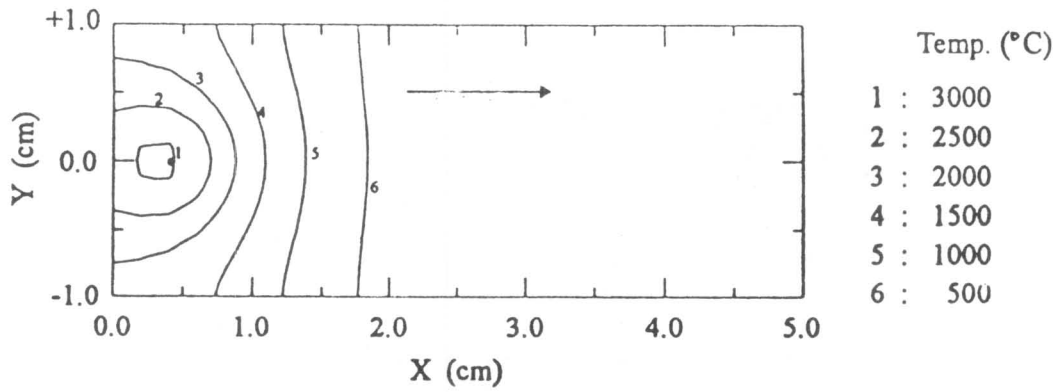


شکل ۳-ب - حالت شبه ثابت

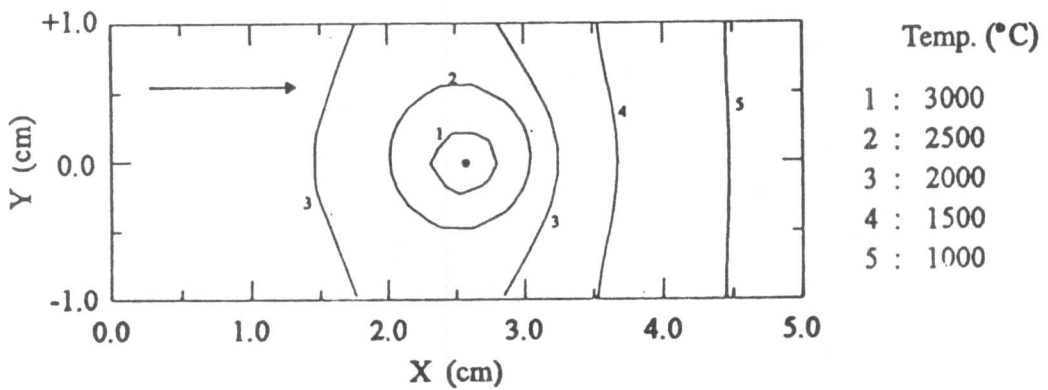


شکل ۳-ج - حالت نهایی حرکت

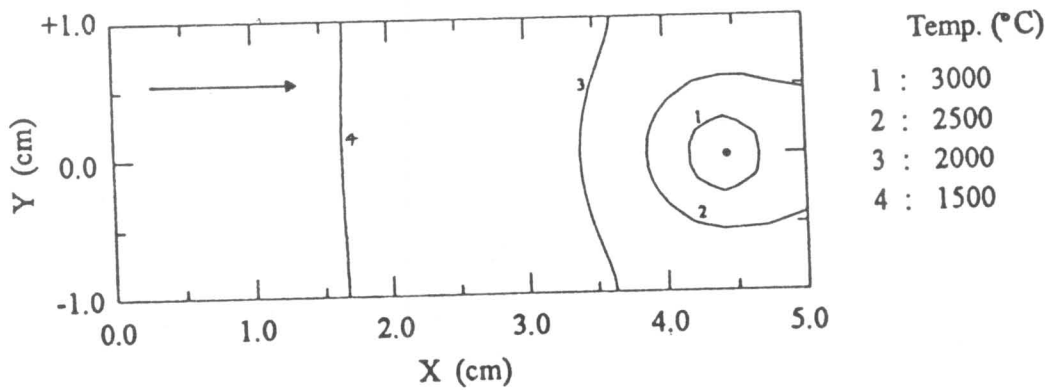
شکل ۳- ایزوترم‌های حاصل از حرکت قوس جوشکاری روی صفحه (آزمایش شریب)



(۴-الف) - حالت ابتدای حرکت



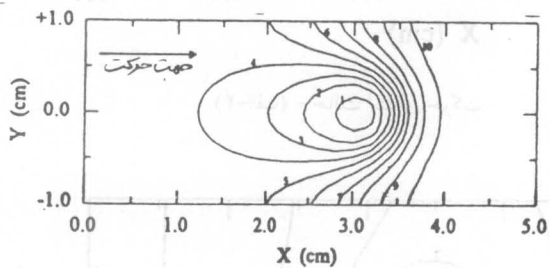
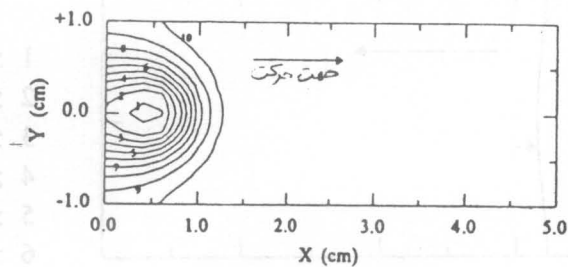
(۴-ب) - حالت شبه ثابت



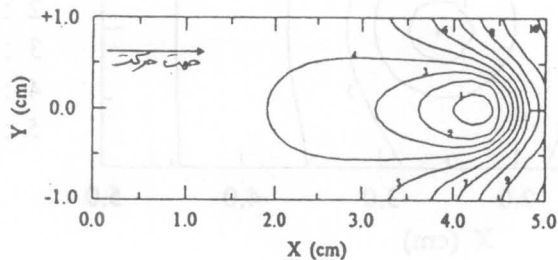
(۴-ج) - حالت نهایی حرکت

شکل ۴- ایزوترم‌های حاصل از حرکت قوس جوشکاری روی صفحه (برنامه ارائه شده)



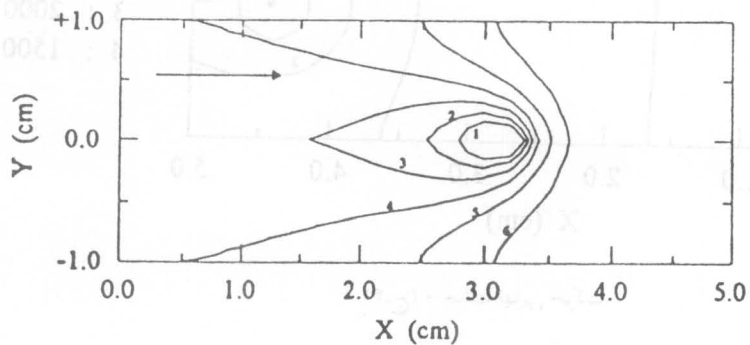


- Temp. (°C)
- 1 : 420
  - 2 : 380
  - 3 : 340
  - 4 : 300
  - 5 : 260
  - 6 : 220
  - 7 : 180
  - 8 : 140
  - 9 : 100
  - 10 : 60



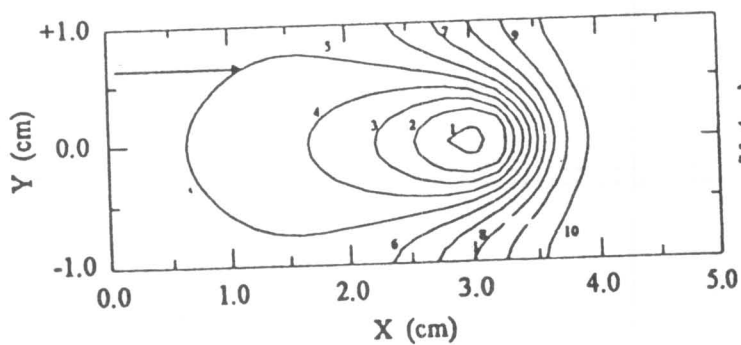
شکل ۵- ایزوترم‌های حاصل از حرکت چشمه حرارتی گوسین با قدرت  $1400 \frac{\text{watt}}{\text{cm}^2}$  از روی صفحه

با جنس روی با سرعت  $2 \text{ cm/sec}$

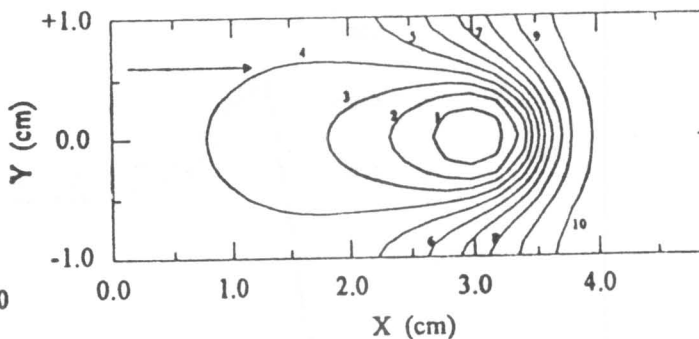


- Temp. (°C)
- 1 : 300
  - 2 : 260
  - 3 : 220
  - 4 : 180
  - 5 : 140
  - 6 : 100

شکل ۶- ایزوترم‌های حاصل از چشمه متحرک نقطه‌ای در حالت پایدار.

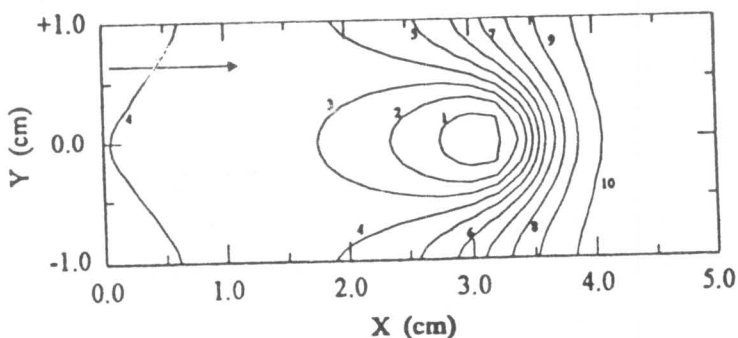


الف - 20% افزایش حرارت ورودی

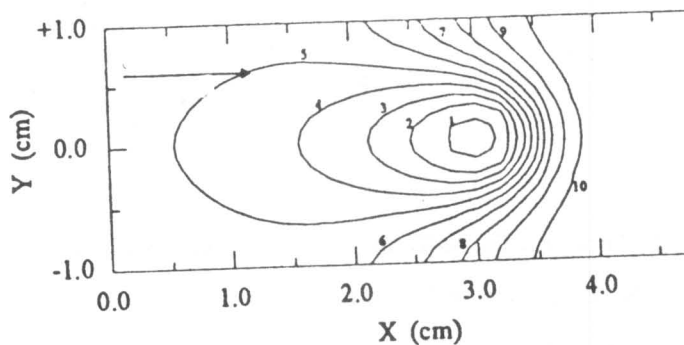


ب - 20% کاهش حرارت ورودی

شکل ۷- اثر حرارت ورودی روی ایزوترمهای حالت پایدار

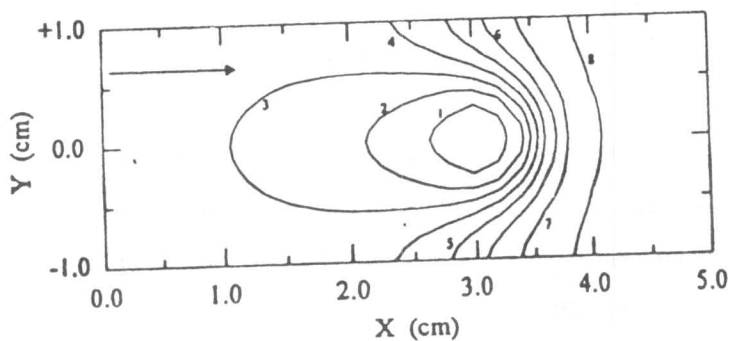


الف - 20% افزایش سرعت حرکت

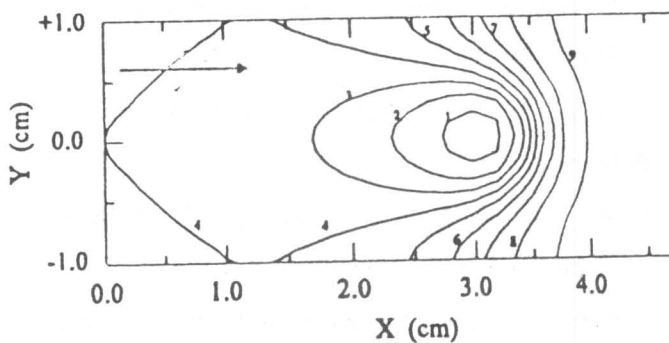


ب - 20% کاهش سرعت حرکت

شکل ۸- اثر سرعت حرکت چشمه روی ایزوترمهای حالت پایدار

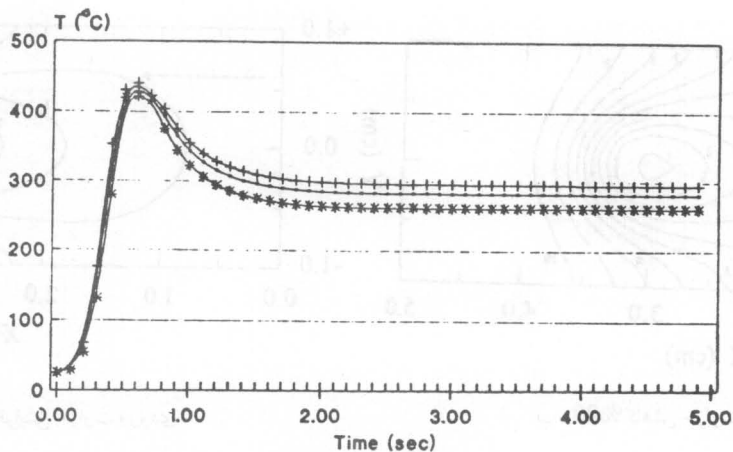


الف - حرارت اولیه 125 C



ب - حرارت اولیه 75 C

شکل ۹- اثر حرارت اولیه روی ایزوترمهای حالت پایدار



کاهش شار حرارتی \* ، افزایش شار حرارتی + وضعیت نرمال

Position :  $x=1 \text{ cm}$  ,  $y=0 \text{ cm}$

شکل ۱- نرخ سرد شدن برای سه حالت افزایش حرارت ورودی، کاهش حرارت ورودی و حالت نرمال

#### فهرست منابع

- 1- Anderson D. A. Tannehill. C & Pletcher R. H, 1984, Computational fluid mechanic & heat transfer ; Hemisphere Publishing.
- 2- M. Okada, Analysis heat transfer during melting from a vertical wall, Int. J. Heat Mass Transfer 27,2057 - 2066 (1984).
- 3- Grigull. U. / 1984/ Metallurgical transaction/Vol 15 B/PP: 299-305
- 4- Grigull U./ 1984/ Heat Conduction /Hemisphere Publishing.
- 5- R. J. Grosh & E. A. Trabant; 1956. Welding research Supplement. PP: 396 S- 399 S.
- 6- Kou S./Dec 1981, Metallurgical Transaction, Vol/ 2A. PP: 2025-2030
- 7- Kou S. & Kanevsky T. & JFyfitch S., june 1982/ Welding research Supplement / PP:175 S- 181 S.
- 8- Masubuchi K./ 1980/ Analysis of welded Structure / Pergamonn Press/ xford.
- 9- Pavelic V. & Tanbakuchi R. & uyebara O.A. & Mayers P. S., july 1986, Welding research Supplement, PP:295 S- 305 S
- 10- Rosenthal/ Nov. 1946, Trannsaction A.S.M.E, PP:849 - 866/
- 11- Shamsubndar N.& Sparrow E. M./ Aug 1975, journal of heat transfer.
- 12- Sharir, june 1980, Metallurgical Transaction Vol 11 B, PP: 257-265
- 13- V. R. Voller and M. Cross, Estimating the solidifica tion/ melting times of cylindrically symmetric regions, Int. J. Heat Mass Transfer 24, 1457-1462 (1981).
- 14- Cao, Y. and Faghri, A/h, (1989) int j. Heat / Mass/ Transfer/ Vol 11/No4/ PP:127-138.