معادله تریکومی

Equation Tricomi

نوشتهٔ

فریدون سادات عقیلی

استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده :

دراین مقاله بااستفاده‌ازدستگاههای قرینه، کنترل اپتیمال (Control-optimal) معادله تریکومی را بررسی خواهیم کرد و باینترتیب تعمیمی از دستگاه‌های قرینه که درمعادلات لاپلاس و ماکسول که در [6] (فهرست آخرین صفحه) بررسی شده است‌خواهدبود.

معادله تریکومی بوسیله Phillips , Sarason درمقاله [5] مطالعه شده و وجود جوابهای این معادله بوسیله آنها باثبات رسیده است. با استفاده ازنتایج آنها و انتخاب فضای کنترل و فضای ملاحظات (Observation) مناسب ، میتوان اغلب مسائل کنترل را حل نمود.

همچنین بوسیله روشهای تقریب [1] Bardos در مورد سیستم‌های قرینه و روشهای Butzer , Berens درمورد نیمه گروه‌ها ، حل وتقریب مسائل‌مورد بحث **دربعضی‌از موارد ساده‌تر** خواهد بود.

I ـ معادله تریکومی

همانطورکه درمقاله [5] Philbps , Sarason نوشته شده است ، اگر Ω یک زیرمجموعه باز $\mathcal{R}^2$ و $f(x, y)$ تابعی تعریف شده در Ω باشد این معادله بصورت :

$$F(y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=f(x, y) \qquad \text{در } \Omega\subset\mathcal{R}^2 \tag{I—1}$$

با شرایط :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y}>0 \quad \text{اگر} \quad y>\theta \quad (\theta<0) \\ yF(y)\geqslant 0 \qquad \forall y \end{cases} \tag{I—2}$$

نوشته میشود.

مثلاً اگر Ω را بشکل زیر انتخاب نمائیم که درنقاط 0 , P_1 , P_2 فاقد مماس می‌باشند.

بطوریکه روی C_1 ، C_2 ، S_1 و S_2

$$F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0 \tag{I-3}$$

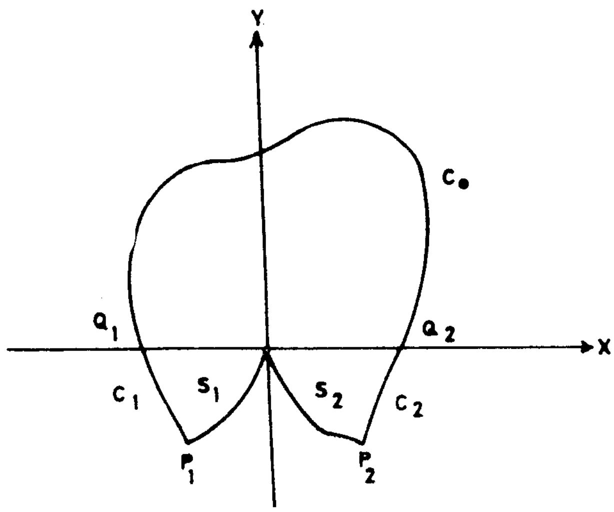
برقرار باشد.

و اگر درمعادله (I—1) تغییر متغیرهای $u_1=\frac{\partial v}{\partial x}$, $u_2=\frac{\partial v}{\partial y}$ را انجام دهیم دستگاه زیر را بدست میآوریم :

$$\begin{cases} F\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=f \\ -\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}=0 \end{cases} \tag{I-4}$$

بعبارت دیگر با $u=(u_1\ ,\ u_2)$

$$(I-4) \Longleftrightarrow (I-5) \qquad \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial y}=\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$



وبا ضرب کردن طرف چپ تساوی (5 — 1) در ماتریس

$$Z=\begin{bmatrix} a & -Fb \\ b & a \end{bmatrix}$$

دستگاه قرینه زیر را بدست خواهیم آورد :

$$(I-6) \qquad \begin{cases} Au=\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \\ A=A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y} \\ A_1=\begin{bmatrix} Fa & Fb \\ Fb & -a \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} -Fb & a \\ a & b \end{bmatrix} \\ An=\sum_{i=1}^{2} A_i n_i=A_1n_1+A_2n_2 \end{cases}$$

و

که بردار (n_1, n_2) بردار قائم بر منحنی است.

a و b را طوری انتخاب میکنیم که Z دارای معکوس و سیستم قرینه مورد بحث مثبت باشد، یعنی:

$$\left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}\right)u\,,\,u\right]\geqslant \alpha\,|u|^2 \qquad \text{(I}-7\text{)}$$

برای هر $u=(u_1, u_2)\in[L^2(\Omega)]^2$ ، که در آن $L^2(\Omega)$ فضای تابعی است که مجذور آنها به‌مفهوم لوبگ انتگرال دارد.

Morawetz درمقاله خود [4] نشان داده است که میتوان a و b را بصورت زیر انتخاب نمود:

$$\text{(I}-8\text{)}\qquad a=x\quad,\quad b=C\,|x|\qquad y\leqslant 0$$

$$a=x\qquad F(y)^{1/2}b=CF(y)^{1/2}|x|+\int_0^y F(y)^{1/2}dx \Longleftarrow y\geqslant 0 \qquad \text{اگر}$$

که در اینجا C یک مقدار ثابت است که بعد انتخاب خواهیم کرد. با شرایط بالا A یک اپراتور مثبت خواهد بود (بغیر از مبداء) ، روی C_0 ، $An=\sum_{i=1}^{2}A_in_i$ دارای ردیف(rang)2 و روی $C_1\cup S_1\cup C_2\cup S_2$ شرط:

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0 \qquad \text{(I}-9\text{)}$$

برقرار است و بنابراین An دارای ردیف یک است، باین ترتیب درنقاط Q_1 و Q_2 ، A_n تغییر ردیف میدهند. دراینصورت شرط (i) که بنابر آن uA_nu باید دارای ردیف ثابت باشد، در [6] برای قضیه شرط لازم بوده و دراینجا صدق نمیکند و حاصلضرب uA_nu بصورت زیر نوشته میشود:

$$\text{(I}-10\text{)}\qquad uA_nu=-[an_1+bn_2]^{-1}\{(a^2+b^2F)(n_2u_1-n_1u_2)^2 \\ -(n_2^2+n_1^2F)(au_1+bu_2)^2\}$$

و برای مقادیر C نسبتاً کوچک خواهیم داشت:

بازای: $B(x, y)=\{u=(u_1, u_2)\in\mathcal{R}^2\,,\,u_1n_2-u_2n_1=0\}\qquad (x, y)\in \mathbf{C}$

بازای $B(x, y)=\mathcal{R}^2 \qquad (x, y)\in \mathbf{S}=S_1\cup S_2$

$B(x, y)$ یک زیرفضای $\mathcal{R}^2$ است، که برای فرم $A_n(x, y)$ ماکزیمال یا بیشینه خواهد بود، ولی شرط (i) را نخواهد داشت و از خواص قبلی در [6] نمیتوان استفاده نمود، ولی در [5] Phillips , Sarason نشان داده‌اند که روشهای سیستم های قرینه را میتوان در مورد معادله تریکومی بکاربرد. دراینجا نیز این روش انتخاب شده است:

اگر: $B^*(x, y)$ عمود بر $A_n(x, y)B(x, y)$ باشد.

بازای: $B^*(x, y)=\{u=(u_1, u_2)\in\mathcal{R}^2\,,\,au_1+bu_2=0\}\,(x, y)C_0$

و بازای: $B^*(x, y)=\mathcal{R}^2 \qquad (x, y)\in C_1\cup C_2$

و بالاخره بازای: $B^*(x, y)=\{u=(u_1, u_2)\in\mathcal{R}^2\,,\,u_1n_2-u_2n_1=0\}\,(x, y)\in \mathbf{S}$

برقرار خواهد بود. بدین‌ترتیب میتوان فضاهای $B\pm$ را بصورت زیر تعریف نمود :

تعریف $B\pm$ ـ فضاهای هیلبرت متشکل ازتمام توابع تعیین شده روی $\delta\Omega$ میباشند که برای‌تقریباً تمام مقادیر (x , y) متعلق به $B(x , y)$ و $B^*(x , y)$ مشخص و دارای نرمهای بصورت :

$$|u|_{\pm}=\left[\pm\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} uA_nud\sigma\right]^{1/2} \tag{I-11}$$

میباشند. یعنی :

$$K_1=(an_1+bn_2)^{-1}(n_2^2+n_1^2F)$$

و :

$$K_2=-(an_1+bn_2)^{-1}(a_2+b^2F)$$

که دراینجا $u=(u_1 , u_2)$ متعلق به B_+ است و دراینصورت :

$$|u|_+^2=\frac{1}{2}\left[\int_{C_o} k_1(au_1+bu_2)^2d\sigma+\int_S k_2(n_2u_1-n_1u_2)^2d\sigma\right] \tag{I-12}$$

و برای $u=(u_1 , u_2)$ متعلق‌به B :

$$|u|_-^2=-\frac{1}{2}\int_C k_2(n_2u_1-n_1u_2)^2d\sigma \tag{I-13}$$

فضای هیلبرت B_o را بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$B_o=B_+\oplus B_-$$

که دارای نرم :

$$|u|_0=[|u_+|_+^2+|u_-|_-^2]^{1/2} \tag{I-14}$$

که $u_\pm$ تصاویر u در فضاهای $B_\pm$ میباشند. بالاخره مجموعه W توابع تعریف شده روی Ω با نرم :

$$||u||=\left[\iint_{\Omega} uEudxdy\right]^{1/2} \tag{I-15}$$

$$E=-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)$$

که $< , >$ حاصلضرب اسکالر مربوط باین نرم را تعریف میکنیم و زیرمجموعه V از توابع $S[C^2(\bar{\Omega})]$ را که دارای تکیه‌گاه فشرده است و همچنین اثر عناصر V روی $\delta\Omega$ متعلق به B_o است را درنظرمیگیریم.

اگر S اپراتوری دارای میدان $\{[u , u_+]\}$ ، $D(S)$ که در آن $u\in V$ و u_+ تصویر روی B_+ تابع $u/\delta\Omega$ باشد و خود S بصورت :

$$S(u , u_+)=[E^{-1}Au \text{ و } 2u_-] \tag{I-16}$$

مشخص شده باشد که u_- تصویر روی B_- تابع $u/\delta\Omega$ و T اپراتوری دارای میدان $D(T)=\{[u \text{ و } u_+]\}$

که u متعلق به V و u_- تصویر روی B_- تابع $u/\delta\Omega$ و تعیین شده بوسیله :

$$T(u, u_-) = [E^{-1}A^*u, 2u_+] \qquad (I-17)$$

فرض شود که درآن :

$$A^* = -\frac{\partial}{\partial x}A_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}A_2(x, y)$$

باشد ، دراینصورت اپراتورهای S_s و T_s را که کوچکترین تعمیم‌های S و T هستند درنظربگیریم ، طبق [5] میتوانیم یک تعمیم $\hat{S}$ موضعی (locale) و ماکزیمال S_s را که درضمن محدودیت (Restriction) T_s^* هم است ، پیدا نمائیم.

تعریف : گوئیم که $\hat{S}$ موضعی است اگر :

$$\begin{cases}[\varphi, \varphi_+] \cdot U \in D(\hat{S}) \\ \forall\varphi \in [\mathcal{D}(\bar{\Omega})]^2 \text{ و } U \in D(\hat{S})\end{cases}$$

برقرار باشد ؛

گوئیم که $\hat{S}$ ،accrétif ~~است~~ اگر بازای:

و

$$[u, u_+] \in D(\hat{S})$$

با تساوی زیر :

$$\hat{S}(u, u_+) = [f, g]$$

داریم :

$$<u, f> + \frac{1}{4}|g|_-^2 \geqslant \|u\|^2 + |u_+|_+^2 \qquad (I-18)$$

برقرار باشد.

اگر چنین نامساوی برقرار باشد ، دراینصورت معادلهٔ :

$$\hat{S}(u_1u_+) = [f, g] \quad \text{و} \quad [f, g] \in W \times B_-$$

دارای یک جواب منحصر بفرد خواهد بود . و درضمن (با استفاده از [5]) قضیه زیر را هم میتوان بیان نمود:

قضیه : ۱) برای هر $[f, g]$ متعلق‌به $W \times B_-$ معادلهٔ :

$$\hat{S}(u, u_+) = [f, g] \qquad (I-19)$$

دارای یک جواب منحصر بفرد در $W \times B_+$ و درعین‌حال نامساوی :

$$\|u\|^2 + |u_+|_+^2 \leqslant k(\|f\|^2 + |g|_-^2) \qquad (1-20)$$

که درآن k یک مقدار ثابت مثبت است ، برقرارخواهد بود.

۲) برای هر $[h, l]$ متعلق‌به $W \times B_+$ معادلهٔ :

$$\hat{S}^*(P, P_-) = [h, l] \qquad (1-21)$$

دارای یک جواب منحصر بفرد در $W\times B_-$ میباشد و درعین‌حال نامساوی :

$$\|P\|^2+|P|_-^2\leqslant k(\|h\|^2+|l|_+^2) \qquad (I-22)$$

با برقرارخواهد بوداستفاده ازاین قضیه میتوانیم مسائل کنترل معادله تریکومی را حل نمائیم.

II ـ مسائل کنترل

II – 1 ـ کنترل و ملاحظات گسترده شده

اگر فضای کنترلها را با $y=W$ نشان دهیم ، برای هرکنترل z از y حالت z (State)

بوسیلهٔ معادلهٔ :

$$\hat{S}(u, u_+)=[f+Bz, 0] \qquad (II-1)$$

در دست میباشد که درآن f متعلق به B, W یک اپراتور خطی و پیوسته از W در W است ، و فضای ملاحظات را با $\mathcal{H}=W$ فرض شده است و فونکسیونلی را که باید می‌نیمم کرد در مجموعه بسته و محدب R' (Convex) بصورت زیر میباشد :

$$J(z)=\|u(z)-zd\|^2+<Nz, z> \quad \text{و} \quad zd\in W \qquad (II-2)$$

و N یک اپراتور خطی‌پیوسته از y درخودش میباشد که هرمیتن (Hermitien) ومثبت است و درضمن :

$$(Nz, z)_y\geqslant d|z|_y^2 \quad \text{و} \quad (d>0)$$

برقراربوده وگسترش $z\longrightarrow u(z)$ آفین و پیوسته از W در W است. طبق [6]میتوان یک کنترل اپتیمال منحصر بفرد $\hat{z}$ بدست آورد که درنامساوی زیر صادق باشد :

$$\begin{cases} J'(\hat{z})(z-\hat{z})\geqslant 0 & \forall z\in R \\ \hat{z}\in R' \end{cases} \qquad (II-3)$$

و حالت معادل آن بصورت :

$$\begin{cases} <u(\hat{z})-Z_d, u(Z)-u(\hat{Z})>+<N\hat{Z}, Z-\hat{Z}>\geqslant 0 \\ \forall Z\in R \quad \text{و} \quad \hat{Z}\in R \end{cases} \qquad (II-4)$$

درمیآید

وحالت الحاقی P بوسیله معادله :

$$\hat{S}^*(P, P_-)=[u(z)-Z_d, 0] \qquad (II-5)$$

تعریف شده است.

فرمول گرین :

$$(\hat{S}^*(w, w_-), [V, V_+])_{W\times B_+}=([w, w_-], \hat{S}(V, V_+))_{W\times B_-} \qquad (II-6)$$

برای هر $[V, V_+]\in D(\hat{S})$ و هر $[W, W_-]\in D(\hat{S}^*)$ تساوی زیر را میدهد:

$$<u(\hat{Z})-Z_d, u(Z)-u(\hat{Z})>=<B^*P(\hat{Z}), Z-\hat{Z}> \qquad (II-7)$$

یعنی $\hat{Z}$ بوسیله نامساوی زیر تعریف میشود.

$$\begin{cases} <B^*P(\hat{Z})+N\hat{Z}, Z-\hat{Z}>\geqslant 0 & \forall Z\in R' \\ \hat{Z}\in R' \end{cases} \qquad (II-8)$$

و بطور خلاصه $\hat{Z}$ بوسیله تساویها و نامساویهای زیر داده میشود :

$$
\left|
\begin{array}{ll}
u=[u_1 \, , \, u_2] & \\
E^{-1}Au(\hat{Z}) = f+B\hat{Z} & \\
u_1 \;(\hat{Z})n_2 - u_2(\hat{Z})n_1 = 0 & \text{روی } C \\
P=[P_1 \, , \, P_2] & \\
E^{-1}A^*P(\hat{Z}) = u(\hat{Z}) - Z_d & \\
aP_1(\hat{Z}) + bP_2(\hat{Z}) = 0 & \text{روی } C_0 \\
P_1(Z)n_2 - P_2(\hat{Z})n_1 = 0 & \text{روی } S \\
< B^*P(\hat{Z}) + N\hat{Z} \, , \, Z-\hat{Z} > \geqslant 0 & \forall Z \in R' \, , \, \hat{Z} \in R'
\end{array}
\right.
$$

II ۲ ـ کنترل و ملاحظات مرزی (Frontière)

فضای کنترلها را اینبار مساوی $y=B_-$ فرض میکنیم.

برای $Z \in y$ حالت Z بوسیله معادله :

$$
\begin{cases}
\hat{S}(u \, , \, u_+) = [f \, , \, Z] \\
f \in W
\end{cases}
\qquad \text{(II} - 9)
$$

تعیین میگردد.

ملاحظات دراینجا $u_+(Z)$ در B_+ خواهد بود و فونکسیونل J دراینجا بصورت زیر درمیآید :

$$
\begin{cases}
J(Z) = |u_+(Z) - Z_d|^2_+ + (NZ \, , \, Z)_- \\
Z_d \in B_+
\end{cases}
\qquad \text{(II} - 10)
$$

گسترش $u_+(Z) \longleftarrow Z$ آفین وپیوسته از B_- در B_+ است ، بنابراین کنترل‌اپتیمال $\hat{Z}$ وجود دارد و منحصر بفرد است ، و شرط اپتیمال بودن بصورت :

$$
\begin{cases}
(u_+(\hat{Z}) - Z_d \, , \, u_+(Z) - u_+(\hat{Z}))_+ + (N\hat{Z} \, , \, Z - \hat{Z})_- \geqslant 0 \\
\forall Z \in R' \quad \text{و} \quad \hat{Z} \in R'
\end{cases}
\qquad \text{(II} - 11)
$$

درمیآید.

و حالت الحاقی بوسیله معادله :

$$
\overset{*}{S}(P \, , \, P_-) = [0 \, , \, u_+(Z) - Z_d] \qquad \text{(II} - 12)
$$

که با استفاده از فرمول گرین معادله زیر را بدست میآوریم :

$$
(u_+(\hat{Z}) - Z_d \, , \, u_+(Z) - u_+(\hat{Z}))_+ = (P_-(\hat{Z}) \, , \, Z - \hat{Z})_- \qquad \text{(II} - 13)
$$

بدین‌ترتیب $\hat{Z}$ بوسیله معادلات (II−9) و (II − 12) وبا معادلهٔ :

$$
\begin{array}{ll}
(P_-(\hat{Z}) + N\hat{Z} \; , \; Z - \hat{Z})_- \geqslant 0 & \forall Z \in R \\
\hat{Z} \in R &
\end{array}
\qquad \text{(II} - 14)
$$

داده میشود، دربسیاری‌از موارد گسترش $N=dI$ است‌که $d>0$ و I گسترش یکه میباشد.

تبصره ـ مانند II − 1 و II − 2 میتوان حالت کنترل توزیعی و مشاهدات مرزی و کنترل مرزی و مشاهدات توزیعی را بررسی نمود.

منابع

1 — Bardos These , Paris (1969)

2 — Butzer , Berens Approximations of Semi group.

3 — Lions Controle optimal de systemes gouvenés par des equations aux derivées portielles , G. Villars.

4 — Morawetz Auniqueness Heorm for Frankl's problem Comm. Pure Appl , Math. Vol 7 (1954).

5 — P ilbps , L. Sarason, Singular symmétric positive first order differential opévetors Journal of Math. and Mechanics Vol. 15 , n°2 (1966).

6 — F. Sadat Aghili Thése Paris (1972).

7 — L. Schwartz Theorie des distributions. Herman (1966).

L' Equation de TRICOMI

by:

F. SADAT-AGHILI

Université de Téhéran

Dans ce travail nous étudions l' Equation de TRĪCOM. Cette équation peut être tranformée en un système symétrique (5), mais la matrice $A_n = \Sigma n_i A_i$ n' est pas régulière c' est à l' aide change de rang en certains points de la frontière, néanmoins, on peut étudier les problèmes de Contrôle á l' aide des travaux de Phillips & Sarason, ainsi que Morawetz.

Cette méthode a l' avantage de faciliter dans certains cas les méthodes d' approximations grâce aux travaux de Bardos, Butzer et Berens.