روش نوین برای مطالعه پلهای معلق تحت اثر بار مرده

(کاربرد تفاوتهای محدود برای مطالعه مجموعه‌های منظم ساختمانی)

نوشته :

مهدی سعادت پور   تقی صابری

دانشجویان دوره مهندسی

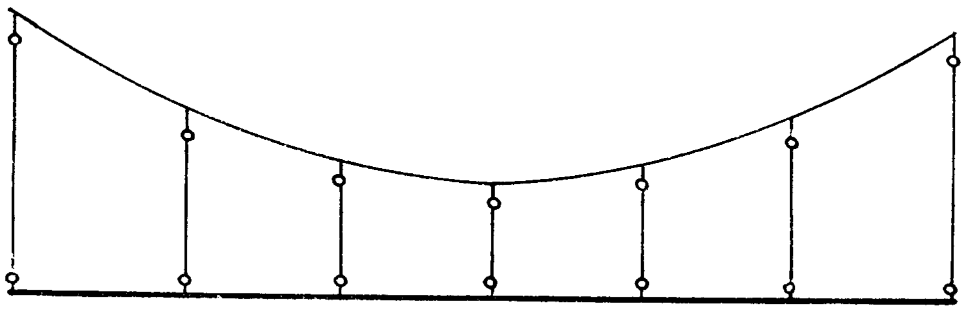
دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی آریامهر

خلاصه :

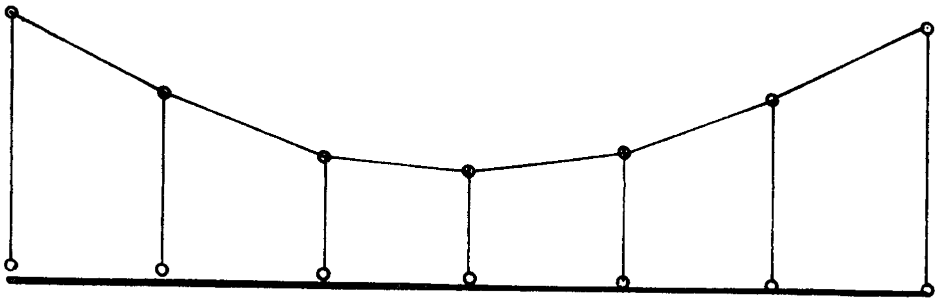
منظور از پیشنهاد و حل این مساله ارائه فرمولی است که بتوان توسط آن بطور مستقیم شکل کابل پلهای معلق را تحت بارمرده برحسب تعداد آویزها وهمچنین در تیر اصلی مقادیر لنگر خمشی ونیروی برشی را در نقاط اتصال مشخص نمود - برای حصول چنین روابطی از ریاضیات تفاوتهای محدود استفاده میشود ابتدا تجزیه و تحلیل تیر اصلی مورد مطالعه قرار میگیرد و سپس بانتایجی که از این تجزیه و تحلیل گرفته میشود کابل اصلی پل تحت مطالعه قرار میگیرد. پس از آن برای فهم بیشتر مسئله مثالهائی آوردهٔ میشود حل این مثالها بخوبی نقش چنین ریاضیاتی را در حل این نوع مسائل آشکار میگرداند.

مقدمه :

پلهای معلق یکی ازمجموعه های ساختمانی نامعین میباشند که اگر تجزیه و تحلیل آنها ازروشهای کلاسیک موجود مورد مطالعه‌قرار گیرد بعلت‌بالا بودن درجه هیپراستاتیکی بااشکالات زیادی مواجه‌میشویم که حل عمومی مسئله را غامض میگرداند ، در نتیجه برای اینکه بتوان مسائل مربوط به چنین پلهائی را بآسانی حل نمود تاکنون فرض مینمودند تعداد قلابهای آویز خیلی زیاد میباشد و یا بعبارت دیگر بار مرده پل بطور یکنواخت به کابل اصلی اعمال میشود و برمبنای چنین فرضی شکل اصلی کابل بصورت سهمی پیشنهاد میشد (شکل ۱) بدیهی است حل مسئله با چنین فرضی ومخصوصاً برای تعداد کمی از آویزهاصحیح نبوده ، زیرا عملاً شکل کابل در نقاط اتصال شکسته میباشد (شکل ۲) و نتایجی که برمبنای چنین فرضی حاصل میشود دور از حقیقت میباشد.



شکل ۱ - سهمی پیوسته

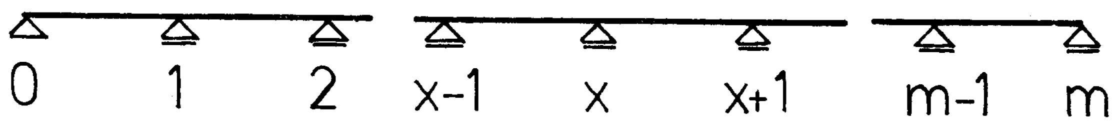


شکل ۲ - شبه سهمی (شکسته)

چون استفاده از پلهای معلق که شامل دوقسمت اصلی ، کابل باصلبیت خمشی صفر و وزن قابل گذشت ، و تیر اصلی باصلبیت خمشی زیاد ، روز بروز افزونی مییابد لازم بنظر میرسد که راه حل دقیقتر و همچنین سادهتری برای حل این نوع مجموعه‌ها ارائه گردد که توسط چنین روشی بتوان با عملیات‌ساده‌تری به‌نتایج دقیقتری دسترسی پیدا نمود و طرح مقدماتی پل را برمبنای آن مطالعه نمود .

روش حل :

چون طرح مقدماتی پلهای معلق برمبنائی میباشد که درمحل اتصال قلابها به پل اصلی هیچ‌نوع تغییر مکانی در جهت قائم بوجود نمیآید بنابراین میتوان در مطالعات ابتدائی تیر ممتد چنین پلی را توسط (شکل ۳) نشان داد .



شکل ۳ - تیر ممتد پل

همانطور که درشکل فوق نشان داده شده است چنین تیر ممتدی روی $m+1$ تکیه گاه قرار دارد که از این تعداد تکیه گاهها $m-1$ عدد از آن مربوط به قلابهای آویزان میباشد و دو تکیه گاه دیگرمربوط به پایه‌های طرفین میباشد ، فاصله تکیه گاهها از همدیگر مساوی میباشد و این فاصله را با a نشان میدهیم باتوجه باینکه دهانه‌های پل برابر m میباشد طول کلی پل از رابطه زیر محاسبه میگردد .

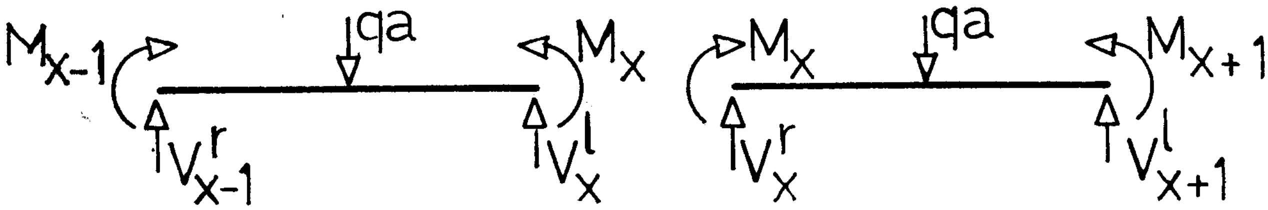
$$L = m \cdot a$$

تعداد قلابهای آویز را با n نشان میدهیم و همانطورکه فوقاً اشاره شد رابطه $n=m-1$ برقرار میباشد.

تجزیه و تحلیل قسمتهای اصلی

I- تجزیه و تحلیل تیر اصلی پل

برای بررسی نیروهای مربوطه و بدست آوردن فرمولهای لازم قطعه‌ای از تیر اصلی که شامل سه تکیه‌گاه $x-1$ ، x و $x+1$ ام باشد انتخاب نموده و از وسط قطع میکنیم و تمام نیروها و لنگرهای خمشی را روی هر قسمت از آن ظاهر مینمائیم (شکل ٤).



شکل - ٤ دیاگرام آزاد دودهانه متوالی

تنها نیروئی که روی قطعات شکل فوق بعنوان نیروی خارجی میباشد همان نیروی $q \cdot a$ یابعبارت دیگر بار مرده پل‌میباشد که q شدت این بار مرده را نشان میدهد، در این مرحله تمام محاسبات را برمبنای بار مرده یکنواخت انجام میدهیم زیرا اثربارهای زنده نظیر نیروی وزن وسائط نقلیه نسبت به بارمرده q قابل گذشت میباشد. ضمناً با توجه به شکل ٤ میتوان نتیجه‌گرفت که مجموع $V_x^L + V_x^R$ همان نیروی عکس العمل پایه x ام میباشد.

قبل از اینکه بحل اساسی مسئله دسترسی پیدا کنیم باید توجه نمود که اگر بتوان روابطی بدست آورد که بازاء مقادیرمختلف x ممان خمشی ونیروی عکس‌العمل را در تکیه‌گاه x ام تیر اصلی‌مشخص‌نماید مسئله تقریباً حل شده تلقی میگردد و بااستفاده از این‌عکس‌العملها میتوان نیروهای وارد به‌کابل ودرنتیجه شکل‌کابل را طرح نمود برای حل مسئله حتی‌الامکان سعی میشود از روابطی‌که برای همگان مفهوم باشد استفاده شود.

در حالت عمومی رابطه سه لنگر بصورت زیر نوشته میشود :

$$M_1 \frac{L_1}{I_1} + 2M_2 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2}\right) + M_3 \frac{L_2}{I_2} = (MF_{1,2} + 2MF_{2,1})\frac{L_1}{I_1} + (MF_{3,2} + 2MF_{2,3})\frac{L_2}{I_2}$$

در رابطه فوق L_1 و L_2 بترتیب طول دو دهانه متوالی و I_1 و I_2 ممان اینرسی دو دهانه متوالی و MF ممان درگیری را نشان میدهد.

اگر در رابطه فوق بجای L_1 و L_2 مقدار a و بجای I_1 و I_2 مقدار I را قرار دهیم رابطه زیر بدست میآید :

$$M_{x-1} + 4M_x + M_{x+1} = -6M \qquad (a-1)$$

لنگر گیرداری $MF_{x,x+1} = -q\frac{a^2}{12} = -M$

طول دهانه تکراری $L_1 = L_2 = a$

ممان اینرسی یکنواخت $I_1 = I_2 = I$

هر گاه اپراتور جابجائی E بطریقی تعریف شود که در رابطه زیر صدق کند :

$$Ef(x) = f(x+1) \quad \text{یا} \quad E^{(-1)}f(x) = f(x-1)$$

میتوان با استفاده از این اپراتور رابطه $(a-1)$ را بشکل زیر نوشت :

$$(E^{(-1)} + 4 + E)M_x = -6M \qquad (a-2)$$

رابطه فوق M_x را در حالت کلی برحسب M مشخص نموده است و نظیر چنین رابطه‌ای را میتوان برای عکس‌العمل R_x با ممان گرفتن حول نقاط $x-1$ و $x+1$ در شکل ٤ بدست آورد.

$$M_{x-1} + q\frac{a^2}{2} - M_x - V_x^L a = 0$$

$$M_x - q\frac{a^2}{2} - M_{x+1} + V_x^R a = 0$$

از روابط فوق نتیجه میگیریم :

$$2M_x - M_{x-1} - M_{x+1} - qa^2 + a(V_x^L + V_x^R) = 0$$

همانطور که قبلاً اشاره شد مجموع $V_x^L + V_x^R$ برابر عکس‌العمل پایه x ام میباشد بنابراین :

$$2M_x - M_{x-1} - M_{x+1} - qa^2 + aR_x = 0$$

یا :

$$R_x = \frac{1}{a}[12M + (E - 2 + E^{(-1)})M_x] \qquad (b-1)$$

با استفاده از روابط $(a-2)$ و $(b-1)$ خواهیم داشت :

$$R_x = -\frac{1}{a}(10 + E + E^{(-1)})M_x \qquad (b-2)$$

با استفاده از خواص سریهای محدود میتوان M_x و R_x را بشکل زیر نوشت :

$$M_x = \sum_{i=1}^{m-1} M_i \mathrm{Sin}\mu x \qquad \mu = \frac{i\pi}{m} \qquad (a-3)$$

$$R_x = \sum_{i=۱}^{m-۱} R_i \text{Sin}\mu x \qquad (b-۳)$$

هر گاه مقادیر M_i و R_i مشخص‌شوند باتغییر دادن x در روابط فوق‌میتوان مقادیر M_x و R_x را بدست‌آورد.

میتوان بسط محدود عدد یک را بشکل زیر نوشت :

$$۱ = \frac{۲}{m} \sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \text{Cotan}\frac{\mu}{۲} \text{Sin}\mu x^* \qquad (c-۱)$$

با استفاده از رابطه ۱—c میتوان لنگر خمشی M را بصورت زیر نوشت :

$$M = M(۱) = M\frac{۲}{m} \sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \text{Cotan}\frac{\mu}{۲} \text{Sin}\mu x \qquad (c-۲)$$

با استفاده از روابط (۳—a) و (۲—c) برای رابطه (۲—a) خواهیم داشت :

$$(E+E^{(-۱)}+٤) \sum_{i=۱}^{m-۱} M_i \text{Sin}\mu x = -٦M\frac{۲}{m} \sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \text{Cotan}\frac{\mu}{۲} \text{Sin}\mu x$$

یا :

$$M_i (E+E^{(-۱)}+٤) \text{Sin}\mu x = -\frac{۱۲ M}{m} \text{Cotan}\frac{\mu}{۲} \text{Sin}\mu x \qquad i = ۲K+۱$$

و بالاخره با استفاده از روابط مثلثاتی رابطه زیر بدست میآید :

$$M_i = -\frac{٦M}{m} \frac{\text{Cotan}\frac{\mu}{۲}}{۲+\cos\mu} \qquad (a-٤)$$

رابطه فوق را در رابطه ۳—a بکار میبریم تا ممان خمشی M_x بدست آید :

$$M_x = \sum_{i=۱,۳}^{m-۱} -\frac{٦M}{m} \frac{\text{Cotan}\mu/۲}{۲+\cos\mu} \text{Sin}\mu x \qquad (a-٥)$$

رابطه فوق مقدار ممان خمشی را درهریک از تکیه گاهها مشخص میکند ، هرگاه تیری با ۱+m تکیه‌گاه داشته باشیم بامشخص نمودن x که شماره تکیه گاه میباشد بآسانی‌ممان خمشی‌ازسری فوق محاسبه‌میگردد.

برای محاسبه R_x از رابطه (۳—a) و (۳—b) و رابطه (۲—b) استفاده میشود.

$$\sum_{i=۱}^{m-۱} R_i \text{Sin}\mu x = -\frac{۱}{a}(۱۰+E+E^{(-۱)}) \sum_{i=۱}^{m-۱} M_i \text{Sin}\mu x$$

---

* ـ استدلال این فرمول در قسمت ضمیمه بیان گردیده است.

یا :

$$R_i \mathrm{Sin}\mu x = -\frac{۱}{a}(۱۰ + E + E^{(-۱)}) M_i \mathrm{Sin}\mu x$$

با توجه بروابط مثلثاتی میتوان رابطه فوق را بشکل زیر نوشت :

$$R_i = -\frac{M_i}{a}(۱۰ + ۲\cos\mu)$$

و چون در رابطه ٤ $a-$ مقدار Mi را بدست آورده‌ایم بنابراین:

$$R_i = \frac{۱۲M}{ma} \; \frac{\mathrm{Cotan}\mu/۲\,(٥ + \cos\mu)}{۲ + \mathrm{Cos}\mu} \qquad (b-٤)$$

با قرار دادن رابطه $(b-٤)$ در رابطه $(b-۳)$ عکس‌العمل پایه ها بدست میآید.

$$R_x = \sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{۱۲M}{ma}\left[\frac{٥ + \cos\mu}{۲ + \cos\mu}\ \mathrm{Cotan}\mu/۲\right]\mathrm{Sin}\mu x$$

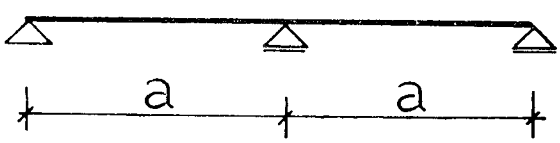
یا :

$$R_x = \frac{۱۲M}{ma}\sum_{i=۱;۳}^{m-۱} \frac{٥ + \cos\mu}{۲ + \cos\mu}\mathrm{Cotan}\mu/۲\ \mathrm{Sin}\mu x \qquad (b-٥)$$

با استفاده از رابطه فوق و دانستن مقدار x میتوان عکس‌العمل هریک از پایه ها را مشخص نمود ، حسن این رابطه در این استکه m هرمقدار که باشد میتوان این عکس‌العمل را بآسانی بدست آورد در صورتیکه استفاده از روشهای دیگر در هنگام زیاد بودن m خیلی مشکل بنظر میرسد.

بایدتوجه نمود که چون روابط $(a-٥)$ و $(b-٥)$ بادرنظرگرفتن تشابه بارمرده بدست آمده است بنابراین کافیست دریک تیر با $m+۱$ تکیه گاه ، عکس‌العمل پایه ها و همچنین ممان خمشی درتکیه گاهها را تا پایه وسط حساب‌نموده بقیه عکس‌العملها وممانهای خمشی باعکس‌العمل های قبلی و ممانهای خمشی قبلی قرینه میباشند. برای نشان‌دادن سهولت استفاده از فرمولهای $(a-٥)$ و $(b-٥)$ باید به مثالهای زیر توجه نمود.

مثال ۱ـ مطلوبست نیروی عکس‌العمل و ممان خمشی دریک تیر تحت اثر بارگسترده q که روی سه تکیه گاه مطابق (شکل ٥) قرار دارد.



شکل ٥

الف : محاسبه ممان خمشی در تکیه‌گاه شماره ۱

رابطه ۵—a را نوشته و در آن m را برابر ۲ قرار میدهیم

$$M_x = -\frac{۶M}{m}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{\text{Cotan}\,\frac{\mu}{۲}}{۲+\cos\mu}\,\text{Sin}\,\mu x$$

$$\mu = \frac{i\pi}{m} \quad \text{و} \quad m=۲ \quad \text{و} \quad x=۱$$

$$M_۱ = -\frac{۶M}{۲}\left(\frac{\text{Cotan}\,\frac{\pi}{۴}}{۲\cos\frac{\pi}{۲}}\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{۲}\right)$$

$$M = \frac{qa^۲}{۱۲} \Longrightarrow M_۱ = -\frac{۱}{۸}qa^۲$$

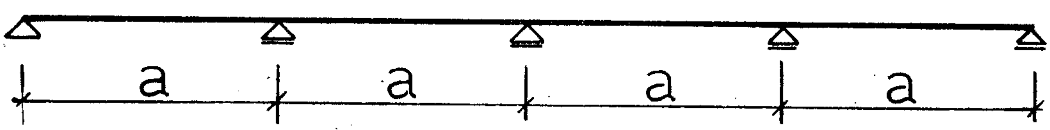
ب : محاسبه $R_۱$

برای بدست آوردن $R_۱$ از رابطه (۵—b) با شرایط فوق استفاده میکنیم:

$$R_x = \frac{۱۲M}{ma}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{۵+\cos\mu}{۲+\cos\mu}\,\text{Cotan}\,\frac{\mu}{۲}\,\text{Sin}\,\mu x$$

$$R_۱ = \frac{۱۲M}{۲a}\left(\frac{۵+\cos\frac{\pi}{۲}}{۲+\cos\frac{\pi}{۲}}\,\text{Cotan}\,\frac{\pi}{۴}\,\text{Sin}\,\frac{\pi}{۲}\right) \Longrightarrow \quad ۱/۲۵۶a$$

مثال ۲ـ مطلوبست تعیین ممان خمشی و عکس‌العمل پایه‌های ۱ و ۲ و ۳ تیر (شکل ۶) :



شکل ۶

الف . محاسبه ممان خمشی ـ کافیست در رابطه ۵—a مقدار m را برابر ۴ اختیار نموده و x را بترتیب برابر ۱ و ۲ قرار دهیم ، البته محاسباتی که با x=۱ انجام میدهیم برای x=۳ نیز صادق است.

$$M_x = -\frac{۶M}{m}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{\text{Cotan}\,\mu/۲}{۲+\cos\mu}\,\text{Sin}\,\mu x$$

$$x=۱ \quad \text{و} \quad m=۴ \quad \text{و} \quad i=۱,۳$$

$$M_۱ = -\frac{۶M}{۴}\left(\frac{\text{Cotan}\ \pi/۸}{۲+\cos\pi/۴}\text{Sin}\ \pi/۴+\frac{\text{Cotan}\ \frac{۳\pi}{۸}}{۲+\cos\frac{۳\pi}{۴}}\text{Sin}\ \frac{۳\pi}{۴}\right)$$

$$M=\frac{qa^۲}{۱۲} \longrightarrow M_۱=-\frac{۳}{۲۸}qa^۲$$

مقدار $M_۲$ نیز بهمین ترتیب بدست میآید :

$$x=۲ \quad و \quad m=۴ \quad و \quad i=۱,۳$$

$$M_۲ = -\frac{۶M}{۴}\left(\frac{\text{Cotan}\ \pi/۸}{۲+\cos\pi/۴}\text{Sin}\ \frac{\pi}{۲}+\frac{\text{Cotan}\ \frac{۳\pi}{۸}}{۲+\cos\frac{۳\pi}{۸}}\text{Sin}\ \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

$$M=q\frac{a^۲}{۱۲} \longrightarrow M_۲=-\frac{۱}{۱۴}qa^۲$$

ب ـ محاسبه عکس‌العمل پایه ها ـ برای بدست آوردن عکس‌العمل ها از رابطه (b—۵) باشرایط فوق استفاده میشود.

$$R_x=\frac{۱۲\frac{qa^۲}{۱۲}}{۴a}\left(\frac{۰+\cos\pi/۴}{۲+\cos\pi/۴}\text{Cotan}\ \frac{\pi}{۸}\ \text{Sin}\ \frac{\pi}{۴}+\frac{۰+\cos\frac{۳\pi}{۴}}{۲+\cos\frac{۳\pi}{۴}}\text{Cotan}\ \frac{۳\pi}{۸}\ \text{Sin}\ \frac{۳\pi}{۴}\right)$$

$$R_۱=\frac{۸}{۷}qa$$

مقدار $R_۲$ نیز بهمین ترتیب بدست میآید :

$$x=۳ \quad و \quad m=۴ \quad و \quad i=۱,۳$$

$$R_۲=\frac{۱۲M}{۴a}\left(\frac{۰+\cos\pi/۴}{۲+\cos\pi/۴}\text{Cotan}\ \frac{\pi}{۸}\ \text{Sin}\ \frac{۲\pi}{۴}+\frac{۰+\cos\frac{۳\pi}{۴}}{۲+\cos\frac{۳\pi}{۴}}\text{Cotan}\ \frac{۳\pi}{۸}\ \text{Sin}\ \frac{۶\pi}{۴}\right)$$

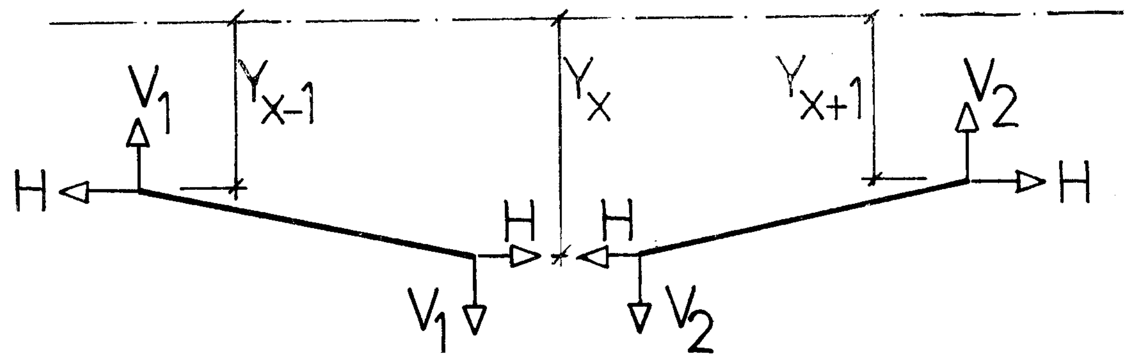
$$M=\frac{qa^۲}{۱۲} \Longrightarrow R_۲-\frac{۱۳}{۱۴}qa$$

شاید در مثالهای بالا روشن شده باشد که این طریق راه حل برای بدست آوردن ممان خمشی و نیروی عکس‌العمل در تیرهای ممتد و منظم چقدر آسان میباشد.

II- تجزیه و تحلیل کابل تحت اثر بارمرده

قبلاً گفتیم نیروی وزن پل توسط قلابهائی به کابل اصلی منتقل میشود، برای بدست آوردن شکل

کابل و رابطه آن با نیروی کششی آن دو قطعه اختیاری از کابل را در نظر میگیریم و تمام نیروها را روی آن ظاهر میکنیم ، ضمناً سطح مبنائی برای اندازه‌گیری ارتفاع نقاط مختلف کابل درنظر میگیریم (شکل ۷) .



شکل ۷ ـ دیاگرام آزاد کابل بین‌سه آویز متوالی

فرض میکنیم نیروی افقی که این دو کابل بهم‌وارد میکنند برابر H باشد حول نقاط ۱ـــx و ۱+x سمان گیری میکنیم:

$$V_1 a = H(y_x - y_{x-1})$$

$$V_2 a = H(y_x - y_{x+1})$$

از دو رابطه فوق نتیجه میشود

$$(V_1 + V_2)a = H(2y_x - y_{x-1} - y_{x+1})$$

از طرفی میدانیم $V_1 + V_2$ همسان نیروی R_x میباشد بنابراین :

$$R_x a = H(2y_x - y_{x-1} - y_{x+1})$$

$$\frac{H}{a}(2 - E^{(-1)} - E)y_x = R_x \qquad (d-1)$$

فرض میکنیم y_x توسط بسط محدود زیر نوشته شود

$$y_x = \sum_{i=1}^{m-1} Y_i \mathrm{Sin}\mu x \qquad \mu = \frac{i\pi}{m} \qquad (d-2)$$

باید توجه داشت که رابطه فوق در شرایط حدی صادق میباشد .

برای بدست آوردن جمله کلی y_i از قرار دادن رابط $(d-2)$ در رابطه $(d-1)$ استفاده میکنیم :

$$\frac{H}{a}(2 - E^{(-1)} - E)\sum_{i=1}^{m-1} Y_i \mathrm{Sin}\mu x = \sum_{i=1,3}^{m-1} R_i \mathrm{Sin}\mu x$$

یا :

$$\frac{H}{a}(2 - E^{(-1)} - E)Y_i \mathrm{Sin}\mu x = R_i \mathrm{Sin}\mu x \Longrightarrow Y_i = \frac{a}{2H(1-\cos\mu)}R_i$$

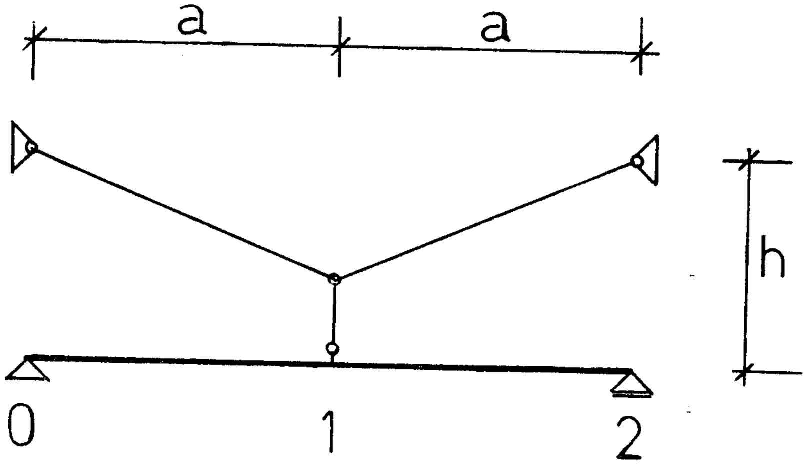
بنابراین شکل کابل برحسب نیروی افقی و تعداد آویزهای آن چنین میباشد :

$$y_{(x)} = \frac{6M}{mH}\sum_{i=1,2}^{m-1}\frac{(0+\cos\mu)\cot g\ \mu/2}{(2+\cos\mu(1-\cos\mu)}\operatorname{Sin}\mu x \qquad (d-3)$$

رابطه فوق در محل آویزهای مختلف فاصله کابل را از سطح مبنا مشخص میکند.

مثال :

هرگاه بارگستردهای مطابق شکل ۸ روی تیری بدهانه ۲a قرار داشته باشد و نقطه وسط این تیر توسط قلابی به کابل آویزان باشد پیدا کنید وابستگی بین نیروی افقی کابل وارتفاع نقطه وسط کابل نسبت به نقطه کناری آن.



شکل ۸

حل :

از رابطه d—۳ استفاده نموده و y_1 را بدست میآوریم :

$$y_x = \frac{6M}{mH}\sum_{i=1,3}^{m-1}\frac{(0+\cos\mu)\cot g\mu/2}{(2+\cos\mu(1-\cos\mu)}\operatorname{Sin}\mu x$$

$m=2$ و $x=1$

$$y_1 = \frac{6\,\frac{qa^2}{12}}{2H}\,\frac{(0+\cos\pi/2)(\cot g\pi/4)}{(2+\cos\pi/2)(1-\cos\pi/2)}\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2} \qquad y_1 = 0.625\frac{qa^2}{H}$$

با مشخص نمودن نیروی کشش کابل و محاسبه H میتوان y_1 را بدست آورد وهمچنین ممکن است مقدار y_1 داده شده باشد بنابراین باید H را بدست آورد و پس از مشخص نمودن نیروی کششی کابل مورد نظر را طرح نمود.

مقایسه

نتایجی که از تجزیه و تحلیل قوسهای سهمی شکل تحت اثر بارگسترده یکنواخت بدست میآید سؤید آنست که در این قوسها ممان خمشی صفر میباشد و فقط پروفیل این قوس تحت اثر نیروی محوری قرار دارد بنابراین میتوان این قوسها را باکابلی تحت اثر بار یکنواخت‌مقایسه نمود ، هدف از این گفته این‌است که نتیجه بگیریم نیروی افقی در انتهای کابل از رابطه زیر بدست میآید :

$$H = \frac{qL^۲}{۸f} \qquad \frac{H}{qL^۲/۸f} = ۱$$

البته رابطه فوق برای کابلی‌صادق میباشد که فقط از دوانتها آویزان‌باشد و تحت اثر باریکنواخت q قرار گیرد .

رابطه فوق بآسانی ثابت میشود ، اکنون رابطه (d—۳) را در نظرگرفته و این رابطه را بشکل دیگری مینویسیم تا اینکه مشاهده شود هرگاه عدد m از مقدار معینی بالاتر رود عملاً میتوان شکل کابل را سهمی در نظرگرفت :

$$y_x = \frac{۶M}{mH}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{(۵+\cos\mu)\cot g\mu/۲}{(۲+\cos\mu)(۱-\cos\mu)}\,\text{Sin}\,\mu x$$

$$\left.\begin{array}{l} M = q\dfrac{a^۲}{۱۲} \\ L = ma \end{array}\right. \Longrightarrow \quad y_x = \frac{qL^۲}{۲Hm^۳}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{(۵+\cos\mu)\cot g\mu/۲}{(۲+\cos\mu)(۱-\cos\mu)}\,\text{Sin}\,\mu x$$

که در رابطه فوق f تغییر مکان وسط کابل میباشد و ضمناً m را اعداد زوج اختیار میکنیم که بتوان f را با قرار دادن $x = \frac{m}{۲}$ در وسط کابل بآسانی حساب نمود .

هرگاه m طوری ترقی کند که ضریب :

$$A_i = \frac{۴}{m^۳}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} \frac{(۵+\cos\mu)\ \cot g\mu/۲}{(۲+\cos\mu)(۱-\cos\mu)}\,\text{Sin}\,\frac{\mu m}{۲}$$

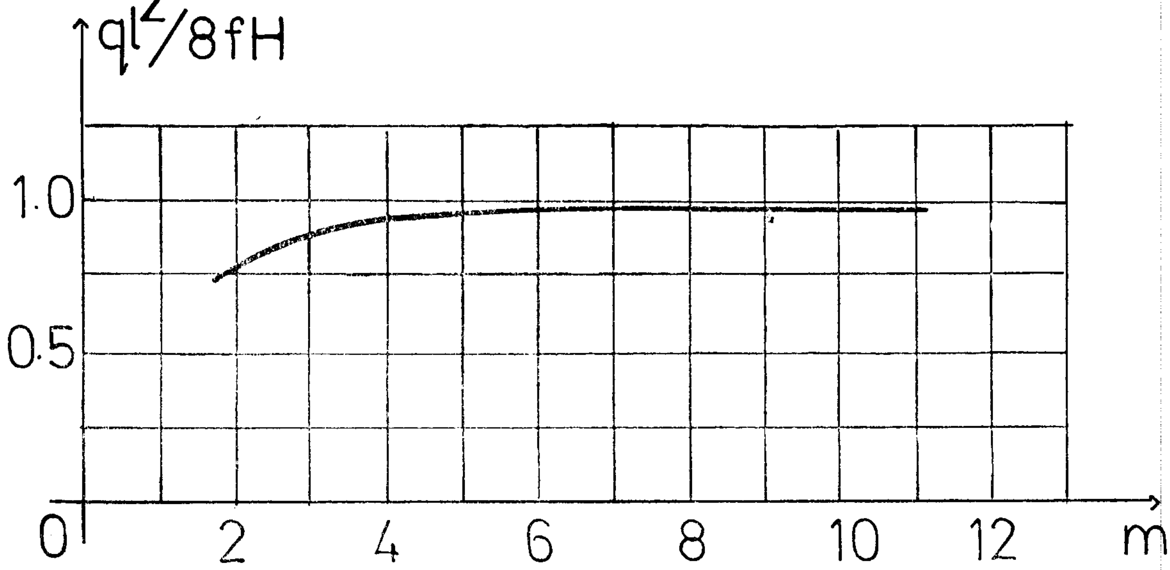
تقریباً برابر یک شود عملاً میتوان شکل کابل را سهمی در نظرگرفت زیرا دراین حالت میتوان نوشت :

که H نیروی افقی مربوط به کابل تحت اثر بارگسترده q میباشد و درباره آن بحث شد .

جدول زیر را تشکیل میدهیم :

m	۲	۴	۶	۸	۱۰
A_i	۱٫۲۵	۱٫۰۳۶	۱٫۰۲۰	۱٫۰۱۷	۱٫۰۰۵
$1/A_i$	۰٫۸۰۰	۰٫۹۶۵	۰٫۹۸۰	۰٫۹۸۵	۰٫۹۹۰

با توجه به جدول فوق منحنی زیر را رسم میکنیم :

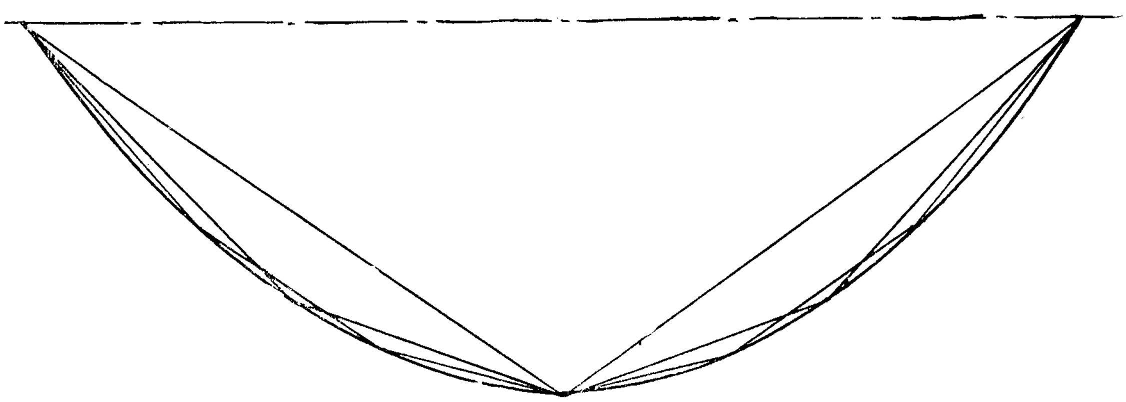


شکل ۹

بنابراین با توجه به جدول فوق میتوان نتیجه گرفت هنگامیکه m ازحدود ۸ بیشترشود خطای محاسبات قابل گذشت میشود و میتوان H را برابر $\frac{qL^۲}{۸f}$ فرض نمود و یا بعبارت دیگر کابل را سهمی در نظر گرفت.

در هنگامیکه $m=۸$ میباشد خطای حاصل ۰٫۱٪ میباشد .

تغییرات شکل کابل براثر تغییرات m در (شکل ۱۰) نشان داده شده است.



شکل ۱۰ ـ تغییرات شکل کابل برحسب تعداد آویزها

نتیجه

شاید با مطالعه آنچه گفته شد و مقایسه آن با روشهائی که برای تجزیه و تحلیل تیرهای نامعین تحت‌بار یکنواخت وجود دارد نقش ریاضیات تفاوتهای محدود برای ماروشن‌شده باشد هدف از به‌میان‌آوردن این مسئله و حل آن‌روشن نمودن اذهان و آشنائی آن با این‌نوع ریاضیات میباشد تابتوان موضوع سهمتری‌را

که استفاده از این روابط در حل نوع دیگری از پلها میباشد که هنوز مورد مطالعه میباشد و عملاً از آنها استفاده نشده است مطرح نمود ، چنین پلهائی که تصور معکوسی از پلهای معلق میباشد جمعاً مانند تیرهای پیش فشرده عمل میکنند .

ضمیمه I

اثبات بسط محدود

$$۱ = \frac{۲}{m}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱} cotg\,\frac{\mu}{۲}\,\mathrm{Sin}\,\mu x$$

فرض میکنیم بسط محدود عدد یک بصورت زیر نوشته شود. واضح است رابطه زیر در شرایط سرحدی صدق میکند .

$$۱ = \sum_{i=۱}^{m-۱} A_i\,\mathrm{Sin}\,\mu x \qquad \mu = \frac{i\pi}{m}$$

برای بدست آوردن ضریب کلی A_i دوطرف تساوی را در $\mathrm{Sin}\,\frac{J\pi}{m}\,x$ ضرب میکنیم

$$\mathrm{Sin}\frac{J\pi}{m}\,x = \sum_{i=۱}^{m-۱} A_i\,\mathrm{Sin}\,\frac{i\pi}{m}x\,\mathrm{Sin}\frac{J\pi}{m}\,x$$

از دوطرف رابطه حد مجموع میگیریم :

$$\sum_{x=۱}^{m-۱}\mathrm{Sin}\frac{J\pi}{m}x = \sum_{x=۱}^{m-۱}\sum_{i=۱}^{m-۱} A_i\,\mathrm{Sin}\,\frac{i\pi}{m}x\,\mathrm{Sin}\frac{J\pi}{m}x$$

بدلیل تعامد توابع سینوسی از رابطه فوق نتیجه میشود که :

$$A_i = \frac{۲}{m}\sum_{x=۱}^{m-۱}\mathrm{Sin}\,\frac{i\pi}{m}\,x$$

اکنون رابط زیر را ثابت میکنیم

$$\sum_{x=۱}^{m-۱}\mathrm{Sin}\,\frac{J\pi}{m}\,x = cotg\frac{J\pi}{۲m} \qquad \frac{J\pi}{m} = \alpha$$

$$S = \sum_{x=۰}^{m} e^{i\alpha x} = e^{i\alpha} + {}^{۲i\alpha} + \cdots + e^{i\alpha(m-۱)} + e^{i\alpha m}$$

$$S = e^{i\alpha}\frac{۱ - e^{i\alpha m}}{۱ - e^{i\alpha}}$$

$$= \frac{e^{i\alpha/۲}}{e^{-i\alpha/۲}}\left[\frac{e^{i\alpha m} - ۱}{e^{i\alpha} - ۱}\right] = \frac{e^{i\alpha/۲}[e^{i\alpha m} - ۱]}{e^{i\alpha/۲} - e^{-i\alpha/۲}}$$

مقدار S را برحسب Sinαm و cosαm مینویسیم

$$S = -i\frac{\left[\cos\frac{\alpha}{۲} + i\,\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}\right][\cos\alpha m + i\,\mathrm{Sin}\alpha m - ۱]}{۲\,\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}}$$

$$\alpha m = j\pi \implies \mathrm{Sin}\,\alpha m = o \quad \text{و} \quad \cos\alpha m = (-۱)j$$

$$S = -i\frac{\left[\cos\frac{\alpha}{۲} + i\,\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}\right][(-۱)j - ۱]}{۲\,\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}}$$

$$j = ۲K \implies S = ۰$$

$$j = ۲K + ۱ \implies S = \frac{i}{\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}}\left[\cos\frac{\alpha}{۲} + i\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{۲}\right] = -۱ + i\,\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

بنابراین میتوان نوشت :

$$\sum_{x=۱}^{m}\mathrm{Sin}\frac{j\pi}{m}x = \text{Imaginary part}(S) = \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

پس میتوان نوشت :

$$۱ = \frac{۲}{m}\sum_{i=۱,۳}^{m-۱}\mathrm{cotg}\frac{\mu}{۲}\,\mathrm{Sin}\,\mu x \qquad \mu = \frac{i\pi}{m}$$