

گسترش مبانی ریاضی روشن تجربی کاستیک (سایه‌نگاری) در گوشه‌های مقعر

دکتر ناصر سلطانی

عضو هیئت علمی گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مهندس وحید متین‌فر

مدیریت تولید مناطق دریانی شرکت ملی نفت ایران

چکیده

روش نوری کاستیک جهت مطالعه میدان تنش در حوالی نک ترکها و تعیین ضرایب شدت تنش توسط تنوکریس^(۱) [۱, ۲, ۳] ارائه شده است. در گوشه‌های مقعر بر خلاف ترکهاروابط مکانیک شکست شکل پیچیده‌تری به خود می‌گیرند و مرتبط ساختن آنها با روابط حاصله از تحلیل شکست نور بسادگی مسئله ترکها نیست. هدف از این مقاله گسترش و بررسی مبانی ریاضی روشن تجربی کاستیک در گوشه‌های مقعر جهت مطالعه میدان تنش در حوالی ریشه‌گوشه‌های برای تعیین ضرایب شدت تنش می‌باشد.

در این مقاله با استفاده از تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی و مرتبط ساختن آن با تئوری شکست نور در مواد شفاف، معادلات لازم برای بررسی شدت تنش در گوشه‌ها بدست آمده است. معادلات حاصله نشان می‌دهد که شعاع منحنی اولیه کاستیک ثابت نبوده و به متغیر موقعیت، θ ، وابسته است. حل معادلات نشان می‌دهد که این وابستگی در بسیاری از موارد اندک می‌باشد، بطوری که می‌توان از آن صرف نظر نمود.

مقدمه

دسته‌بندی‌های مختلفی برای فرآیند شکست پیشنهاد شده است، برخی از این دسته‌بندی‌ها مبتنی بر حالت تنش و برخی دیگر مبتنی بر پارامترهایی مانند درجه حرارت آزمایش، نرخ کرنش، مقدار انرژی جذب شده و مسیر شکست می‌باشند. تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی در میان تئوریهای ارائه شده در مکانیک شکست می‌باشد. تاکنون تحقیقات قابل ملاحظه‌ای طی سه دهه اخیر بر روی این تئوری انجام گرفته و توسعه قابل ملاحظه‌ای داشته است و اکنون می‌توان به کمک آن مسائل مهندسی بسیاری را حل نمود.

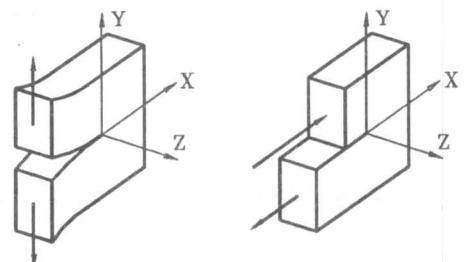
هدف مکانیک شکست ارائه پاسخهای کمی برای مسائل خاص مربوط به سازه‌های می‌باشد که از قبل دارای مُک بوده و در حین کار این مُکها تبدیل به ترک شده‌اند. همچنین با استفاده از مکانیک شکست می‌توان میزان گسترش یک ترک کوچک تا اندازه بحرانی را تحلیل نمود. یک سازه یا ماده‌ای که دارای مُک و یا ترک است در اثر بارهای بسیار کمتر از حد تسلیم همان ماده خواهد شکست. در این موارد تحلیل این سازه با استفاده از روابط مقاومت مصالح نمی‌تواند ایمن بودن سازه را تحت بارهای واردہ تضمین نماید. تاکنون

گاهی اوقات جهت سهولت در ساخت و تولید، ارائه و کاربرد گوشه‌های تیز و مقعر در طراحی قطعات اجتناب ناپذیر می‌باشد. در صورت نیاز به گوشه‌های مقعر معمولاً اولین مرحله استفاده از فیلت جهت تغییر میدان "تکین"^۱ تنش به یک مسئله تمرکز تنش عمومی می‌باشد. جداول زیادی از ضرایب تمرکز تنش برای تحلیل و بررسی گوشه‌های مقعر دارای فیلت در دسترس مهندسین و طراحان می‌باشد. حالاتی وجود دارد که در آن امکان کنترل بر روی شکل گوشه مقعر وجود ندارد، در این صورت ارائه فیلت ممکن نخواهد بود. این گوشه‌ها را در تحلیل مکانیک شکست نمی‌توان همیشه به عنوان یک ترک در نظر گرفت زیرا میدان تنش برای یک ترک با میدان تنش مربوط به یک شیار ۷ شکل و یا گوشه فرق دارد. وجود شیار ۷ شکل و یا گوشه مقعر در یک سازه به هر دلیلی که باشد سبب بروز "تکینگی‌های"^۲ تنش در رأس این شیارها و گوشه‌ها خواهد شد.

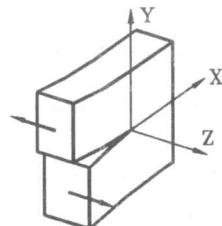
"برتس"^۳[۴] یکی از اولین پژوهشگرانی بود که توزیع تنش و تکینگی‌های تنش را در شیارها و ترک‌های تیز (از نقطه نظر ریاضی) بررسی نمود. بعداً "ویلیامز"^۴[۵] بطور مستقل تکینگی‌های تنش را در گوشه‌ها با سه شرط مرزی مختلف بدست آورد.

در سالهای اخیر مقالات زیادی در مورد تعیین عددی و تجربی ضرایب شدت تنش در مکانیک شکست ارائه شده است. در میان روش‌های عددی ارائه شده از روش کالوکیشن مرزی، انتگرال کنتوری کار معکوس (RWCI) و روش‌های اجزاء محدود و اجزاء مرزی برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش در گوشه‌های مقعر استفاده شده است. "گالاگر"^۵[۶] یک بررسی عالی از تکینگی‌های ارائه شده در این زمینه

در روابط این تئوری مهمترین پارامتری که برای بررسی و مطالعه ترک‌ها و حالت آنها بکار می‌رود، ضرایب شدت تنش می‌باشد. ضریب شدت تنش را می‌توان از میدان تنش نزدیک نوک ترک بدست آورد. کارایی روشن شدت تنش در تحلیل مسائل، ناشی از این فرض است که رفتار یک ترک را از میدان تنش حول آن تعیین می‌نماید. این امر سبب سهولت تحلیل تنش در سازه‌های پیچیده می‌گردد و به همین دلیل استفاده از ضرایب شدت تنش به شکلهای متفاوت در طراحی حتی در سالهای آینده نیز بصورت گسترده‌ای کاربرد خواهد داشت. برای درک بهتر میدان تنش در نزدیکی نوک ترک باید جابجایی ترک را تعریف نمود. ترکی که در یک جسم تحت تنش قرار دارد ممکن است به هر یک از سه حالت مستقل تغییر حالت بدهد (شکل - ۱).



I - حالت اول
II - حالت دوم



III - حالت سوم

شکل - ۱ : سه حالت اصلی شکست: I - حالت بازشدن II - حالت لغزیدن III - حالت پاره شدن.

را ارائه نموده است.

کاربرد ساده‌ای دارد.

مقالات بسیاری با استفاده از این روش برای مطالعه میدان تنش در حوالی نوک ترک و ضرایب شدت تنش ارائه شده است که در بخش بعدی به آنها اشاره خواهد شد. در مقالات ارائه شده از روش کاستیک بازتابشی و کاستیک عبوری ضرایب شدت تنش در مواد شفاف ترکدار و تحت تنش برای حالت اول و هم حالت مرکب (K_I, K_{II}) مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته و نتایج رضایت بخشی نیز بدست آمده است. لیکن، تاکنون از این روش برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش در گوشه‌های مقعر و صفحات شیاردار استفاده‌ای بعمل نیامده است.

هدف از این نوشتار ارائه معادلات لازم جهت بدست آوردن ضرایب شدت تنش برای صفحات شیاردار با استفاده از روش کاستیک بازتابشی و با بکارگیری صفحاتی از جنس پلکسی شفاف تحت تنش کششی می‌باشد.

روش تجربی کاستیک

روش کاستیک یک روش نوری است که از آن بطور گستردۀ ای برای بررسی تکینگی‌ها و تحلیل تجربی تنش در مسایل الاستیک والاستو-پلاستیک استفاده شده است. روش تجربی کاستیک به سه تکنیک اساسی زیر تقسیم شده است:

۱- روش کاستیک عبوری

۲- روش کاستیک بازتابشی از مواد شفاف

۳- روش کاستیک بازتابشی از مواد غیر شفاف (کدر)

روش کاستیک عبوری اولین بار توسط "ماناگ"^[۹] پیشنهاد شد. او فقط حالت ساده یک "ترک لبه‌ای"^[۴] در حال رشد و تحت تغییر شکل حالت اول را مورد مطالعه قرار داد. سپس روش کاستیک بازتابشی توسط ثوکریس^[۱] معرفی گشت. این روش اطلاعات بیشتری را ارائه می‌کند. این

روشهای تجربی بسیاری نیز برای تعیین ضرایب شدت تنش وجود دارد. روشهای تجربی را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. یک دسته آنها یعنی است که از روابط معلوم بین کمیت‌های قابل اندازه‌گیری (نرخ رشد ترک) با ضریب شدت تنش استفاده می‌کنند و دسته دیگر از اندازه‌گیری مستقیم بر روی نمونه بهره می‌برند. بعضی از مهمترین روشهایی که با اندازه‌گیری مستقیم سروکار دارند و بطور گسترده‌ای برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش استفاده می‌شوند، آنها یعنی هستند که اساس کارشان بر قانون نوری تنش استوار می‌باشد. این روشهای عبارتند از فتوالاستیسیتی (کشسانگاری)، انترفرومتری (تداخل نور) و کاستیک (سایه‌نگاری).

تاکنون مقالات بسیاری جهت مطالعه توزیع تنش و بدست آوردن ضرایب شدت تنش در صفحات ترکدار با روش تجربی فتوالاستیسیتی ارائه شده است. لیکن فقط "مهین‌فللاح"^[۷] با اعمال روش فتوالاستیسیتی ضرایب شدت تنش در حالت اول و دوم را برای گوشه‌های مقعر در صفحات تحت تنش کششی مورد مطالعه دقیق قرار داده است.

روش نوری دیگری که بصورت موفقیت‌آمیز در مسائل دو بعدی شکست اعمال می‌شود روش انترفرومتری هولوگرافیک می‌باشد. این روش که توسط "دادرار-اوریگان"^[۸] ابداع شد فقط در مدل‌های نازک شفاف کاربرد دارد.

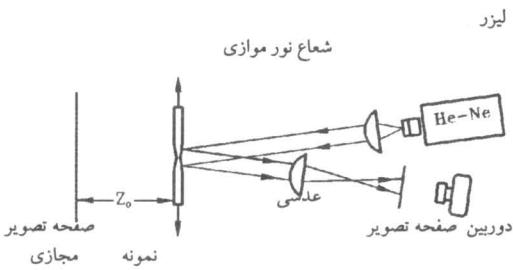
روش کاستیک به عنوان یک روش تجربی بسیار قوی برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش در نوک ترک برای هر دو حالت استاتیک و دینامیک در مسائل شکست شناخته شده است. این تکنیک در عین حالیکه بسیار دقیق می‌باشد ولی

"سلطانی"^۵ [۱۸] از روش کاستیک عبوری برای مطالعه ضرایب شدت تنش در نمونه‌هایی از جنس پلکسی با ترکهای لبه‌ای در حالت I و II استفاده کرد.

مبانی فیزیکی روش کاستیک

در این بخش مبانی فیزیکی و مبانی ریاضی این روش بیان شده و سپس معادلات مورد لزوم در کاستیک بازتابشی جهت بررسی ضرایب شدت تنش در مدل‌های نمونه‌های که دارای شیار یا گوشه مقعر هستند ارائه خواهد شد.

چگونگی قرار گرفتن ابزار و وسایل انجام آزمایش که عموماً در روش کاستیک بازتابشی پیشنهاد می‌شود در (شکل - ۲) نشان داده شده است [۱۹].



شکل - ۲: قرار گرفتن ابزار و وسایل آزمایش کاستیک

بطوریکه در شکل مشاهده می‌شود یک اشعه نور تک رنگ و پیوسته از یک لیزر گازی هلیوم نئون (He-Ne) تابانده می‌شود. این اشعه سپس با عبور از یک عدسی عریض‌تر شده و به نمونه شفاف می‌تابد. زمانیکه این نور به نمونه شفاف تحت تنش برخورد می‌کند قسمتی از آن از سطح بیرونی جسم منعکس شده و قسمتی دیگر با عبور از ضخامت جسم منحرف می‌شود. سپس پاره‌ای از این نور از جسم عبور کرده و پاره‌ای دیگر نیز از سطح داخلی منعکس شده و باز

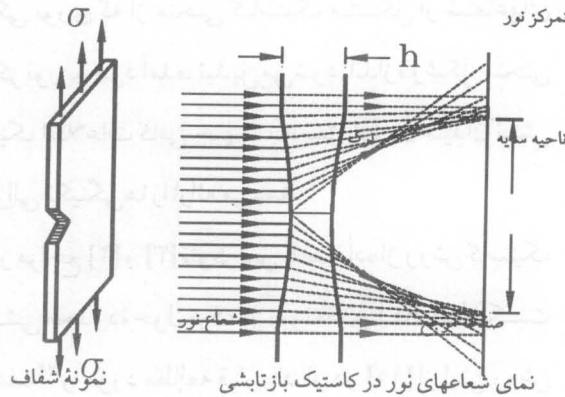
اطلاعات برای حل هر مسئله پیچیده مربوط به میدان تکین تنش کافی می‌باشد. بر طبق این روش "ناحیه تکین تنش"^۱ به تکینگی نوری که از منحنی کاستیک متصل از شعاعهای متمرکز نور بوجود آمده، تبدیل می‌شود. اندازه و شکل منحنی کاستیک اطلاعات کافی جهت بدست آوردن میدان تنش در حوالی تکینگی هارا ارائه می‌دهد.

در مراجع [۲] و [۳] ثوکریس با استفاده از روش کاستیک بازتابشی محدوده حول ترک در نمونه‌های شفاف با "شکست مضاعف"^۲ را مورد مطالعه قرار داد. او در [۱۰] از این روش برای مطالعه تکینگی ناشی از بارگذاری متمرکز در مرز مستقیم یک نیم صفحه الاستیک استفاده کرد. این روش همچنین برای اندازه گیری تغییر مکانهای کوچک در انتهای ترک ناشی از بارهای کوچک مورد استفاده قرار گرفت و نتایج رضایت‌بخشی بدست آمد [۱۱]. سپس در مرجع [۱۲] نتیجه گیری شد که روش کاستیک را می‌توان بطور موافقی آمیزی جهت مطالعه میدان تنش یا میدان ناپیوسته تنش در صفحات غیر ایزوتropیک بکار برد.

"بینرت و کالتف"^۳ [۱۳] صحت روش کاستیک برای مطالعه ترک ساکن تحت بار دینامیکی را مورد مطالعه قرار دادند. در مرجع [۱۴] یک تکنیک اصلاح شده برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش در حالت اول با استفاده از کاستیک بازتابشی ارائه گشت. استفاده از این روش برای بدست آوردن K_I و K_{II} در مواد شفاف برای اولین بار توسط ثوکریس و "گدوتوس"^۴ [۱۵] در یک صفحه از جنس پلکسی با ترکهای داخلی مورب تحت بارکششی انجام پذیرفت.

در مراجع [۱۶] و [۱۷] از روش کاستیک بازتابشی برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش در پوسته‌های استوانه‌ای تحت کشش و صفحات دوشکستی ترک دار استفاده شد.

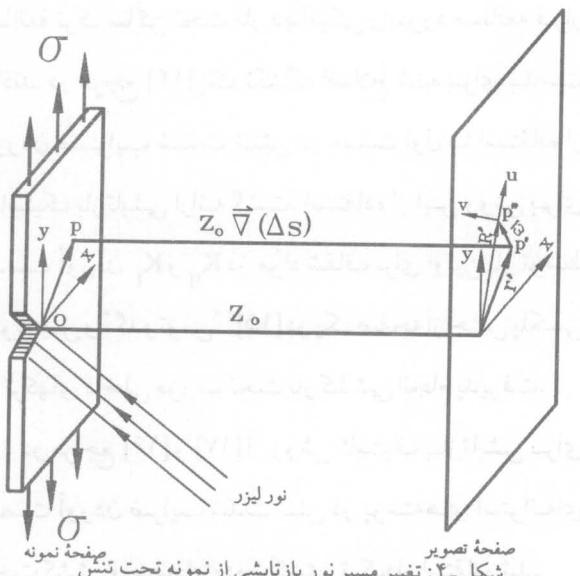
می‌شوند.



شکل - ۳: مبانی روش کاستیک

مبانی ریاضی روش کاستیک

یک شعاع نور که با نمونه شفاف در یک نقطه دلخواه P برخورد می‌کند را در نظر می‌گیریم (شکل - ۴). زمانیکه نمونه تحت بارگذاری نیست اشعه نور صفحه تصویر را در یک فاصله z از صفحه نمونه در نقطه P' که مختصات آن (r, θ) می‌باشد، قطع می‌کند. ولی زمانی که نمونه تحت تنش قرار می‌گیرد، اشعه نور منحرف شده و به نقطه P'' جابجا خواهد شد.



شکل - ۴: تغییر مسیر نور بازتابشی از نمونه تحت تنش

می‌گردد. این نور با یک زاویه تداخل با صفحه درونی برخورد می‌کند و با عبور دوباره از صفحات منحرف شده و از سطح بیرونی جسم خارج می‌شود [۱۵]. شعاعهای نور بازتابیده شده، صفحه تصویر را در فاصله z از نمونه قطع می‌کند و سپس توسط یک وسیله ثبت تصویر، معمولاً یک دوربین عکاسی و یا یک جستجوگر ویدیوئی که متصل به یک سیستم پردازش تصویر کامپیوتری می‌باشد، ثبت می‌شود.

تداخل نور منعکس شده از سطح بیرونی و درونی یک نمونه شفاف دارای شیار و تحت تنش، با نور تابیده شده لیزر بیانگر تغییرات ضخامت صفحه که در اثر تغییر شکل جانبی می‌باشد، خواهد بود. بر اساس قانون ماکسول اشعه نور بر اثر این عمل یعنی دوبار منحرف شدن و انعکاس یافتن در هنگام عبور از ضخامت صفحه کاملاً پس می‌ماند^۱. پس مانند مطلق اشعه‌های نور به تغییر ضریب شکست و تغییرات ضخامت صفحه بستگی دارد [۱۵].

نور منعکس شده که از صفحه باز می‌گردد کاملاً رابطه تئوری "اکونال"^۲ را ارضاء می‌کند [۲۰]. بر اساس تئوری اکونال گرادیان موج هندسی $S(x, y, z)$ یک مقدار ثابت می‌باشد. برای درک بهتر این روش یک نمونه شفاف تحت تنش دارای شیار را در نظر می‌گیریم (شکل - ۳). در اثر بارگذاری ضخامت و همچنین ضریب شکست نور نمونه تغییر می‌یابد. در حوالی نوک ترک تغییر ضخامت نمونه بیشتر است، و هر چه به نوک ترک نزدیکتر شویم تغییرات ضخامت بیشتر می‌شود.

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، در قسمتهایی از نمونه که ضخامت ثابت می‌باشد شعاعهای نورانی بدون شکست از نمونه عبور می‌کنند ولی در قسمتهایی که تغییر شکست در سطح نمونه رخ داده است اشعه‌های نور منحرف

پولاریزه شده به موازات تنشهای اصلی بصورت زیر درخواهد آمد.

$$\Delta S_1 = (a\sigma_1 + b\sigma_2)h \quad (5)$$

$$\Delta S_2 = (a\sigma_2 + b\sigma_1)h$$

که در آن a و b برابرند با:

$$a = C_1 - (n - n_a)\nu/E$$

$$b = C_2 - (n - n_a)\nu/E$$

ΔS را همچنین می‌توان به صورت مجموع و تفاضل

تنشهای اصلی بصورت زیر بیان نمود:

$$\Delta S_{1,2} = Ch [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm g (\sigma_1 - \sigma_2)]$$

که در آن $C = a+b$ و $g = (a-b)/(a+b)$ می‌باشد. برای

موادی که از نظر نوری ایزوتروپیک می‌باشند $b = 0$ و $a = 0$

خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت.

$$\Delta S = Ch (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6)$$

که در آن C بعنوان ثابت نوری و یا ضریب نوری تنش ماده

خوانده می‌شود.

با جایگذاری ΔS در معادله ۱ خواهیم داشت.

$$\tilde{W} = -Chz_o \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (7)$$

(\tilde{u}, \tilde{v}) بردارهای واحد نشان داده شده در (شکل ۵) می‌باشند.

از روابط نامتغیرهای تنش داریم.

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_r + \sigma_\theta$$

در تحلیل تنش برای قطعاتی که دارای شیار V و یا گوشه

مقعر باشند، به یک میدان تکین تنش در رأس شیار و یا گوشه

برخورد می‌کنیم. این معادلات که در مختصات قطبی بدست

خواهنا. آمد در واقع جواب معادله بای هارمونیک ($\nabla^4 \phi = 0$) و

شرایط مرزی بدون تنش در یک گوشه مقعر می‌باشد.

ویلیامز [۵] برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل برای

شیار از مختصات قطبی استفاده نمود (شکل ۵). مرکز

اگر $S(x,y)$ مسیر نور از میان نمونه در نقطه دلخواه $P(r,\theta)$ باشد، مقدار انحراف اشعه نور پس از عبور از ضخامت نمونه و انعکاس در فاصله z از نمونه که برابر با بردار \tilde{W} می‌باشد توسط تئوری اکونال بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\tilde{W} = z_o \text{grad} (\Delta S) \quad (1)$$

در رابطه فوق ΔS تغییرات مسیر نور $S(x,y)$ می‌باشد. تغییر ΔS برای یک اشعه نور بستگی به تغییرات ضخامت نمونه، h و ضریب شکست نور ماده، n_i دارد. در نتیجه

$$\Delta S = (n_i - n_a) \Delta h + (n_i - n_o) h \quad (2)$$

ضریب شکست نور در هوا می‌باشد و مقدار آن برابر با یک فرض می‌شود. بر طبق قانون ماکسول تغییرات ضریب شکست نور رابطه مستقیم خطی با تنشهای اصلی دارد. از آنجائیکه محاسبه هر سه ضریب شکست در حالت سه بعدی مشکل می‌باشد. کاربرد حالت دو بعدی (تنش صفحه‌ای) در روشهای تجربی بیشتر معمول می‌باشد. برای حالت تنش صفحه‌ای داریم:

$$n_1 - n_a = \Delta n_1 = C_1 \sigma_1 + C_2 \sigma_2 \quad (3)$$

$$n_2 - n_a = \Delta n_2 = C_1 \sigma_2 + C_2 \sigma_1$$

و σ_1 و σ_2 تنشهای اصلی و C_1 و C_2 ضرایب نوری تنش ماده می‌باشند. Δh ضریب شکست نور ماده در حالت فاقد تنش است. از آنجائیکه در حالت تنش صفحه‌ای $\sigma_3 = 0$ می‌باشد،

در نتیجه کرنش برابر خواهد بود با

$$\epsilon = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

با مرتب کردن رابطه فوق خواهیم داشت

$$\Delta h = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) h \quad (4)$$

که در آن ν و E به ترتیب ضریب پواسون، مدول الاستیسیته و کرنش می‌باشند. با قرار دادن معادله ۳ و ۴ در معادله ۲، تغییرات طول مسیر S یعنی ΔS_1 و ΔS_2 برای نور

$$F(\theta) = \frac{dF(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{در} \quad \theta = \pm\alpha \quad (12)$$

برای بدست آوردن ثابت‌های مجھول C_1 تا C_4 می‌توان با قرار دادن حل عمومی معادله دیفرانسیل یعنی ۹ در شرایط مرزی ۱۲ و با یک سری عمل جمع و تفاضل ساده، معادلات همگن زیر را بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda-1)\alpha & \cos(\lambda+1)\alpha \\ (\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha & (\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13-\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda-1)\alpha & \sin(\lambda+1)\alpha \\ (\lambda-1)\cos(\lambda-1)\alpha & (\lambda+1)\cos(\lambda+1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13-\text{ب})$$

برای بدست آوردن جواب معادلات بالا، پس از مساوی قرار دادن دterminانها با صفر، معادلات مشخصه زیر بدست می‌آید.

$$\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (14-\text{الف})$$

$$\lambda \sin 2\alpha + \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (14-\text{ب})$$

از قسمت دوم معادله ۱۳-الف و قسمت اول معادله ۱۳-ب رابطه بین ضرایب بصورت زیر بدست می‌آید:

$$C_3 = B_1 C_1 \quad (15-\text{الف})$$

$$C_4 = B_2 C_2 \quad (15-\text{ب})$$

در روابط فوق B_1 و B_2 برابرند با:

$$B_1 = -\frac{(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha}{(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha}$$

$$B_2 = -\frac{\sin(\lambda-1)\alpha}{\sin(\lambda+1)\alpha}$$

با بررسی دقیقتر معادلات ۱۴ مشخص می‌گردد که $\lambda = 0$ تنها مقداری است که هر دو معادله را ارضاء می‌کند. انتخاب مقدار $\lambda = 0$ در واقع تنش‌هایی را نتیجه می‌دهد که شرایط ۱۲ را بطور یکسان ارضاء کند. در نتیجه برای مقادیر غیر صفر λ ، اگر یکی از معادلات ارضاء شود دیگری ارضاء نخواهد شد. برای حل معادلات ۱۴ طرفین را برابر $2\lambda\alpha$ تقسیم

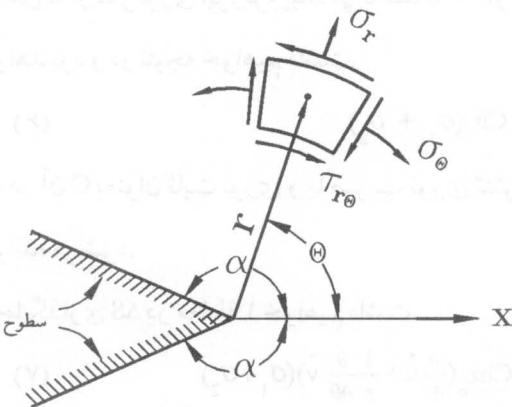
مختصات در نوک ترک فرض شده است و محور x نیمساز زاویه شیار ۷ شکل می‌باشد. برای یک ماده همگن و ایزوتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای و بدون نیروهای کالبدی، تابع تنش ϕ را بصورت زیر فرض می‌کنیم.

$$\phi = r^{\lambda+1} F(\theta) \quad (8)$$

که در آن $F(\theta)$ برابر است با:

$$F(\theta) = C_1 \cos(\lambda-1)\theta + C_2 \sin(\lambda-1)\theta + C_3 \cos(\lambda+1)\theta + C_4 \sin(\lambda+1)\theta \quad (9)$$

و معادله $\phi = 0$ که از روابط تعادل و سازگاری و بدون حضور نیروهای کالبدی بدست آمده است را ارضاء می‌کند.



شکل-۵: مؤلفه‌های قطبی تنش

شرایط مرزی حاکم به صورت زیر می‌باشند (رجوع شود به شکل-۵).

$$\sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{در} \quad \theta = \pm\alpha \quad (10)$$

با استفاده از معادلات ۸ و شرایط مرزی ۱۰ و معادله

بایهارمونیک می‌توان معادله دیفرانسیل درجه چهار زیر را بدست آورد.

$$\frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^4} + 2(\lambda^2 + 1) \frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} - (\lambda^2 - 1)^2 F(\theta) = 0 \quad (11)$$

که در آن شرایط زیر حاکم خواهد بود.

بی‌نهایت به دو ریشه و سپس به تعداد بی‌نهایت تغییر می‌کند. همچنین، حداقل یک ریشه حقیقی متقارن و یک ریشه نامتقارن با مقادیر کمتر از یک وجود دارد و اینها ریشه‌هایی هستند که باعث وجود تنشهای تکین در نوک ترک می‌شوند. برای یک مقدار معلوم λ ، اگر C_1 و C_2 غیر صفر باشند، نتیجتاً C_2 و C_4 باید صفر باشند و در نتیجه تابع تنش ۸ یک تابع زوج از λ خواهد بود که سبب توزیع تنش بصورت متقارن می‌شود. توزیع تنش نامتقارن زمانی وجود خواهد داشت که تابع تنش یک تابع فرد از λ باشد، یعنی با جایگذاری مقادیر ویژه در معادله ۱۴، C_3 و C_1 صفر شده و C_2 و C_4 غیر صفر گردند.

جدول - ۱: ریشه‌های حقیقی و مختلط معادلات ۱۳ و ۱۶

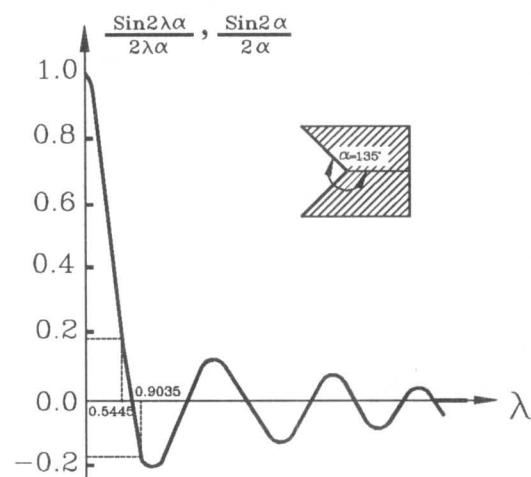
شماره	نامتقارن حقیقی		متقارن حقیقی	
	مجازی	مجازی	مجازی	مجازی
۱	۰/۵۴۴۴۸	۰/۰	۰/۹۰۸۵۲	۰/۰
۲	۱/۶۲۹۲۵	±۰/۲۳۱۲۵	۲/۳۰۱۳۲	±۰/۳۱۵۸۴
۳	۲/۹۷۱۸۴	±۰/۳۷۳۹۳	۳/۶۴۱۴۱	±۰/۴۱۸۷۹
۴	۴/۳۱۰۳۷	±۰/۴۵۵۴۹	۴/۹۷۸۸۹	±۰/۴۸۶۶۲
۵	۱/۶۴۷۱۰	±۰/۵۱۳۶۸	۶/۳۱۵۰۷	±۰/۵۳۷۶۳

در اینجا مقادیر ویژه‌ای که باعث غیر صفر شدن C_1 و C_3 باشند بازیز نویس (۱) و مقادیر ویژه‌ای که سبب غیر صفر شدن C_2 و C_4 می‌شوند، بازیز نویس (۲) نشان داده می‌شوند. در نتیجه مقدار ویژه λ در معادله ۱۵-الف، λ_1 و در معادله ۱۵-ب، λ_2 خواهد بود.

برای بدست آوردن معادلات توزیع تنش در یک شیار با زاویه دلخواه، تمام توابع تنش متقارن و نامتقارن را باید جمع کرد. تابع تنش ایری^۱ در نمادگذاری جمع به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = \pm \frac{\sin 2\lambda\alpha}{2\lambda\alpha} \quad (16)$$

شکل - ۶ نمودار حل ترسیمی معادله ۱۶ می‌باشد. در این شکل منحنی ممتد روی محور عمودی رسم شده‌اند. در این شکل منحنی پیوسته ($\sin 2\lambda\alpha/2\lambda\alpha$) بر حسب λ برای حالت خاص شیار ($\alpha = \frac{3\pi}{4}$) می‌باشد و خطوط افقی منقطع مقادیر $\sin 2\lambda\alpha/2\lambda\alpha$ برای ($\alpha = \frac{3\pi}{4}$) می‌باشد. محل تقاطع خطوط افقی منقطع با منحنی پیوسته، ریشه‌های حقیقی در معادله ۱۶ را مشخص می‌کند.



شکل - ۶: حل ترسیمی ریشه‌های حقیقی برای شیار ۹۰ درجه [۷]
ریشه‌های حقیقی و بعضی از ریشه‌های مختلط معادله ۱۶ در جدول - ۱ نشان داده شده است. برای $\alpha = 180^\circ$ (شیار صفر درجه) و $\alpha = 90^\circ$ (شیار ۱۸۰ درجه) تعداد نامحدودی ریشه‌های حقیقی وجود دارد.

برای شیارهایی با زاویه بین صفر و 180° درجه تنها تعداد محدودی ریشه‌های حقیقی و تعداد نامحدودی ریشه‌های مختلط وجود دارد. باید توجه داشت همزمان با تغییر زاویه شیار از صفر تا 180° درجه تعداد ریشه‌های حقیقی از

مرتبه r^{λ} می باشند. در نتیجه، امکان اینکه مقدار λ در حل معادله ۱۶ کوچکتر از صفر باشد مستغای می گردد. زیرا یک مقدار منفی سبب ایجاد تغییر مکانهای نامحدود در نوک ترک خواهد شد. جهت از بین بردن تکینگی، ضرایب شدت تنش در حالت I و II بصورت زیر تعریف می شوند.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi)^{\frac{1}{2}} r^{1-\lambda_1} \sigma_\theta \quad \text{در } \theta = 0 \quad (20)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi)^{\frac{1}{2}} r^{1-\lambda_1} \tau_{r\theta} \quad \text{در } \theta = 0 \quad (21)$$

از تعریف بالا ثابت‌های C_1 و C_2 که بر حسب K_I و K_{II} می باشند، بصورت زیر بدست می آیند.

$$C_1 = Q_1 K_I \quad (22)$$

$$C_2 = -Q_2 K_{II} \quad (23)$$

که در آن $Q_1 = Q_2$ برابرند با:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + B_1)(\lambda_1 + 1) \lambda_1$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [(\lambda_2 - 1) + B_2(\lambda_2 + 1)] \lambda_2$$

شکل نهائی تنشها بر حسب K_I و K_{II} بصورت زیر درخواهد آمد.

$$\sigma_r = k_I Q_1 r^{\lambda_1-1} [F_1(\theta)] - k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-1} [F_2(\theta)] \quad (24)$$

$$\sigma_\theta = k_I Q_1 r^{\lambda_1-1} [\lambda_1(\lambda_1 + 1) F_3(\theta)] - k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-1} [F_4(\theta) \lambda_2(\lambda_2 + 1)] \quad (25)$$

$$\tau_{r\theta} = k_I Q_1 r^{\lambda_1-1} [\lambda_1 F_5(\theta)] + k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-1} [\lambda_2 F_6(\theta)] \quad (26)$$

اکنون با توجه به نتایج بدست آمده مجموع تنشهای اصلی برابر خواهد بود با:

$$\phi = \sum_{i=1}^{\infty} c_{1i} r^{\lambda_1+1} [\cos(\lambda_1 - 1)\theta + B_{1i} \cos(\lambda_1 + 1)\theta] + \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i} r^{\lambda_2+1} [\sin(\lambda_2 - 1)\theta + B_{2i} \sin(\lambda_2 + 1)\theta] \quad (17)$$

از آنجاییکه تنشهای تکین در اکثر شیارها با زوایای مختلف فقط از مقادیر ویژه اول و یادو مقدار ویژه اول بدست می آید، لذا یک تقریب با دو پارامتر اولیه از معادلات تنش در نظر گرفته خواهد شد و این امر فقط به جهت سهولت در کار صورت می گیرد. در نتیجه تابع تنش ϕ را می توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\phi = c_1 r^{\lambda_1+1} [\cos(\lambda_1 - 1)\theta + B_1 \cos(\lambda_1 + 1)\theta] + c_2 r^{\lambda_2+1} [\sin(\lambda_2 - 1)\theta + B_2 \sin(\lambda_2 + 1)\theta] \quad (18)$$

از رابطه بالا و معادلات تنش در محور مختصات قطبی، مؤلفه‌های قطبی تنش برای یک گوشه مقعر به صورت زیر بدست می آید.

$$\sigma_r = C_1 r^{\lambda_1-1} [F_1(\theta)] + C_2 r^{\lambda_2-1} [F_2(\theta)] \quad (19\text{-الف})$$

$$\sigma_\theta = C_1 r^{\lambda_1-1} [(\lambda_1 + 1) F_3(\theta)] + C_2 r^{\lambda_2-1} [\lambda_2(\lambda_2 + 1) F_4(\theta)] \quad (19\text{-ب})$$

$$\tau_{r\theta} = C_1 r^{\lambda_1-1} [\lambda_1 F_5(\theta)] - C_2 r^{\lambda_2-1} [\lambda_2 F_6(\theta)] \quad (19\text{-ج})$$

در رابطه فوق $F_1(\theta) = F_2(\theta) = F_3(\theta) = F_4(\theta)$ بصورت زیر می باشند.

$$F_1(\theta) = [\lambda_1(3 - \lambda_1) \cos(\lambda_1 - 1)\theta - \lambda_1(\lambda_1 + 1) B_1 \cos(\lambda_1 + 1)\theta]$$

$$F_2(\theta) = [\lambda_2(3 - \lambda_2) \sin(\lambda_2 - 1)\theta - \lambda_2(\lambda_2 + 1) B_2 \sin(\lambda_2 + 1)\theta]$$

$$F_3(\theta) = [\cos(\lambda_1 - 1)\theta + B_1 \cos(\lambda_1 + 1)\theta]$$

$$F_4(\theta) = [\sin(\lambda_2 - 1)\theta + B_2 \sin(\lambda_2 + 1)\theta]$$

همانطور که در معادلات ۱۹ مشاهده می شود تکینگی ها از

مرتبه $r^{\lambda-1}$ می باشند. ویلیامز [۵] نشان داد که تغییر مکانها از

همچنین

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_1 + \sigma_2 = k_I Q_1 r^{\lambda_1-1} [F_1(\theta) + \lambda_1 (\lambda_1+1) F_3(\theta)] -$$

$$\vec{r}' = \delta_m (r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j})$$

$$k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-1} [F_2(\theta) + \lambda_2 (\lambda_2+1) F_4(\theta)]$$

که در آن δ_m ضریب بزرگنمایی می‌باشد و مقدار آن برابر است

با:

$$\delta_m = (z_o \pm z_i)/z_i$$

z_i در رابطه فوق فاصله منبع نور از نمونه می‌باشد.

با قرار دادن مقدار بردارهای \vec{r}' و \vec{W} در رابطه 30° بردار \vec{R}' بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \vec{R}' = & \{ [\delta_m r \cos\theta + P[4\lambda_1(\lambda_1+1)k_I Q_1 r^{\lambda_1-2} \cos(\lambda_1-2)\theta \\ & - 4\lambda_2(\lambda_2-1)k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-2} \sin(\lambda_2-2)\theta]] \hat{i} + [\delta_m r \sin\theta + \\ & P[-4\lambda_1(\lambda_1-1)k_I Q_1 r^{\lambda_1-2} \sin(\lambda_1-2)\theta - 4\lambda_2(\lambda_2-1)k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-2} \\ & \cos(\lambda_2-2)\theta]] \hat{j} \} \quad (31) \end{aligned}$$

و با بصورت مجموع برداری، \vec{R}' برابر خواهد بود با

$$\vec{R}' = \{x'_i + y'_i\}$$

برای اینکه یک منحنی تکین کاستیک روی صفحه تصویر بوجود آید لازم است که مقدار مؤلفه z از بردار \vec{R}' یک مقدار حداقل بوده در حالیکه مقدار مؤلفه z آن ثابت باشد و یا بالعکس. یعنی در حالیکه مقدار مؤلفه z از بردار \vec{R} ثابت است، مقدار مؤلفه z آن یک مقدار حداقل یا حداقل باشد [۱۵].

برای تحقق شرایط فوق باید دترمینان ژاکوبی آن برابر با

صفر باشد. یعنی

$$J = \frac{\partial(x', y')}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial r} & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial r} & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 0$$

با جایگذاری مقادیر x' و y' و مشتقهای جزئی آنها و یا با

قرار دادن $\mu = \frac{K_{II}}{K_I}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_1 r^{(\lambda_1-3)} + A_2 \mu^2 r^{(\lambda_2-3)} + A_3 \mu r^{(\lambda_1+\lambda_2-6)} \sin(\lambda_1 - \lambda_2)\theta \\ = \left(\frac{\delta_m}{K_P} \right)^2 \quad (32) \end{aligned}$$

سپس با قرار دادن رابطه فوق در معادله ۷ بردار \vec{W} به صورت زیر درخواهد آمد.

$$\begin{aligned} \vec{W} = & P \{ [k_I Q_1 r^{\lambda_1-2} (\lambda_1-1) [F_1(\theta) + \lambda_1 (\lambda_1+1) F_3(\theta)] - \\ & k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-2} (\lambda_2-1) [F_2(\theta) + \lambda_2 (\lambda_2+1) F_4(\theta)]] \hat{u} \\ & + \{ [k_I Q_1 r^{\lambda_1-2} [F'_1(\theta) + (\lambda_1+1) \lambda_1 F'_3(\theta)] - \\ & k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-2} [F'_2(\theta) + (\lambda_2+1) \lambda_2 F'_4(\theta)]] \hat{v} \} \} \quad (28) \end{aligned}$$

در رابطه فوق $P = -Chz$ و $F'(\theta)$ ها مشتقهای $F(\theta)$ با جایگذاری مقادیر $F(\theta)$ و $F'(\theta)$ در معادله ۲۸ و با استفاده از روابط

$$\hat{u} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}, \hat{v} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

محور مختصات از سیستم uv به سیستم کارتزین xy تبدیل می‌شود. کاربرد این سیستم ساده‌تر می‌باشد زیرا در صفحه تصویر قرار داشته و مرکز آن در نوک شیار (O) است.

سپس با استفاده از روابط مثلثاتی زیر

$$\sin(u \pm t) = \sin u \cos t \pm \cos u \sin t$$

$$\cos(u \pm t) = \cos u \cos t \pm \sin u \sin t$$

و انجام چند عمل ساده جمع و تفاضل رابطه زیر بدست

می‌آید.

$$\begin{aligned} \vec{W} = & P \{ [4\lambda_1(\lambda_1-1) k_I Q_1 r^{\lambda_1-2} \cos(\lambda_1-2)\theta - \\ & 4\lambda_2(\lambda_2-1) k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-2} \sin(\lambda_2-2)\theta] \hat{i} + [-4\lambda_1(\lambda_1-1) \\ & k_I Q_1 r^{\lambda_1-2} \sin(\lambda_1-2)\theta - 4\lambda_2(\lambda_2-1) k_{II} Q_2 r^{\lambda_2-2} \cos(\lambda_2-2)\theta] \hat{j} \} \quad (29) \end{aligned}$$

همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود بردار \vec{R}' را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\vec{R}' = \vec{r}' + \vec{W} \quad (30)$$

همانطور که در رابطه بالا مشاهده می شود در شیارها تنها برای حالتی که $\mu = 0$ باشد، λ مستقل از θ خواهد بود.
 ۳- برخلاف نتایج بدست آمده برای حالت مرکب در ترکها (شیار صفر درجه) که در آن λ مستقل از θ می باشد، رابطه 32 نشان می دهد علاوه بر اینکه λ تابعی از K_{II} و خواص جنس نمونه است تابعی از θ نیز می باشد و نتیجتاً منحنی اولیه برای صفحات دارای شیار یک دایره کامل خواهد بود. برای اینکه چگونگی تغییرات λ نسبت به θ بهتر مشخص شود، با استفاده از یک برنامه کامپیوتی و به روش سعی و خطای مقادیر λ به ازاء هر 1° رادیان بدست آمده و در جدول زیر نسبت اختلاف λ در هر حالت نشان داده شده است.

جدول - ۲: نسبت اختلاف λ برای شیارهای مختلف (درصد)
 نسبت اختلاف λ $= \frac{\lambda_{\text{حداکثر}} - \lambda_{\text{حداقل}}}{\lambda_{\text{حداکثر}}} \times 100$

$\mu=10$	$\mu=5$	$\mu=3$	$\mu=1$	زاویه شیار
%۲۱	%۱۱/۹	۴/۹	%۲/۴	۹۰
%۲۵	%۱۶/۵	%۱۰/۷	%۳/۸	۷۵
%۱۸/۸	%۱۸	%۱۳/۳	%۴/۹	۶۰
%۹/۵	%۱۳/۵	%۱۲/۹	%۶	۴۵
%۳/۷	%۶/۶	%۸/۴	%۵/۷	۳۰
%۱	%۲/۱	%۳	%۳/۵	۱۵

اکنون سؤالی که مطرح می باشد این است که آیا می توان مقدار λ به ازاء یک θ مشخص مثلاً 0° را ثابت فرض نمود و به ازاء آن مقدار منحنی کاستیک را رسم نمود؟
 به نظر اطلاعات بدست آمده در جدول - ۲ نمی تواند بطور کامل جوابگوی این سؤال باشد به همین منظور و برای بررسی دقیق تر شیارها در حالات مختلف، منحنی کاستیک یک بار با λ متغیر و بار دیگر با λ ثابت بطور همزمان بر روی یک صفحه ترسیم شد (شکل - ۷). در اینصورت عملأ اثر نسبت اختلاف λ در منحنی کاستیک در مقایسه با λ ثابت بهتر

در روابط بالا ثابت‌های A_1 و A_2 و A_3 برابرند با:

$$A_1 = 16\lambda_1^2 (\lambda_1 - 1)^2 (\lambda_1 - 2)^2 Q_1^2$$

$$A_2 = 16\lambda_2^2 (\lambda_2 - 1)^2 (\lambda_2 - 2)^2 Q_2^2$$

$$A_3 = 32\lambda_1\lambda_2 (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 2)Q_1 Q_2$$

همانطور که در روابط 32 می توان مشاهده نمود، رتبه تکینگی در شیارهای V شکل را نمی توان یکسان فرض نمود، زیرا برای یک ترک (شیار صفر درجه) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0/5$ و $Q_1 = Q_2 = 0/50145$ می باشد در حالیکه برای یک شیار 30° درجه $\lambda_1 = 0/54448$ و $Q_1 = 0/59812$ و برای یک شیار 90° درجه $\lambda_1 = 0/90856$ و $Q_1 = 0/90856$ می باشد.

جهت بررسی دقیق تر رابطه 32 و همچنین مقایسه آن با روابط بدست آمده برای ترکهای صفر درجه در حالت مرکب، آن را در چند حالت زیر بررسی می نماییم:

۱- برای یک ترک صفر درجه $\lambda_1 = \lambda_2 = 0/5$ می باشد. با این مقادیر، $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$ و $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$ خواهد شد و در نتیجه رابطه 32 به صورت زیر در خواهد آمد.

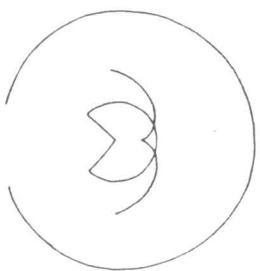
$$r = r_0 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{\text{ch}z}{\sqrt{2\pi\delta m}} \right)^2 (k_I^2 + k_{II}^2)^{\frac{1}{5}} \quad (33)$$

با قرار دادن $\text{ch}z = \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}}$ در معادله 33 همان معادله هایی که توسط تشورکریس [۱۵] و سلطانی [۱۸] بدست آمده است، نتیجه خواهد شد. قابل ذکر است که در رابطه 33 یک ثابت بوده و مستقل از θ می باشد و در نتیجه منحنی اولیه کاستیک برای ترکها (شیار صفر درجه) یک دایره خواهد بود.
 ۲- زمانیکه فقط حالت اول (حالت بازشدن) موجود باشد یعنی وقتیکه $K_{II} = 0$ باشد، رابطه 32 به صورت زیر در خواهد آمد.

$$r = r_0 \left[\frac{\delta_m}{\sqrt{A_1 P K_I}} \right]^{\frac{1}{\lambda_1 - 3}} \quad (34)$$

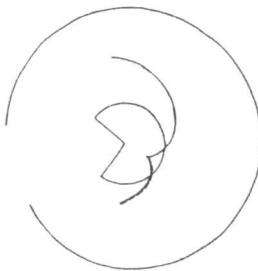
میانگین ۲ حداکثر و ۲ حداقل می‌باشد.

قابل مشاهده خواهد بود. قابل ذکر است که ۲ ثابت از رابطه ۳۲
و به ازاء $\theta = 0$ بدست آمده است، زیرا این مقدار تقریباً



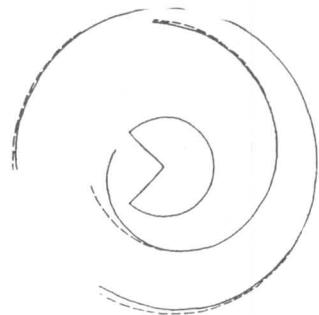
$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\mu = 0$$



$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\mu = 5$$



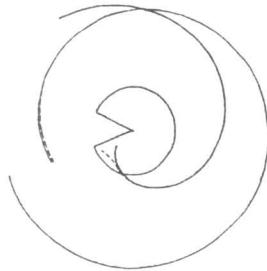
$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\mu = 30$$



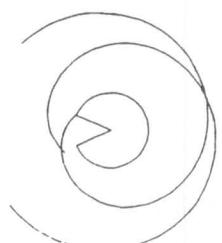
$$\alpha = \frac{7\pi}{8}$$

$$\mu = 1$$



$$\alpha = \frac{7\pi}{8}$$

$$\mu = 5$$



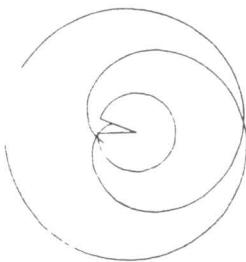
$$\alpha = \frac{7\pi}{8}$$

$$\mu = 30$$



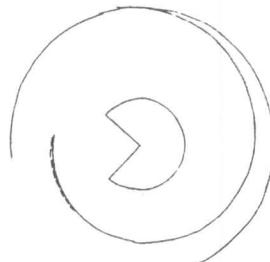
$$\alpha = \frac{8\pi}{9}$$

$$\mu = 1$$



$$\alpha = \frac{8\pi}{9}$$

$$\mu = 15$$



$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\mu = 60$$

..... = Γ
— = Γ ثابت

شکل - ۷: منحنی های کاستیک برای شیارهای مختلف با Γ ثابت و Γ متغیر

فهرست منابعنتیجه گیری

- 1- P.S. Theocaris. "Local yielding around a crack tip in plexi-glass" Journal of Applied Mechanics, 37 (1970), 409 - 414.
- 2- P.S. Theocaris. "Reflected shadow method for the study of constrained zones in cracked plates" Applied Optics, 10, No. 10 (1971), 2240 - 2247.
- 3- P.S. Theocaris. "The reflected shadow method for the study of the constrained zones in cracked birefringent media. "Journal of Strain Analysis, 7, No. 2(1972), 75-83.
- 4- J. H. A. Brahtz. "Stress distribution in a reentrant corner. "Transactions of A. S. M. E., Journal of Applied Mechanics, 1, No. 2 (1933), 31-37.
- 5- M. L. Williams. "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. "Transactions of A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics, 19 (1952), 526-528.
- 6- R.H. Gallagher. "A review of finite element techniques in fracture mechanics. "Proceedings of 1st International Conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics, University College Swanses, 1978.
- 7- M. Mahinfalah. "Photoelastic determination of stress intensity factors for sharp re-entrant corners in plates under extension. "Ph.D. Thesis. Iowa State

با استفاده از روش کاستیک بازتابشی و با در نظر گرفتن یک صفحه شیاردار از جنس شفاف، معادلات لازم جهت بررسی ضرایب شدت تنش برای شیارهای مقعر بدست آمد. روابطه بدست آمده با تغییر زاویه شیار به صفر درجه (ترک) در معادله ۳۲ با نتایج بدست آمده برای ترک در مراجع [۱۸] و [۱۵] کاملاً یکسان می‌باشد و بدینوسیله درستی روابط استخراج شده برای شیارها به اثبات می‌رسد.

بطور کلی در "حالت مرکب" θ شعاع منحنی کاستیک ثابت نبوده و وابسته به مختصات θ می‌باشد. لیکن همانطور که در شکل - ۷ نیز مشاهده می‌شود این وابستگی برای شیارهای مختلف و در ازاء μ های مختلف یکسان نمی‌باشد. برای مثال شیار 90° درجه در حالت $\mu=5$ و شیار 45° درجه از همان حالت که نسبت اختلاف π در آنها تقریباً یکسان می‌باشد را در نظر می‌گیریم. همانطور که مشاهده می‌شود منحنی رسم شده با π ثابت برای شیار 90° درجه تقریباً بطور کامل با منحنی رسم شده با π متغیر منطبق می‌باشد، در حالیکه برای شیار 45° درجه این انطباق کامل نیست. نتیجه‌ای که بطور کلی برای حالت مرکب در رابطه با وابستگی θ نسبت به θ می‌توان بیان نمود این است که برای حالت $\mu=1$ در تمامی شیارها وابستگی θ قابل اغماس می‌باشد. همچنین برای شیارهای کمتر از 20° درجه این وابستگی برای تمام μ ها قابل اغماس است. لیکن برای حالات دیگر باید بطور مستقل بررسی شود مثلاً برای شیار 90° درجه می‌توان شعاع منحنی کاستیک، π را برای μ کوچکتر از 6° و بزرگتر از 60° ثابت فرض نمود.

- University, Ames, Iowa, 1988.
- 8- T.D. Dudderar and R. O. Oregan. "Measurement of the strain field near a crack tip in polymethyl-methacrylate by holographic interferometry." *Experimental Mechanics*, 11, No. 1 (1971), 49-56.
- 9- p. Manogg. "Die licchtablenkung durch eine elastisch beanspruchte plate und die schattanfiguren von kreis und risskerbe. "Clastechniche berichte, 39(1966), 323 - 329 .
- 10- P.S. Theocaris, "Stress singularities at concentrated loads". *Experimental Mechanics*, 30, No. 2(1973) , 511-516.
- 11- P.S. Theocaris. "Determination of crack - opening displacement by the method of caustics. "Journal of Strain Analysis, 9, No. 3(1974), 197-205.
- 12- P.S. Theocaris. "Stress concentration in anisotropic plates by the method of caustics. "Journal of Strain Analysis , 11, No. 3(1979) 154-147.
- 13- J. Beinert and J.f. Kalthoff. "Experimental determination of dynamic stress intensity factors by shadow patterns. "Mechanics of Fracture , 7 (1981), 181-330.
- 14- P.S. Theocaris and N.I. Iokimidis. "An improved method for the determination of mode I stress intensity factors by the experimental method of caustics. "Journal of Strain Analysis. 14, No. 3(1979), 111-118.
- 15- P. S. Theocaris and E.Gdoutos. "An optical method for determining opening mode and edge sliding mode stress intensity factors. Journal of Applied Mechanics, 7 (1972), 91-97.
- 16- P.S. Theocaris and C.G Thieos. "Stress intensity factor in cracked cylindrical shell under tension". *International Journal of Fracture*, 12 (1979) 691-703.
- 17- P.S. Theocaris and G.A. Papadopoulos. "Stress intensity factors from reflected caustics in birefringent plates with cracks. "Journal of Strain Analysis , 16, No. 3(1981), 29-36.
- 18- N. Soltani "Study of mixed mode stress intensity factors using the experimental method of caustics" *Experimetal Mechanics*, Cambridge Massachusetts, 1989.
- 19- D.A. Meya. "Techniques of optical caustics photography" *Engineering Fracture mech.* Vol 43, No. 2, PP. 185-194, 1992.
- 20 - M. Born and E.Wolf. "Principles of Optics" 4th ed. Pergamon Press, London, 1970, 110-113.