(منحنی راجع به محاسبه ساختمان و شرح کامل روش δik در مورد حل آنها)

نوشته :

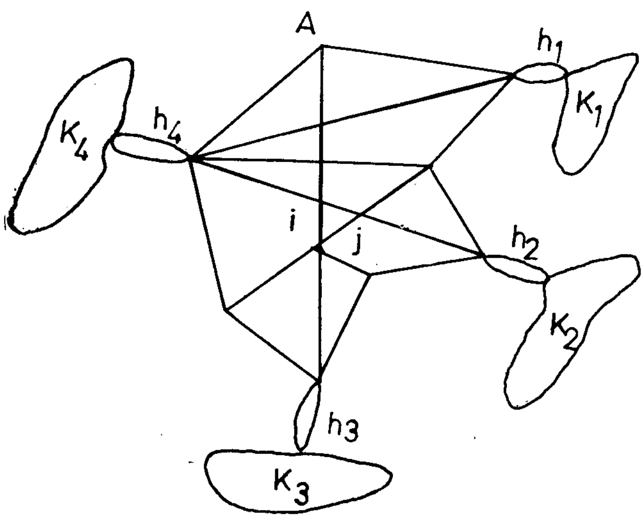
غلامعلی ملول

سال پنجم راه و ساختمان

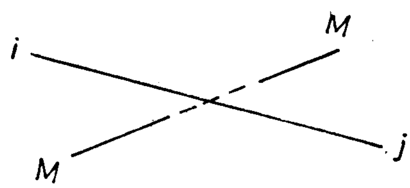
دانشکده فنی

مقدمه

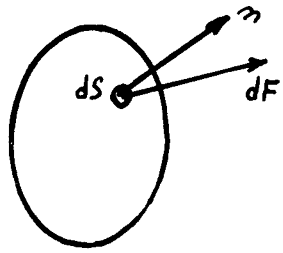
منظور از ساختمان در اینجا مجموعه‌ایست بنام (A) که از عناصر خطی (ij) تشکیل شده باشد. مجموعه A را رابطه‌های h_1 و h_2 و $h_n \cdots$ به‌مجموعه های K_1 و K_2 و $K_n \cdots$ مربوط‌میسازد(شکل ۱). رابط h_i یک یا چند عضو از مجموعه A را به یک یا چند عضو از مجموعه K_1 متصل میکند.



شکل ۱



از تقاطع صفحه‌ای مانند M—M با عنصر (ij) سطحی مطابق (شکل ۲) حاصل میشود.



شکل ۲

بر هر جزء سطح ds از مقطع M—M نیرویی مانند $\vec{dF}$ اثر میکند رابطه (۱) تنش کلی را در جزء سطح ds نشان میدهد :

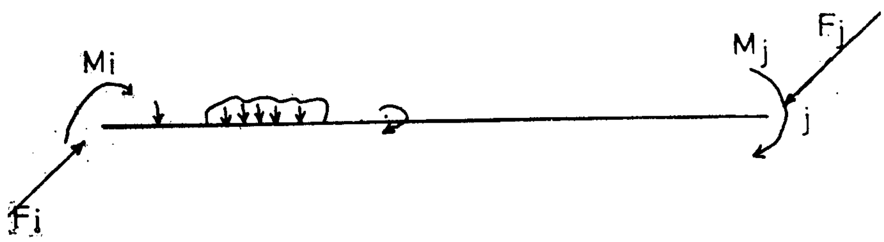
$$\vec{\sigma} = \frac{\overrightarrow{dF}}{ds} \qquad (۱)$$

منظور ازمحاسبه ساختمان - هدف از محاسبه ساختمان حصول دونتیجه زیر است .

۱- تنش در هیچ جزء سطحی از ساختمان از تنش مجاز بیشتر نشود .

۲- تنش‌ها در جزء سطح های مختلف ساختمان تا حدود امکان به تنش‌های مجاز نزدیک شود (تا ساختمان اقتصادی بنا شود)

برای پیدا کردن تنش در جزء سطح های مقاطع مختلف عناصر (ij) کافیست که چهار مجهول $\vec{M_i}$ و $\vec{F_i}$ و $\vec{M_j}$ و $\vec{F_j}$ محاسبه شوند (شکل ۳)



شکل ۳

بادانستن این چهار مجهول و با استفاده از فرمولهای کلاسیک میتوان تنش را در عنصر جزئی سطح مقطع هر عنصر بسادگی بدست آورد .

پس بطورکلی محاسبه ساختمان یعنی تعیین تنش درجزء سطح های مختلف‌آن که تحت اثربارهای وارد وتغییر مکانهای اعمال شده است ، میباشد .

تعریف عکس‌العمل در (شکل ۱) میتوانیم رابطه R_1 را برداشته و بجای آن تأثیرات مجموعهٔ K_1 برروی‌مجموعه (A) راجایگزین کردتأثیرات‌مجموعه K_1 را برمجموعه A عکس‌العمل‌مجموعه K_1 برمجموعه

A مینامیم. واضح است که مجموعهٔ K_1 برمجموعه A ، ۲ اثر میتواند داشته باشد بشرح زیر :

$$\vec{M}_{k_1}\begin{vmatrix}M_{xk_1}\\M_{yk_1}\\M_{zk_1}\end{vmatrix}\quad \vec{F}_{k_1}\begin{vmatrix}F_{xk_1}\\F_{yk_1}\\F_{zk_1}\end{vmatrix}\quad \vec{\theta}_{k_1}\begin{vmatrix}\theta_{xk_1}\\\theta_{yk_1}\\\theta_{zk_1}\end{vmatrix}\quad \vec{\delta}_{k_1}\begin{vmatrix}\delta_{xk_1}\\\delta_{yk_1}\\\delta_{zk_1}\end{vmatrix} \qquad (۲)$$

در روابط بالا M_{k_1} لنگر M_{k_1} نیرو θ_{k_1} دوران و δ_{k_1} تغییرمکان مربوط به رابط k_1 میباشند. بطوریکه می‌بینیم برای محاسبهٔ ساختمان A اطلاع از چگونگی ومشخصات مجموعه های K_1 و ... K_n لازم میباشد. عملاً در محاسبات اولیه با فرض :

$$\vec{\theta}_{ki} = ۰ \qquad \vec{\delta}_{ki} = ۰ \qquad (۳)$$

مسأله را حل کرده سپس برمبنای معلومات حاصله $\vec{\theta}_{ki}$ و $\vec{\delta}_{ki}$ را بدست میآورند و مجدداً تأثیرات دو عامل اخیر را در ساختمان منظور میکنند.

مثلاً ابتدا فرض میکنیم که پی های یک ساختمان هیچگونه تغییرشکلی نمیدهند با این فرض ساختمان را حل میکنند براساس لنگر - نیروی محوری و تلاش برشی ستونها تغییر شکل پی ها را حساب کرده واثراین تغییر شکل ها را در مقاطع مختلف ساختمان منظور میکنند.

تعریف ساختمانهای (ایزواستاتیک) - ساختمان A را نسبت به مجهول X (X میتواند لنگر یا نیرو در مقطعی باشد) ایزواستاتیک گویند که X بوسیله معادلات تعادلی رابطه (٤) بدست میآید :

$$\Sigma\vec{M} = ۰$$
$$\Sigma\vec{F} = ۰ \qquad (٤)$$

در این مورد X با رابطه زیر مشخص میشود :

$$X = F(R \text{ و } l) \qquad (٥)$$

بعبارت دیگر وقتی ساختمان A نسبت به مجهول (X) ایزواستاتیک باشد X فقط تابعی از وضعیت بارگذاری R و طول عناصر l میباشد.

ساختمان نامعین (هیپراستاتیک) - ساختمان A را نسبت به مجهول x هیپراستاتیک گویند که x رامنحصراً بوسیله روابط (٤) بتوان بدست آورد.

در این مورد x با رابطه زیر مشخص میشود :

$$x = F(R \text{ و } l \text{ و } b \text{ و } h \text{ و } E_1 \text{ و } E_2 \text{ و } \ldots) \qquad (٦)$$

بعبارت دیگر موقعی که ساختمان نسبت به مجهول x هیپراستاتیک است مجهول x تابعی از نحوه بارگذاری R طول عناصر l عرض مقاطع b ارتفاع مقاطع h وضریب ارتجاعی مواد وتغییر مکان ، ... خواهد بود.

پس برای حل یک ساختمان هیپراستاتیک ناچار میبایستی ابتدا یک طرح مقدماتی برای آن درنظر گرفت. بطور کلی میتوان ساختمانها را به دو دسته ایزواستاتیک وهیپراستاتیک بشرح زیر تقسیم کرد :

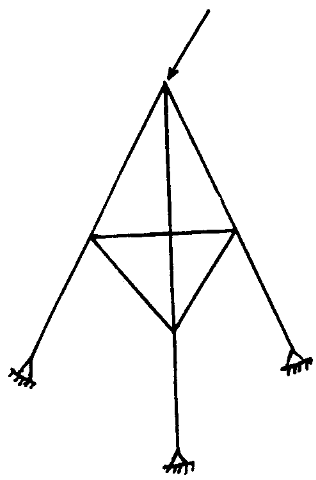
الف ـ ساختمانهای ایزواستاتیک:

ساختمانهایی هستند که از نظر مجهولات داخلی ومجهولات خارجی (عکس العملها) ایزواستاتیک هستند .

ب ـ ساختمانهای هیپراستاتیک.

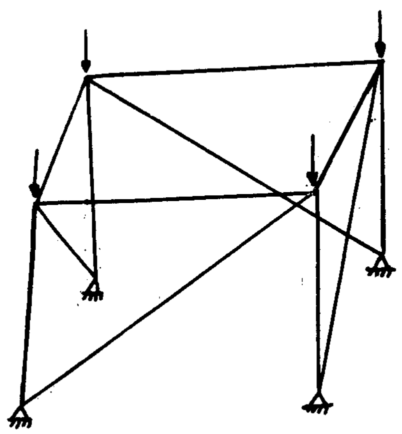
ساختمانهایی هستند که یا ازنظر مجهولات خارجی ویا ازنظر مجهولات داخلی ویا ازنظر مجهولات داخلی و خارجی هیپراستاتیک باشند.

مثلاً (اشکال ٤ و٥) ایزواستاتیک میباشند. (شکل ٦) هیپراستاتیک است (ازنظرداخلی)و(شکل ٧) (ازنظر خارجی) هیپراستاتیک است .



4

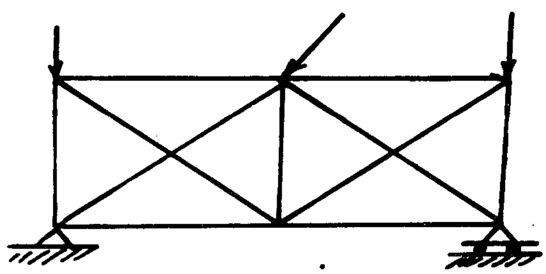
شکل ٤



5

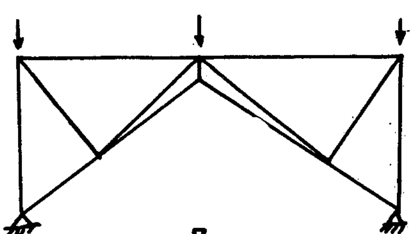
شکل ٥

دراین شکل بارها قائم میباشند.



6

شکل ٦



7

شکل ٧

بطور کلی چنانچه n مجهول داخلی وعکس‌العمل موجود باشد وبرای آنها m معادله تعادل مستقل ازهم بتوانیم بنویسیم N درجه هیپراستاتیکی از رابطه (۷) بدست میآید :

$$N=n-m \qquad (۷)$$

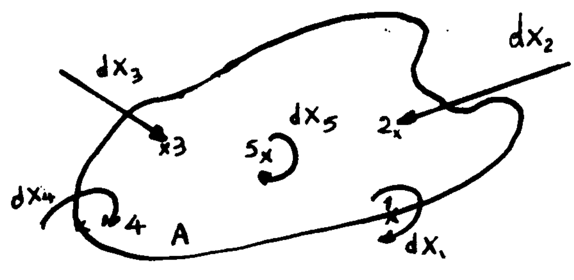
«محاسبه مجهولات ساختمان»

N مجهول ساختمان را میتوان بطرق مختلف محاسبه نمود. روش δ_{ik} دقیق‌ترین روش محاسبه مجهولات ساختمانهای هیپراستاتیک است که ذیلاً بطور کامل بشرح این‌طریقه می‌پردازیم.

در روش δ_{ik} حل یک ساختمان هیپراستاتیک درجه N منجر به‌حل N معادله N مجهولی خطی خواهد شد. و با تسهیلاتی که اکنون ماشین حساب الکترونیک درحل این معادلات ایجاد کرده، حل ساختمانهای بسیارپیچیده با این روش ممکن وساده گشته است. اساس بدست‌آوردن‌معادلات مذکور دوقضیه انرژی تغییرشکل و پیوستگی میباشد. ذیلاً دوقضیه فوق را تشریح کرده و با کمک آنها معادلات روش δ_{ik} را بدست بیاوریم.

الف ـ قضیه انرژی تغییر مکان.

فرض کنیم که ساختمان A تحت‌اثر نیروها یا لنگرهائی مانند dx_1 و dx_2 و ... dx_n قرارگرفته باشد (شکل۸).



شکل ۸

طبق اصل بقای انرژی کارانجام‌شده توسط این نیروها با انرژی ذخیره شده درساختمان A مساوی میباشد اگر اختلاف انرژی بصورت حرارت وغیره صرفنظر گردد بعبارت ریاضی میتوان چنین نوشت:

$$dW_A=\overrightarrow{dX_1}\cdot\vec{\delta_1}+\overrightarrow{dX_2}\cdot\delta_2+\cdots\overrightarrow{dX_n}\cdot\vec{\delta_n} \qquad (۸)$$

dW_A انرژی ذخیره شده درساختمان A و $\vec{\delta_1}$ و .... $\vec{\delta_n}$ تغییرشکلهای مربوط به‌نقاط ۱ و ۲ و ... n درامتدادهای X_1 و X_2 و ... X_n میباشند. مثلاً در (شکل۸) $\vec{\delta_1}$ دوران کل نقطه(۱) در صفحه dx_1 و $\vec{\delta_2}$ تغییر مکان کل نقطه ۲ درامتداد $\overrightarrow{dX_2}$ میباشند.

چنانچه طرفین رابطه ۸ را بر dx_1 تقسیم کنیم و با توجه باینکه :

$$\frac{dX_1}{dX_1}=1 \qquad \frac{dX_2}{dX_1}=0 \text{ و } \dots\dots \tag{۹}$$

چنین نتیجه میشود :

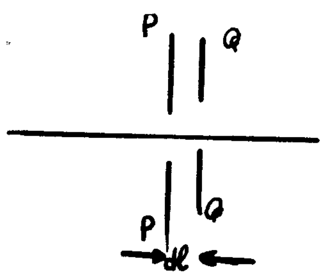
ویهمین ترتیب

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_A}{\partial X_1}=\delta_1 \\ \dfrac{\partial W_A}{\partial X_2}=\delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial W_A}{\partial X_n}=\delta_n \end{cases} \tag{۱۰}$$

ب ـ قضیه پیوستگی ـ درساختمانهای دوبعدی

چنانچه دوصفحهٔ $\rho\rho$ و QQ که به‌فاصلهٔ dl ازیکدیگرهستندعنصر (ij) راقطع کنندو Θ_ρ و V_ρ و U_ρ به‌ترتیب دوران، تغییرمکان قائم‌وتغییرمکان افقی مقطع $\rho\rho$ نسبت‌به‌وضع‌اولیه و Θ_Q و V_Q و U_Q هم‌دوران، تغییرمکان قائم و تغییر مکان افقی QG نسبت به‌وضع اولیه باشد.

طبق قضیه پیوستگی روابط ۱۱ برقرار است (شکل ۹).



شکل ۹

$$\begin{aligned} \Theta_Q &= \Theta_\rho + \frac{\partial \Theta}{\partial l} dl \\ V_Q &= V_\rho + \frac{\partial v}{\partial l} dl \\ U_Q &= U_\rho + \frac{\partial u}{\partial l} dl \end{aligned} \tag{۱۱}$$

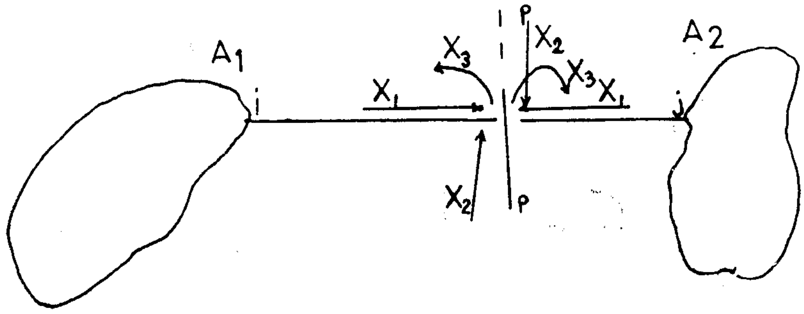
وتوابع $\frac{\partial \theta}{\partial l}$ و $\frac{\partial v}{\partial l}$ و $\frac{\partial u}{\partial l}$ توابع محدودی خواهند بود. بعبارت دیگر قضیه پیوستگی بیان میکند که نمودارهای نمایش دوران ـ تغییرمکان قائم وتغییرمکان افقی مقاطع دارای توابعی متصل ومحدود میباشند.

بنابراین چنانچه در روابط ۱۱ بجای $dl=0$ قراردهیم روابط ۱۲ حاصل میشود:

$$\Theta_Q=\Theta_\rho$$
$$V_Q=V_\rho \qquad (۱۲)$$
$$U_Q=U_\rho$$

اکنون با استفاده ازقضیه پیوستگی وقضیه انرژی ـ تغییرمکان به‌نتیجهٔ مهم‌زیر خواهیم رسید .

چنانچه صفحه $\rho\rho$ ساختمان A را بدوقسمت پایدار A_1 و A_2 تبدیل کند میتوانیم بگوئیم دوران ـ تغییرمکان قائم و تغییرمکان افقی مقطع ρ ازقسمت A_1 بامقطع ρ ازقسمت A_2 مساویست (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

$$(\Theta\rho)_{A_1}=(\Theta\rho)_{A_2}$$
$$(V\rho)_{A_1}=(V\rho)_{A_2} \qquad (۱۳)$$
$$(U\rho)_{A_1}=(U\rho)_{A_2}$$

ازطرف دیگر طبق قضیهٔ انرژی ـ تغییرمکان داریم :

$$(\Theta\rho)_{A_2}=-\frac{\partial W_{A_2}}{\partial X_3}$$
$$(V\rho)_{A_2}=-\frac{\partial W_{A_2}}{\partial X_2} \qquad (۱۴)$$
$$(U\rho)_{A_2}=-\frac{\partial W_{A_2}}{\partial X_1}$$

$$(\theta\rho)_{A_1}=\frac{\partial W_{A_1}}{\partial X_3}$$
$$(V\rho)_{A_1}=\frac{\partial W_{A_1}}{\partial X_2} \qquad (۱۵)$$
$$(U\rho)_{A_1}=\frac{\partial W_{A_1}}{\partial X_1}$$

با درنظر گرفتن روابط (۱۳ و۱۴ و۱۵) داریم:

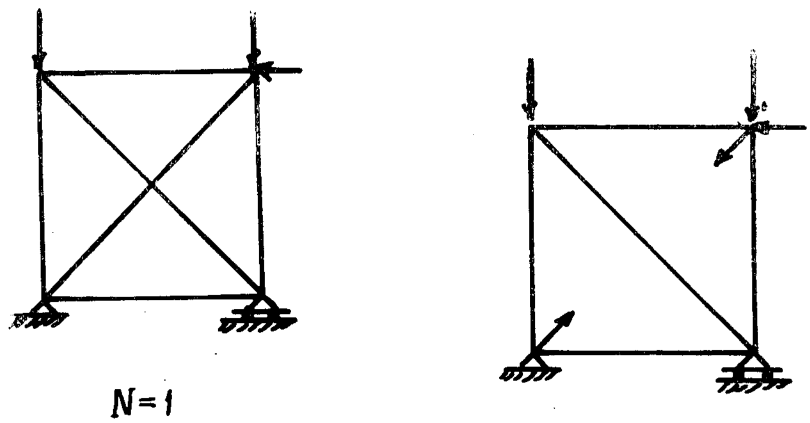
$$(\Theta\rho)_{A1}-(\theta\rho)_{A2}=0\Longrightarrow\frac{\partial W_{A1}}{\partial X_3}+\frac{\partial W_{A2}}{\partial X_3}=\frac{\partial W_{A}}{\partial X_3}=0$$

$$(V\rho)_{A1}-(V\rho)_{A2}=0\Longrightarrow\frac{\partial W_{A1}}{\partial X_2}+\frac{\partial W_{A2}}{\partial X_2}=\frac{\partial W_{A}}{\partial X_2}=0 \qquad (16)$$

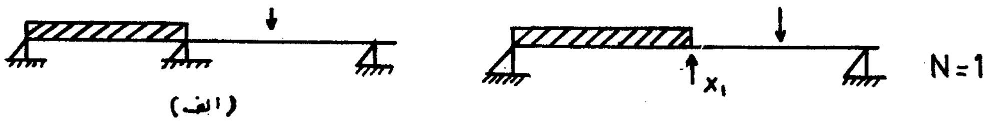
$$(U\rho)_{A1}-(U\rho)_{A2}=0\Longrightarrow\frac{\partial W_{A1}}{\partial X_1}+\frac{\partial W_{A2}}{\partial X_2}=\frac{\partial W_{A}}{\partial X_1}=0$$

فرمولهای ۱۶ گویای این حقیقت هستند که چنانچه X یک مجهول داخلی ازساختمان A باشد دراینصورت مشتق انرژی کل ساختمان A نسبت به این مجهول مساوی صفر است.

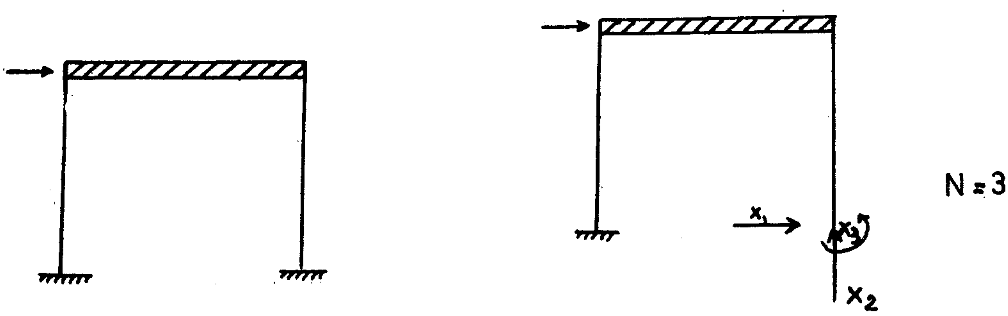
برای حل یک ساختمان هیپراستاتیک درجه N به روش δ_{ik} ابتدا میبایستی ساختمان را به ساختمان یاساختمانهای ایزواستاتیک تبدیل نمود. مثلاً در(شکلهای ۱۱ و۱۲ و۱۳و۱۴ و۱۵ و۱۶ و۱۷) درسمت چپ دستگاههای هیپراستاتیک ودرسمت راست ساختمان های ایزواستاتیک شده مشاهده میشوند.



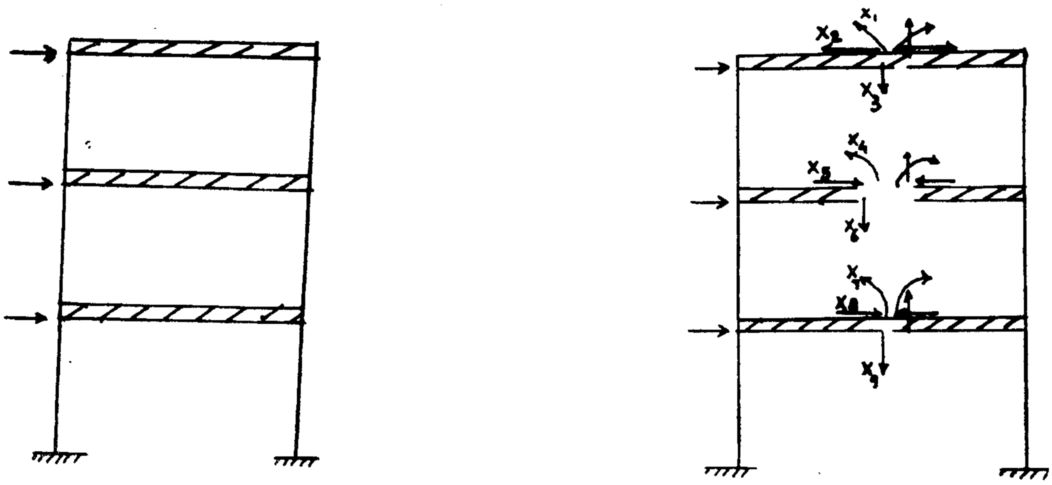
شکل ۱۱



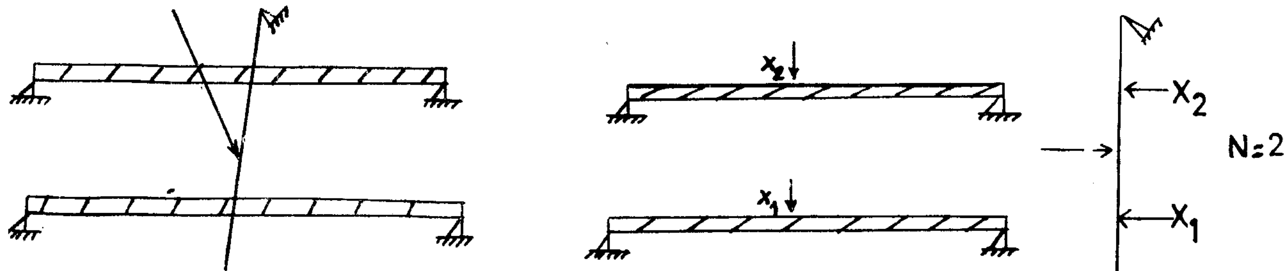
شکل ۱۲



شکل ۱۳

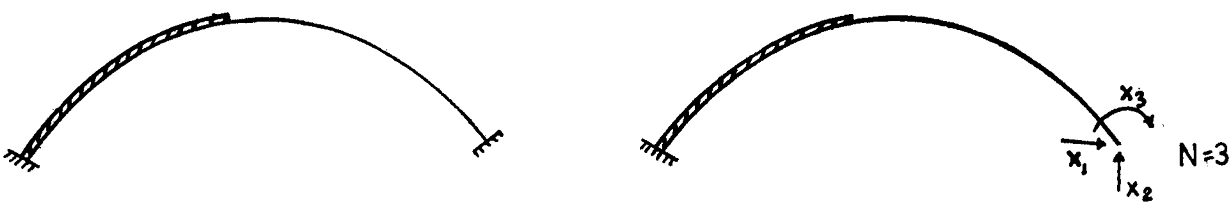


شکل ١٤



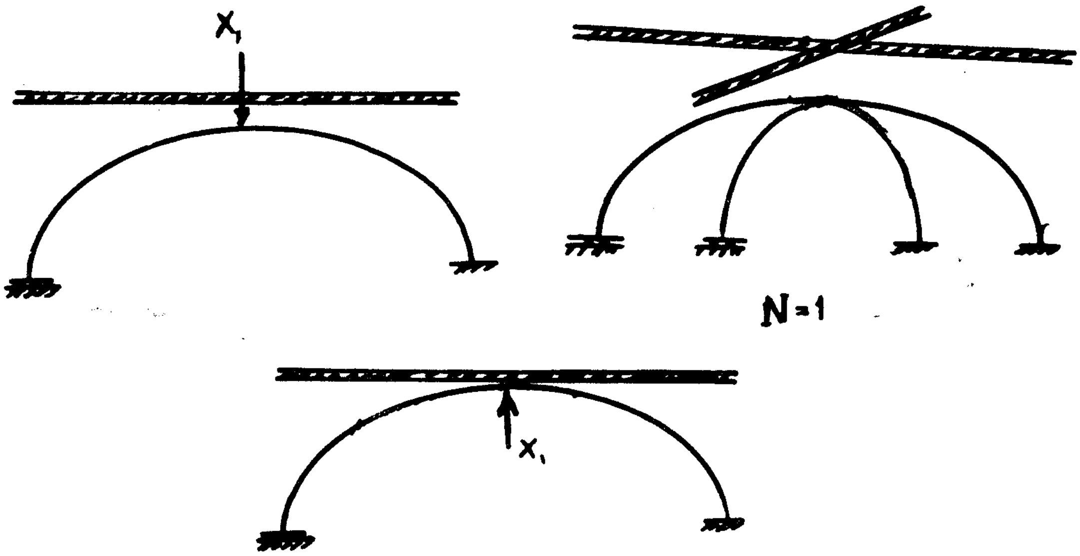
15

شکل ١٥



16

شکل ١٦



شکل ۱۷

اکنون میبایستی که مجهولات X_1 و X_2 و $\cdots$ X_q را محاسبه نمود. درهرمقطع داریم $N=q$.

$$M=X_1m_1+X_2m_2+\cdots\cdot X_qm_q+M_R$$
$$N=X_1n_1+X_2n_2+\cdots\cdots X_qn_q+N_R \qquad (۱۷)$$
$$I=X_1t_1+X_2t_2+\cdots\cdots X_qt_q+I_R$$

وانرژی ساختمان A بارابطه (۱۸) مشخص میشود . ساختمان دارای y عضو است و m_i و n_i و t_i بترتیب لنگر ونیروی محوری ونیروی برشی درمقطع x هستند زمانیکه $X_i=1$ باشد. و M_R و N_R و I_R لنگر ونیروی محوری ونیروی برشی تحت اثر نیروهای خارجی میباشند.

$$W_A=\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{M^2dx}{2EI_2}+\frac{N^2dx}{2EA_2}+\frac{T^2dx}{2GA_2}\eta_2 \qquad (۱۸)$$

دراینجا عناصر مستقیم فرض شده‌اند η ضریبی است بی‌بعد که به‌شکل‌مقطع ارتباط دارد.

و طبق روابط ۱۶ داریم

$$\frac{\partial W_A}{\partial X_i}=0 \qquad (۱۹)$$

چنانکه X_i یک مجهول خارجی باشد رابطه ۱۹ محقق است و چنانکه X_i عکس‌العمل باشد چون فرض شده است که تکیه‌گاه i دارای تغییر شکلی نباشد باز اینرابطه صادق میباشد.

$$\frac{\partial W}{\partial X_1}=0 \quad \frac{\partial W}{\partial \times 2}=0 \quad \cdots\cdot\frac{\partial W}{\partial\times q}=0 \qquad (۲۰)$$

پس :

$$\frac{\partial W}{\partial X_1}=\frac{\partial}{\partial X_1}\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{(X_1m_1+X_2m_2\cdots Xqmq)^2dx}{2EI_2}+ \tag{۲۱}$$

$$\frac{(X_1n_1+X_2n_2\cdots Xqnq)^2dx}{2EA_2}+\frac{(X_1t_1+X_2t_2\cdots X_qt_q)dx\eta_2}{2GA_2}=0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_1}=\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{(X_1m_1+X_2m_2+\cdots X_qm_q)m_1dx}{EI_2}+ \tag{۲۲}$$

$$\frac{(X_1n_1+X_2n_2+\cdots X_qn_q)n_1dx}{EA_2}+\frac{(X_1t_1+X_2t_2+\cdots X_qt_q)t_1dx\eta_2}{GA_2}=0$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial X_1}=X_1\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_1^2dx}{EI_2}+\frac{n_1^2dx}{EA_2}+\frac{t_1^2dx}{GA_2}\eta_2+X_2\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_1m_2dx}{EI_2}+\frac{n_1n_2dx}{EA_2}+\\
&\qquad\frac{t_1t_2dx\eta_2}{GA_2}+\cdots\cdots+\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_1M_Rdx}{EI_2}+\frac{n_1N_Rdx}{EA_2}+\frac{t_1T_Rdx\eta_2}{GA_2}=0\\
&\frac{\partial W}{\partial X_1}=X_1\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_2m_1dx}{EI_2}+\frac{n_2n_1dx}{EA_2}+\frac{t_2t_1dx}{GA_2}\eta_2+X_2\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_2^2dx}{EI_2}+\frac{n_2^2dx}{EA_2}+\\
&\qquad\frac{t_2^2dx}{GA_2}\eta_2+\cdots\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_2M_Rdx}{EI_2}+\frac{n_2N_Rdx}{EA_2}+\frac{t_2T_Rdx}{GA_2}\eta_2=0\\
&\frac{\partial W}{\partial X_3}=0\ \cdots\cdots\cdots=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial W}{\partial X_q}=X_1\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_qm_1dx}{EI_2}+\frac{n_qn_1dx}{EA_2}+\frac{t_qt_1dx}{GA_2}\eta_2+X_2\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_qm_2dx}{EI_2}+\\
&\qquad\frac{n_qn_2dx}{EA_2}+\frac{t_qt_2dx}{GA_2}\eta_2+\cdots\sum_1^2\int_0^{l_2}\frac{m_qM_Rdx}{EI_2}+\frac{n_qN_Rdx}{EA_2}+\frac{t_qT_Rdx}{GA_2}\eta_2=0
\end{aligned}\right. \tag{۲۳}$$

معادلات ۲۳ را میتوانیم بصورت خلاصه زیر بنویسیم .

$$\left\{\begin{array}{l} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\cdots\cdots X_q\delta_{1q}+\Delta_{1R}=0 \\ X_1\delta_{12}+X_2\delta_{22}+\cdots\cdots X_q\delta_{2q}+\Delta_{2R}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1\delta_{q1}+X_2\delta_{q2}+\cdots\cdots X_q\delta_{qq}+\Delta_{qR}=0 \end{array}\right. \qquad (24)$$

و یا

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1q} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \cdots & \delta_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ X_q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_1 R \\ \Delta_2 R \\ \cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot \\ \Delta_q R \end{bmatrix} \qquad (25)$$

بطوریکه ملاحظه میشود عنصر سطر i ام و ستون k ام ماتریس اول بصورت زیر است .

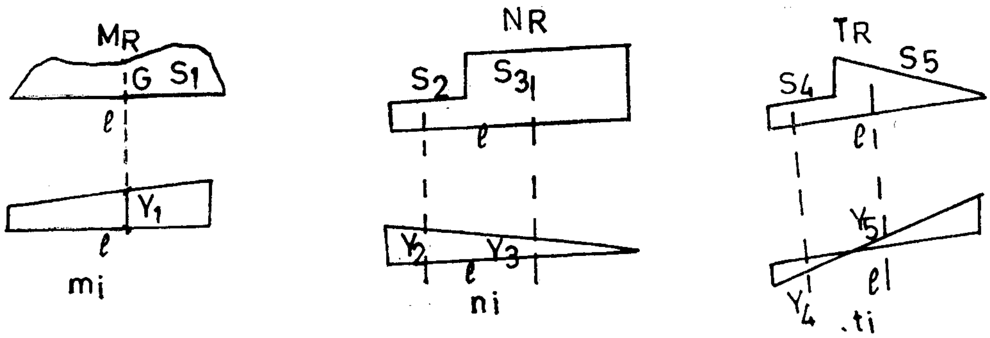
$$\delta_{ik}=\sum_{1}^{2}\int_{0}^{l_2}\frac{m_i m_k dx}{EI_2}+\frac{n_i n_k dx}{EA_2}+\frac{t_i t_k dx}{GA_2}\eta_2 \qquad (26)$$

و همچنین عنصر ستون i ام‌ماتریس سمت چپ بصورت زیراست .

$$\Delta_{iR}=\sum_{1}^{2}\int_{0}^{l_2}\frac{m_i M_R dx}{EI_2}+\frac{n_i N_R dx}{EA_2}+\frac{t_i T_R dx}{EA_2}\eta_2 \qquad (27)$$

بطوریکه ملاحظه میشود ماتریس δ_{ik} ماتریس مربع درجه q متقارن میباشد و عناصر قطری آن همیشه مثبت میباشند .

محاسبه‌ضرایب δ_{ik} و Δ_{iR} ـ میدانیم که منحنی نمایش m_i و n_i و t_i خطی میباشند ومنحنی نمایش M_R و N_R و T_R بسته به نوع بارگذاری خطی یامنحنی میباشند . فرض کنیم‌منحنی نمایش m_i و n_i و t_i و M_R و N_R و T_R برای عضو ۲ ساختمان مطابق اشکال ۱۸ باشد .



شکل ۱۸

چنانکه فرض کنیم :

$$m_i = ax + b \qquad (۲۸)$$

در اینصورت داریم :

$$\int_{\circ}^{l_۲} \frac{m_i M_R dx}{EI_۲} = \frac{۱}{EI_۲} \int_{\circ}^{l_۲} (ax+b) M_R dx = \frac{۱}{EI_۲} \left[a \int_{\circ}^{l_۲} M_R x dx + b \int_{\circ}^{l_۲} M_R dx \right]$$

$$= \frac{۱}{EI_۲} \left[a \frac{\int_{\circ}^{l_۲} M_R x dx}{\int_{\circ}^{l_۲} M_R dx} \int_{\circ}^{l_۲} M_R dx + b \int_{\circ}^{l_۲} M_R dx \right] = \frac{۱}{EI_۲} \left[a \frac{\int_{\circ}^{l_۲} M_R x dx}{\int_{\circ}^{l_۲} M_R dx} + b \right] \int_{\circ}^{l_۲} M_R dx$$

باتوجه به اینکه :

$$x_G = \frac{\int_{\circ}^{l_۲} M_R x dx}{\int_{\circ}^{l_۲} M_R dx} \quad \text{و} \quad S_{M_R} \int_{\circ}^{l_۲} M_R dx$$

داریم :

$$\int_{\circ}^{l_۲} \frac{m_i M_R dx}{EI} = \frac{S_{m_R}}{EI_۲} (a x_G + b) = \frac{S_۱ X_۱}{EI_۲}$$

انتگرال بالا برابر با حاصلضرب سطح زیرمنحنی‌لنگرخمشی درارتفاع نظیر نقطه مرکز ثقل سطح لنگر خمشی در روی منحنی m_i و بهمین ترتیب بسادگی بقیهٔ فاکتورهای روابط ۲۷ و ۲۸ بدست میآیند.

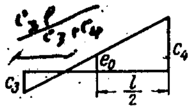
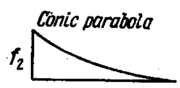
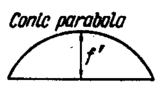
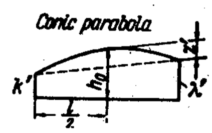
و بطورکلی نتیجه میشود که :

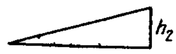
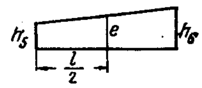
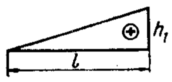
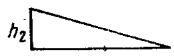
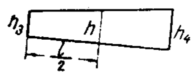
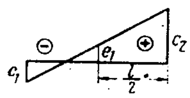
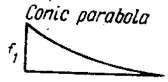
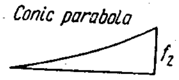
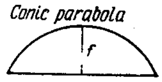
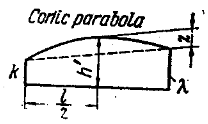
$$\Delta_{iR} = \sum_{۱}^{۲} \frac{S \cdot y}{EI_۲} + \frac{S' y'}{EA_۲} + \frac{S'' y''}{GA_۲} \eta_۲$$

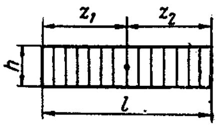
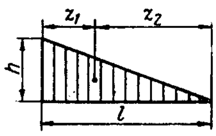
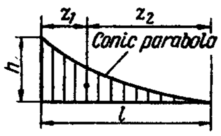
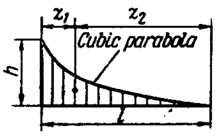
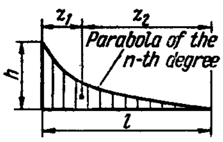
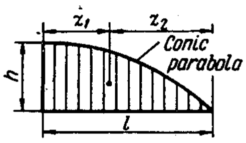
در جداول زیر مقادیر :

$$\int_{0}^{l_2} t_i t_K dx \quad \text{و} \quad \int_{0}^{l_2} m_i n_K dx \quad \text{و} \quad \int_{0}^{l_2} m_i x_K dx$$

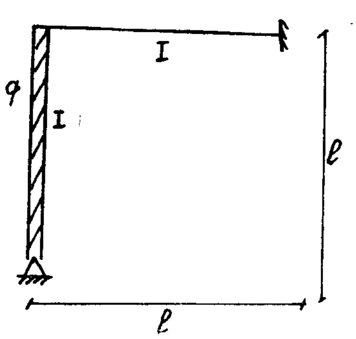
بسته به نوع منحنی‌های آنها داده شده است . و استفاده از این جداول کار محاسبه δ_{ik} را خیلی ساده میکند .

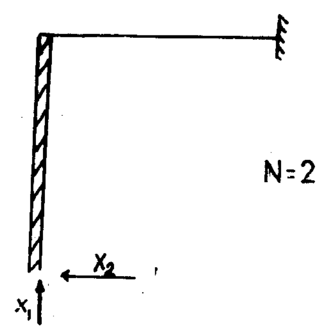
			
$\frac{lh_1}{6}(2c_4-c_3)$	$\frac{lf_2h_1}{12}$	$\frac{lf'h_1}{3}$	$\frac{lh_1}{6}(2h_0+\lambda')$
$\frac{l}{6}h_2(-2c_3+c_4)$	$\frac{lf_2h_2}{4}$	$\frac{lf'h_2}{3}$	$\frac{l}{6}h_2(k'+2h_0)$
$\frac{l}{6}[2(-h_3c_3+h_4c_4)+h_3c_4-h_4c_3]$	$\frac{lf_2}{12}(3h_3+h_4)$	$\frac{lf'}{3}(h_3+h_4)$	$\frac{l}{6}(h_3k'+4hh_0+h_4\lambda')$
$\frac{l}{6}[2(c_1c_3+c_2c_4-c_2c_3-c_1c_4)]$	$\frac{lf_2}{12}(-3c_1+c_2)$	$\frac{lf'}{3}(-c_1+c_2)$	$\frac{l}{6}(-c_1k'+4e_1h_0+c_2\lambda')$
$\frac{lf_1}{12}(-3c_3+c_4)$	$\frac{lf_1f_2}{5}$	$\frac{lf_1f'}{5}$	$\frac{lf_1}{60}[5(3k'+\lambda')+12z']$
$\frac{lf_2}{12}(3c_4-c_2)$	$\frac{lf_2^2}{30}$	$\frac{lf_2f'}{5}$	$\frac{lf_2}{60}[5(3\lambda'+k')+12z']$
$\frac{lf}{3}(-c_3+c_4)$	$\frac{lff_2}{5}$	$\frac{8}{15}lff'$	$\frac{lf}{15}[5(k'+\lambda')+8z']$
$\frac{l}{6}(-c_3k+4e_0h'+c_4\lambda)$	$\frac{lf_2}{60}[5(3k+\lambda)+12z]$	$\frac{lf'}{15}[5(k+\lambda)+8z]$	$\frac{l}{6}[2kk'+2\lambda\lambda'+k\lambda'+\lambda k'+2z\times(k'+\lambda')+2z'(k+\lambda)+3.2zz']$

		
	$\frac{lh_1h_2}{3}$	$\frac{lh_1}{6}(2h_6+h_5)$
	$\frac{lh_2^2}{6}$	$\frac{l}{6}h_2(2h_5+h_6)$
	$\frac{l}{6}h_2(2h_4+h_3)$	$\frac{l}{6}[2(h_3h_5+h_4h_6)+$ $+h_3h_6+h_4h_5]$
	$\frac{l}{6}h_2(2c_2-c_1)$	$\frac{l}{6}[2(-c_1h_5+c_2h_6-$ $-c_1h_6+c_2h_5)]$
Conic parabola 	$\frac{lf_1h_2}{12}$	$\frac{lf_1}{12}(3h_5+h_6)$
Conic parabola 	$\frac{lf_2h_2}{4}$	$\frac{lf_2}{12}(3h_6+h_5)$
Conic parabola 	$\frac{lfh_2}{3}$	$\frac{lf}{3}(h_5+h_6)$
Conic parabola 	$\frac{l}{6}h_2(2h'+\lambda)$	$\frac{l}{6}(h_5k+4eh'+h_6\lambda)$

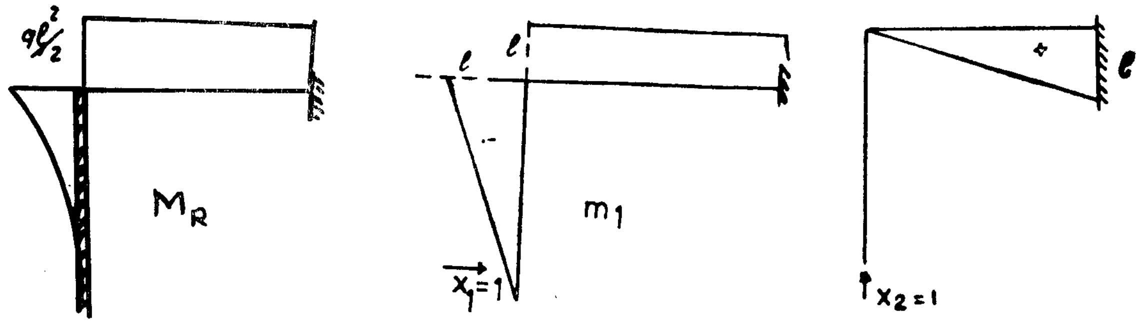
No.	Shape of the graph	Area Ω	Position of the centroid	
			z_1	z_2
1		hl	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
2		$\frac{hl}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}$
3		$\frac{hl}{3}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3l}{4}$
4		$\frac{hl}{4}$	$\frac{l}{5}$	$\frac{4l}{5}$
5		$\frac{hl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$	$\frac{(n+1)\,l}{n+2}$
6		$\frac{2hl}{3}$	$\frac{3l}{8}$	$\frac{5l}{8}$

مثال ـ قاب شکل مقابل مفروض است اگر از انرژی تغییرشکل نیروهای برشی صرفنظر شود مطلوبست حل این مساله





اکنون منحنی نمایش $m_۱$ و $m_۲$ و M_R را رسم میکنیم

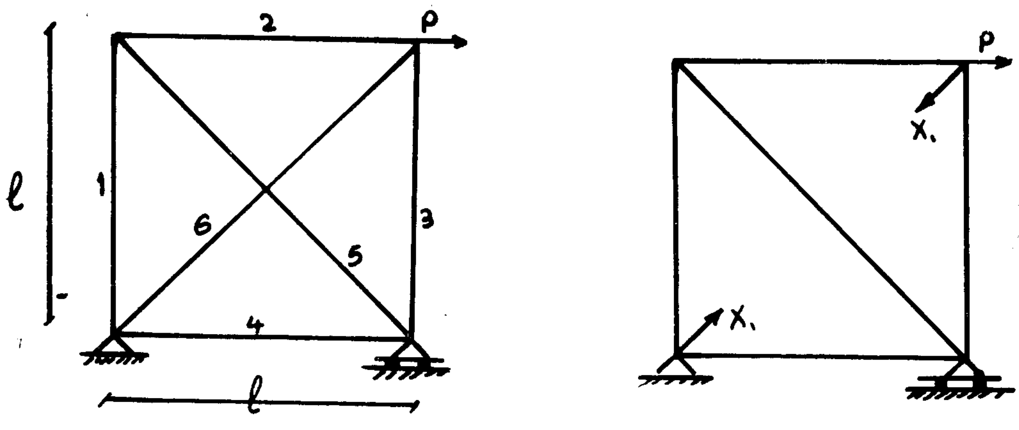


$$\begin{bmatrix} \delta_{۱۱} & \delta_{۱۲} \\ \delta_{۲۱} & \delta_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_۱ R \\ \Delta_۲ R \end{bmatrix}$$

$$\delta_{۱۱} = \frac{۴}{۳}\frac{l^۳}{EI} \qquad \delta_{۱۲} = -\frac{l^۳}{۲EI} \qquad \delta_{۲۱} = \delta_{۱۲} = -\frac{l^۳}{۲EI} \qquad \delta_{۲۲} = \frac{l^۳}{۲EI}$$

$$\Delta_۱ R = \frac{۵ql^۴}{۸EI} \qquad \Delta_۲ R = -\frac{ql^۴}{۴}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{۴}{۳}\frac{l^۳}{EI} & -\frac{l^۳}{۲EI} \\ -\frac{l^۳}{۲EI} & \frac{l^۳}{۳EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{۵ql^۴}{۸EI} \\ -\frac{ql^۴}{۴} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} X_۱ = -\frac{۳}{۷}ql \\ X_۲ = \frac{۳}{۲۸}ql \end{matrix}$$



مثال ۲ ـ درمثال فوق انرژی‌های مربوط به لنگر و نیروی برشی صفر میباشد پس داریم :

$$\delta_{ik} = \sum_{۱}^{۲} \frac{n_i n_k l_۲}{EA_۲}$$

درمورد این مثال :

$$\Delta_{1R} = \sum_{1}^{۲} \frac{n_1 N_R l_۲}{EA_۲} \quad و \quad \delta_{11} = \sum_{1}^{۲} \frac{n_1^{۲} l_۲}{EA_۲}$$

بافرض $EA=c+e=K$

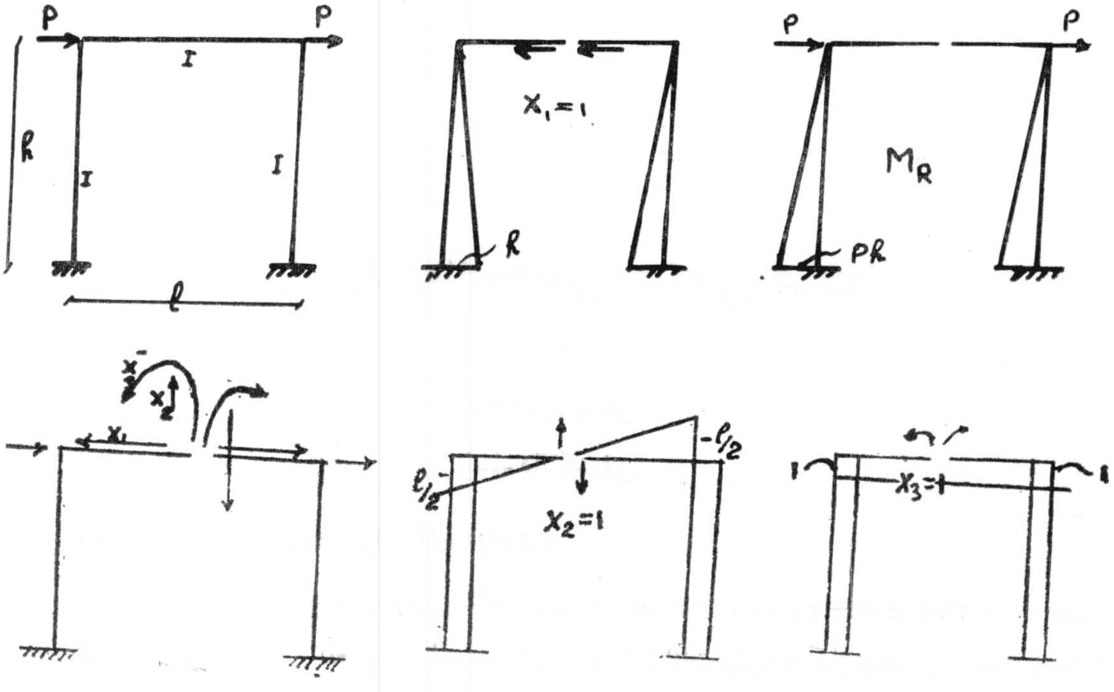
شماره عنصر	l_1	n_1	N_R	$\frac{n_1^{۲} l_۲}{EA_۲}$	$\frac{n_1 N_R l_۲}{EA_۲}$
۱	l	$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	ρ	$-\frac{l}{۲K}$	$-\frac{\rho l}{\sqrt{۲}K}$
۲	l	$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	ρ	$\frac{l}{۲K}$	$-\frac{\rho l}{\sqrt{۲}K}$
۳	l	$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	۰	$\frac{l}{۲K}$	۰
۴	l	$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	ρ	$\frac{l}{۲K}$	$-\frac{\rho}{\sqrt{۲}K}$
۵	$l\sqrt{۲}$	۱	$-\rho\sqrt{۲}$	$\frac{l\sqrt{۲}}{K}$	$-\frac{۲\rho l}{K}$
۶	$l\sqrt{۲}$	۱	۰	$\frac{l\sqrt{۲}}{K}$	۰
Σ				δ_{11}	$\Delta_{1۲}$

$$\delta_{11} = \frac{1}{K}(۲+۲\sqrt{۲})$$

$$\Delta_{1R} = -\frac{\rho l}{K\sqrt{۲}}(۳+۲\sqrt{۲}) \quad \frac{1}{K}(۲+۲\sqrt{۲}) \quad X_1 = +\frac{\rho l}{K\sqrt{۲}}(۳+۲\sqrt{۲})$$

$$X_1 = \rho\,\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}+۴}$$

نیروی هرمیله توسط این رابطه بدست میآید .



مثال ۳ - ازانرژی مربوط به‌برش ونیروی محوری صرفنظر میکنیم .

$$\delta_{۱۱}=\frac{۲h^{۳}}{۳EI}\quad \delta_{۱۲}=۰\quad \delta_{۱۳}=\frac{h^{۲}}{EI}$$

$$\delta_{۲۱}=۰\quad \delta_{۲۲}=\frac{l^{۲}(l+۶h)}{۱۲EI}\quad \delta_{۲۳}=۰$$

$$\delta_{۳۱}=\frac{h^{۲}}{EI}\quad \delta_{۳۲}=۰\quad \delta_{۳۳}=\frac{۲h+l}{EI}$$

$$\Delta_{iR}=۰\quad \Delta_{۲}R=-\frac{\rho h_{۲}l}{۲EI}\quad \Delta_{۳}R=۰$$

$$\Longrightarrow X_{۱}=۰\quad X_{۲}=\frac{۶\rho h^{۲}}{l(l+۶h)}\quad X_{۳}=۰$$