محاسبه‌خرپا بعنوان تیرجانپربانرمی برشی

نوشته : دکترمجیدصادق‌آذر ،استادیاردانشکده فنی ــ دانشگاه‌تهران

چکیـــده

خرپابه تیرجان پر بانرمی برشی‌تبدیل می‌گرددو ضخامت جان نیمرخ‌معادل برای انواع مختلف شبکه بندی‌خرپا محاسبه می‌شود . سپس روابط‌اساسی برای محاسبه دستگاههای ساختمانی متشکل از تیرهای‌جان پربانرمی برشی به کمک روش نیرو و همچنین روش‌افت ــ شیب ذکر می‌شوند . در خاتمه جداول لازم برای محاسبات سریع خرپاهای یکسره تدوین می‌شوند .

۱ــ مقدمـــه :

محاسبه تغییرشکل خرپاهای معین و نیز تغییر شکل و نیروی عضوهای خرپاهای نامعین درعمل وقت گیر می‌باشد . در اینجا روشی ارائه می‌شود که بتوان خرپاها را در اسرع وقت محاسبه و یا محاسبات انجام یافته را با دقت کافی کنترل کرد . برای این منظور خرپا به یک تیرجان پربانرمی برشی تبدیل می‌شود . و محاسبه تغییر شکل تیربا در نظرگرفتن‌نرمی برشی آن انجام می‌گیرد . تیرجان پربانرمی برشی " تیرجان پربرش نرم " یا بطور کوتاه "تیر برش نرم " نامیده می‌شود . تغییر شکل حاصل از برش در تیرجان پر برش نرم‌در مقایسه با تغییر شکل حاصل از خمش ، برخلاف تیرجان پرمعمولـی ، کوچک نمی‌باشد و نمی‌توان از مقدار تغییر شکل برشی در کل تغییر شکل تیر چشم پوشی کرد . خرپاها ، تیرهای ویراندل‌و تیرهای فشرده (تیرهای درشت) ، نوع متداول‌تیر برش نرم می‌باشند .

در بخش ۲ این مقاله روابط‌اساسی برای تبدیل خرپابه یک تیرجان پر برش نرم ، و محاسبه ضخامت جان نیمرخ معادل و ضریب نرمی برشی‌آن برای انواع مختلف شبکه بندی خرپا بدست آورده می‌شود .در بخش ۳ محاسبه دستگاههای ساختمانی نامعین متشکل از تیرهای برش نرم به کمک روش نیرو و روش‌افت ــ شیب ذکر می‌گردد . بالاخره در بخش ۴ جداولی برای‌محاسبه خرپاهای یکسره تحت بار یکنواخت تدوین و کاربردآنها به صورت دو مثال ذکر می‌گردد .

۲ــ ضخامت جان معادل و نرمی برشی

برای محاسبه خرپابه صورت تیرجان پربانرمی برشی ،احتیاج‌به تعیین نیمرخ معادل و همچنین ضریب نرمی‌برشی تیر تبدیل یافته می‌باشد . نیمرخ معادل عبارت از یک نیمرخ به شکل I می‌باشد (شکل ۲) که مقاطع بال بالائـــی و پائینی آن بترتیب‌برابر مقاطع عضو بالائی و پائینی خرپا بوده‌و ارتفاع آن e برابر ارتفاع خرپا میباشد . ضخامت جان نیمرخ معادل t' بستگی به نوع شبکه بندی خرپا دارد . برای بدست آوردن t' و همچنین برای‌تعیین $\varkappa_s$ ضریب نرمـی برشی تیر ، از تساوی انرژی تغییر شکل نیروهای برشی استفاده می‌شود . به این معنی‌که انرژی تغییر شکل ناشی‌از نیروهای برشی ، برای جان تیر تبدیل یافته و خرپای اولیه مساوی قرار داده می‌شود .

۲ــ۱ــ نرمی برشی $\varkappa_s$

نرمی برشی $\varkappa_s$ یک‌تیر در محاسبه سازه ها با رابطه زیر تعریف می‌شود (۱)

$$\varkappa_s = \frac{\varkappa}{GA} \cdot \frac{EI}{l^2}$$

۱ــ تاریخ دریافت مقاله : ۱۳۵۸/۱۰/۱۲ .

در رابطه فوق E = مدول کشسانی [1]، G = مدول برش، I = گشتاورجنبشی [2]، A = مساحت سطح مقطـــع و l = طول تیر می‌باشد. ضریب تقسیم برش $\varkappa$، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\varkappa = \frac{A}{A'_Q} \qquad (۲)$$

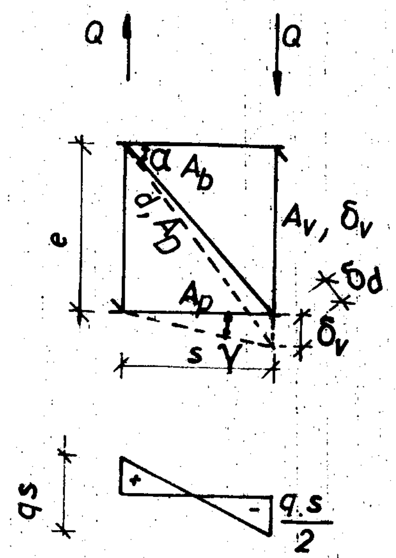
A_Q مقطع مقاوم برشی بوده و مقدار آن بستگی به شکل و ابعاد نیمرخ داشته و در کتب مقاومت مصالح معمولاً ذکر شده است. برای تیرهای بشکل I با تقریب متناسب میتوان نوشت:

$$A_Q = e \cdot t' \qquad (۳)$$

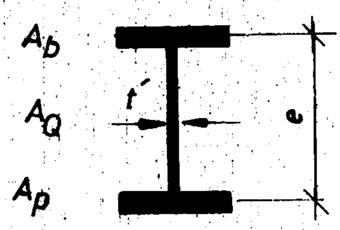
با استفاده از روابط (۱) و (۳) خواهیم داشت:

$$\varkappa_s = \frac{E}{G} \cdot \frac{I}{e \cdot t' \cdot l^2} \qquad (۴)$$

در رابطه فوق به تعیین ضخامت جان نیمرخ معادل t' احتیاج است که در زیر انجام می‌گیرد:



شکل ۱ــ تغییر شکل برشی بند خرپـــــا



شکل ۲ــ نیمرخ معــــادل

۲ــ۲ــ ضخامت جان معادل

انرژی تغییر شکل برشی در کل حجم V یک تیر عبارت است از: $u = \frac{1}{2} \int \tau \gamma \, dv$ که در آن τ و γ بترتیب تنش و کرنش برشی می‌باشـــند، سطـــح مقطـــع نیمـــرخ معـــادل از ســـه قسمت بال بالائی، جان و بال پائینی تشکیل یافته است. اگرمساحت هر قسمت با A_i و طول آن با s_i نشان داده شود رابطـــه فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \int \tau_i \cdot \gamma_i \cdot dv_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} s_i \int \tau_i \cdot \gamma_i \cdot dA_i \qquad (۵)$$

با در نظر گرفتن اینکه هرقسمت از سطح مقطع از ورقهای به ضخامت ثابت t_i و ارتفاع ثابت e_i تشکیل یافتـــه است $(A_i = e_i \cdot t_i)$ و همچنین با استفاده از روابط $\gamma_i = \frac{\tau_i}{G}$ و $\tau_i = \frac{q_i}{t_i}$ که درآن q_i جریان برشی قسمت i می‌باشد، رابطه (۵) به صورت زیر در می‌آید:

1- Modulus of Elasticity

2- Moment of Inertia

$$u = \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i^2}{2G} \cdot \frac{e_i \cdot s_i}{t_i} \qquad (۶)$$

u' سهم انرژی تغییر شکل برشی جان نیمرخ معادل به ضخامت t' از انرژی تغییر شکل برشی u مربوط به کـــل سطح مقطع عبارت است از :

$$u' = \frac{q^2 \cdot s}{2G} \cdot \frac{e}{t'} \qquad (۷)$$

که در آن q جریان برشی در جان نیمرخ بوده و برآیند جریان برشی q در ارتفاع جان e عبارت‌از نیروی برشی $Q=q.e$ است چون این تیرجان پربرش نرم معادل خرپای حقیقی می‌باشد پس باید انرژی تغییر شکل u' در اثر Q در جان نیمرخ معادل مساوی انرژی تغییر شکل u'' در اثر Q در شبکه بندی خرپا باشد . یعنی :

$$u' = u''$$

برای بدست آوردن u'' احتیاج به محاسبه نیروی عضوهای شبکه بندی خرپا در اثر Q می‌باشد و به طور نمونـــه شبکه بندی خرپای سطر ۱ جدول شماره ۱ انتخاب می‌شود .نیروی عضوهای خرپا در اثر Q طبق شکل ۱ از تعادل نیروهادر هربند خرپا بدست می‌آید و بشرح زیر است :

نیروی عضو قائم : $N_v = Q = q \cdot e$

نیروی عضو قطری : $N_d = \frac{Q}{\sin\alpha} = q.e. \frac{d}{e} = q.d$

نیروی عضوهای بالائی و پائینی N_b و N_p در انتهای عضو :

$$N_b = N_p = \frac{1}{2} Q. \cot\alpha = \frac{1}{2} q.e \frac{s}{e} = \frac{1}{2} q\, s$$

علامت Q در دو انتها متفاوت می‌باشد و پخش نیروهای N_b و N_p خطی بوده‌و در شکل ۱ رسم شده است .

انرژی کرنشی عضوهای خرپا با توجه به نیروهای N_v ، N_d ، N_b و N_p و پخش آنها بر روی عضوها بشرح زیـــر می‌باشد :

انرژی‌عضو بال بالائی b :
$$u''_b = \frac{1}{2E.A_b} \cdot \frac{s}{3} \cdot (q\frac{s}{2})^2 = \frac{q^2}{2E} \cdot \frac{s^3}{12A_b} \qquad (۸a)$$

انرژی عضو قطری d :
$$u''_d = \frac{1}{2E.A_d} \cdot d \cdot (q.d)^2 = \frac{q^2}{2E} \cdot \frac{d^3}{A_d} \qquad (۸b)$$

انرژی عضو قائم v :
$$u''_v = \frac{1}{2E.A_v} \cdot e \cdot (q.e)^2 = \frac{q^2}{2E} \cdot \frac{e^3}{A_v} \qquad (۸c)$$

انرژی عضو بال پائینی p :
$$u''_p = \frac{1}{2E.A_p} \cdot \frac{s}{3} \cdot (\frac{q.s}{2})^2 = \frac{q^2}{2E} \cdot \frac{s^3}{12A_p} \qquad (۸d)$$

u'' از مجموع انرژیهای فوق بدست‌می‌آید :

$$u'' = \frac{q^2}{2E} \left[\frac{d^3}{A_d} + \frac{e^3}{A_v} + \frac{s^3}{12} \left(\frac{1}{A_b} + \frac{1}{A_p} \right) \right] \qquad (۸e)$$

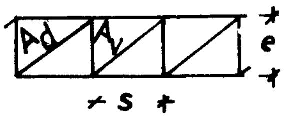
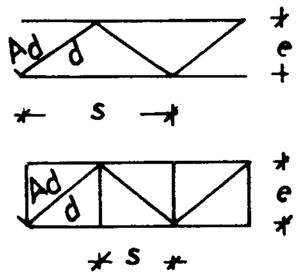
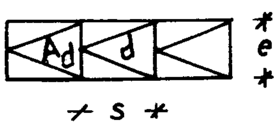
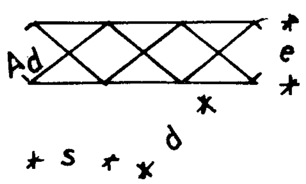
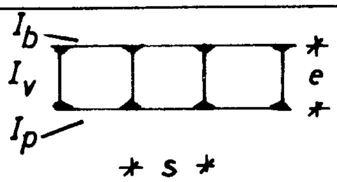
ضخامت جان نیمرخ معادل t از تساوی $u'=u''$ بدست می‌آید :

$$t' = \frac{E}{G} \cdot \frac{s \cdot e}{\frac{d^3}{A_d} + \frac{e^3}{A_v} + \frac{s^3}{12} \left(\frac{1}{A_b} + \frac{1}{A_p} \right)} \qquad (۹)$$

در رابطه فوق A_d ، A_v ، A_b و A_p بترتیب مساوی مساحت سطح‌مقطع عضوهای قطری d ، قائم v ، بـــال بالائی b و بال پائینی p خرپا میباشد . نرمی برشی $\varkappa_s$ خرپای فوق از قرار دادن t' در رابطه (۴) بدست آمده و در سطر ۱ جدول شماره ۱ ذکر شده است .

برای انواع دیگر شبکه بندی خرپا می‌توان مثل روش فوق عمل کرد . مقدار t' و κ_s برای بعضی دیگر از شبکه بندی ها در جدول شماره ۱ ذکر شده است .

جدول شماره ۱ ــ ضخامت معادل t' و نرمی برشی κ_s

	1	2	3
		t'	κ_s
1		$\frac{E}{G}\cdot\frac{s.e}{\frac{d^3}{A_d}+\frac{e^3}{A_v}+\frac{s^3}{12}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}$	$\frac{I}{l^2}\cdot\frac{\frac{d^3}{A_d}+\frac{e^3}{A_v}+\frac{s^3}{12}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}{s.e^2}$
2		$\frac{E}{G}\cdot\frac{s.e}{\frac{d^3}{A_d}+\frac{s^3}{3}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}$	$\frac{I}{l^2}\cdot\frac{\frac{d^3}{A_d}+\frac{s^3}{3}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}{s.e^2}$
3		$\frac{E}{G}\cdot\frac{s.e}{\frac{2d^3}{A_d}+\frac{e^3}{4A_v}+\frac{s^3}{12}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}$	$\frac{I}{l^2}\cdot\frac{\frac{2d^3}{A_d}+\frac{e^3}{4A_v}+\frac{s^3}{12}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}{s.e^2}$
4		$\frac{E}{G}\cdot\frac{s.e}{\frac{d^3}{2A_d}+\frac{s^3}{12}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}$	$\frac{I}{l^2}\cdot\frac{\frac{d^3}{2A_d}+\frac{s^3}{12}\left(\frac{1}{A_b}+\frac{1}{A_p}\right)}{s.e^2}$
5		$\frac{E}{G}\cdot\frac{1}{\frac{s.e^2}{12I_v}+\frac{s^2 e}{48}\left(\frac{1}{I_b}+\frac{1}{I_p}\right)}$	$\frac{I}{l^2}\cdot\frac{\frac{s.e}{12I_v}+\frac{s.e}{48}\left(\frac{1}{I_b}+\frac{1}{I_p}\right)}{e}$

۳ــ محاسبه دستگاههای ساختمانی نامعین متشکل از تیرهای برش نرم

محاسبه دستگاه ساختمانی نامعین‌متشکل ازتیرهای برش نرم با در نظرگرفتن تغییر شکلهای حاصل از نیروهای برشی به کمک روشهای نیرو و افت ــ شیب دربندهای ۳ــ۱ و ۳ــ۲ ذکر می‌گردد .اگر خرپا به صورت تیر برش نرم ،محاسبه گردد پس از بدست آوردن t' ضخامت جان نیمرخ معادل از جدول شماره ۱ ، می‌توان گشت‌اورجنبشی ، نیمرخ معادل و همچنین نرمی برشی آن را از رابطه (۴) محاسبه کرد .

۳–۱– روش نیـــرو

محاسبه دستگاههای ساختمانی متشکل از تیرهای برش نرم به کمک روش نیرو با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی انجام میگیرد . رابطه تغییر شکل بشرح زیر میباشد :

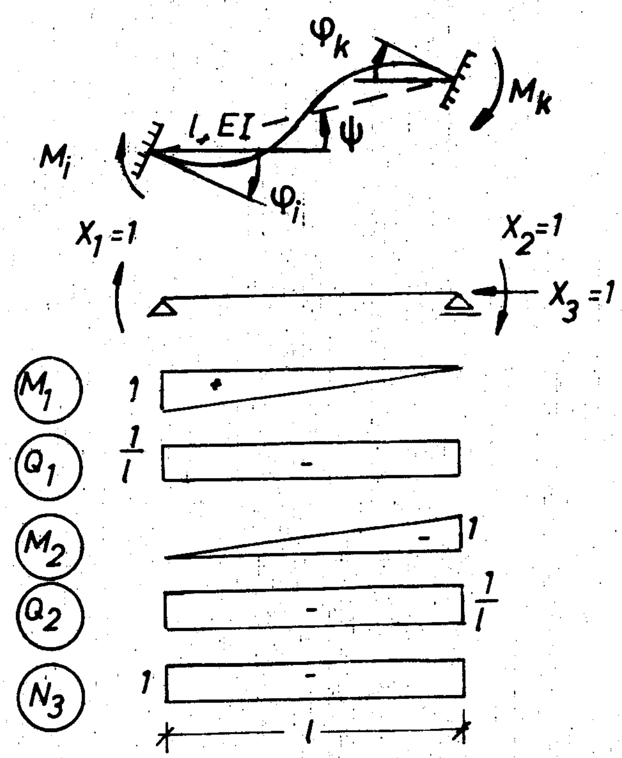
$$\delta_{iK} = \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI}\, dx + \int \frac{Q_i \cdot Q_k}{G \cdot A_Q}\, dX \qquad (۱۰)$$

مقطع مقاوم برشی A_Q برای خرپاها از رابطه (۳) بدست میآید . روش محاسبه عینا" مشابه محاسبه دستگاه ساختمانی متشکل از تیرهای جان پر معمولی بوده و از ذکر آن در اینجا خودداری میگردد . (به کتب محاسبه سازه ها مراجعه گردد) .

۳–۲– روش افت ـ شیـــب

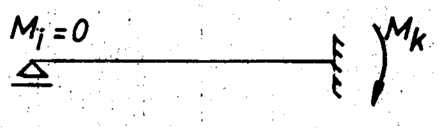
روابط لنگر دو سر تیر حاصل از افت ـ شیب و همچنین حاصل از بارگذاری با در نظر گرفتن نرمی برشی تیر در بخشهای ۳–۲–۱ و ۳–۲–۲ ذکر شده و بقیه روش عینا" مشابه محاسبه دستگاههای ساختمانی به کمک روش افت ـ شیـــب میباشد .

۳–۲–۱ لنگر افت ـ شیب برای تیر دوسر گیردار



شکل ۳– تیر دو سر گیـــردار

نش ۱



شکل ۴–تیر یک سرگیردار و سر دیگر مفصلی

لنگرهای M_i و M_k دو انتهای i و k از یک تیر در اثر دوران تکیه گاه ها (شیب دو انتهاء) به مقدار ϕ_i و ϕ_k و زاویه

ψ حاصل از افت دو انتها (شکل۳) عبارت اند از:

$$M_i=F_1\cdot\frac{EI}{l}\phi_i + F_2\cdot\frac{EI}{l}\phi_k+F_3\cdot\frac{EI}{l}\psi +M_i^o \quad (11a)$$

$$M_k=F_2\cdot\frac{EI}{l}\phi_i+ F_1\cdot\frac{EI}{l}\phi_k +F_3\cdot\frac{EI}{l}\psi +M_k^o \quad (11b)$$

M_i^c و M_k^c لنگرهای گیرداری دو انتهای iو k حاصل از بارگذاری با در نظر گرفتن نرمی برشی می‌باشد.
ضرائب F_1 و F_2 و F_3 برای یک تیر دو سرگیردار با EI ، GA و $\varkappa_s$ ثابت به کمک روش نیرو درزیر بدست می‌آید:

الف - دوران انتهای i به مقدار ϕ_i

در شکل ۳ نیروهای نامعین X_1 و X_2 و X_3 و همچنین لنگرهای M_1 و M_2 و نیروهای برشی Q_1 و Q_2 و نیروی محوری N_3 حاصل از $X_1=1$ و $X_2=1$ و $X_3=1$ رسم شده اند. δ_{ik} تغییر شکل نقطه i در اثر نیروی $X_k=1$ در محـــل k برای حالتهای مختلف با استفاده از رابطه (۱۰) بشرح زیر می‌باشد:

$$\delta_{11}=\left(\frac{l}{3}+\frac{EI}{G.A_Q\, l^2}\right)\cdot\frac{l}{EI}=\left(\frac{l}{3}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\left(\frac{-l}{6}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI} \quad ,\delta_{22}=\left(\frac{l}{3}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI}$$

معادلات سازگاری برای ϕ_i بشرح زیر می‌باشند:

$$\left(\frac{l}{3}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI}X_1+\left(-\frac{l}{6}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI}X_2-\phi_i=o$$

$$\left(-\frac{l}{6}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI}X_1+\left(\frac{l}{3}+\varkappa_s\right)\frac{l}{EI}X_2=o$$

از حل دو معادله فوق مقدار X_1وX_2 بدست می‌آید:

$$X_1=\frac{4EI}{l}\cdot\frac{1+3\varkappa_s}{1+12\varkappa_s}\phi_i \quad (۱۲a) \qquad X_2=\frac{2EI}{l}\cdot\frac{1-6\varkappa_s}{1+12\varkappa_s}\phi_i \quad (۱۲b)$$

ب - دوران انتهای k به مقدار ϕ_k

مقدار X_1و X_2برای ϕ_kعینا" مشابه حالت الف بدست می‌آید:

$$X_1=\frac{2EI}{l}\cdot\frac{1-6\varkappa_s}{1+12\varkappa_s}\phi_k \quad (۱۳a) \qquad X_2=\frac{4EI}{l}\cdot\frac{1+3\varkappa_s}{1+12\varkappa_s}\cdot\phi_k \quad (۱۳b)$$

مقادیر F_1 و F_2 از روابط (a,b ۱۲) و (۱۳a,b) بدست می‌آیند:

$$F_1=4\frac{1+3\varkappa_s}{1+12\varkappa_s} \quad (۱۴a) \qquad F_2=2\frac{1-6\varkappa_s}{1+12\varkappa_s} \quad (۱۴b)$$

ج - زاویه افت ψ

مقدار X_1وX_2 برای ψ عینا" مشابه حالت الف بدست می‌آید:

$$X_1=X_2=\frac{6EI}{l}\cdot\frac{1}{1+12\varkappa_s} \quad (۱۵)$$

F_3 از رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

$$F_3=6\frac{1}{1+12\varkappa_s} \quad (۱۶)$$

به ازاء $\mathcal{K}_s=0$ ، براساس محاسبه دستگاههای ساختمانی متشکل از تیرهای جان پر معمولی خواهیم داشت :

$F_1=4 \quad , \quad F_2=2 \quad , \quad F_3=6$

۳-۲-۲ لنگر افت ـ شیب برای تیر یکسر گیردار و یکسر مفصلی (شکل ۴)

در این حالت هم عینا" مشابه حالت ۳-۲-۱ عمل می‌شود :

$$M_i=0 \qquad (17a)$$

$$M_k=F_4\cdot\frac{EI}{l}\,\phi_k+F_4\cdot\frac{EI}{l}\,\psi+M_k^{o} \qquad (17b)$$

$$F_4=3\frac{1}{1+3\mathcal{K}_s} \qquad (18)$$

M_k^{o} لنگر گیرداری انتهای k حاصل از بارگذاری با در نظر گرفتن نرمی برشی آن می‌باشد .

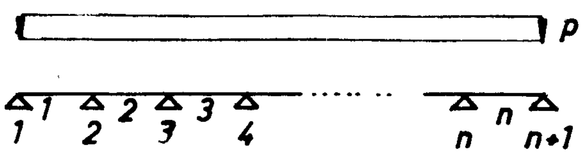
دستگاههای ساختمانی نامعین متشکل از تیرهای برش نرم با در دست داشتن مقادیر M_i و M_k براساس روابط (11a,b) و (17 a,b) عینا" مانند دستگاههای ساختمانی نامعین متشکل از تیرهای جان پرمعمولی به کمک روش افت ـ شیب محاسبه می‌شوند .

۴ـ محاسبه خرپاهای یکسره تحت بار یکنواخت در تمام طول خرپا

در اینجا با استفاده از مطالب بندهای ۲و۳ جداولی برای محاسبه خرپاهای یکسره تحت بار یکنواخت در تمام طول خرپا تنظیم می‌شوند .

۴-۱ ـ نیروها

در خرپاهای یکسره تحت بار یکنواخت، مقدار ψ مساوی صفر بوده و مقدار لنگرهای M_{12}^{o} و M_{22}^{o} با در نظر گرفتن نرمی‌برشی بشرح زیر می‌باشند :



شکل ۵ ـ خرپای یکسره تحت بار یکنواخت

لنگر دهانه ۱ در تکیه گاه ۲ تحت بارهای خارجی :

$$M_{12}^{o}=\frac{p.l^2}{8}\cdot\frac{1}{1+3\mathcal{K}_s} \qquad (19a)$$

لنگر دهانهٔ ۲ در تکیه گاه ۲ تحت بارهای خارجی :

$$M_{22}^{o}=-\frac{p.l^2}{12} \qquad (19b)$$

جمع لنگرهای بار خارجی در تکیه گاه ۲ (و همچنین تکیه گاه n-1) عبارت است از :

$$M_{12}^{o}+M_{22}^{o}=\frac{p.l^2}{24}\cdot\frac{1-6\mathcal{K}_s}{1+3\mathcal{K}_s}=\frac{p.l^2}{12}\left(1-\frac{2}{F_1}\right) \qquad (19c)$$

جمع لنگرهای بارهای خارجی درتکیه گاه های ۳ الی (n-2)مساوی صفر می‌باشد .

از تعادل لنگرها در تکیه گاههای ۲ الی $(n-1)$ معادلات تعادل خرپای یکسره بدست می‌آید :

$$\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} F_1+F_4 & F_2 & & & & \\ F_2 & 2F_1 & F_2 & & & \\ & F_2 & 2F_1 & F_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & F_2 & 2F_1 & F_2 \\ & & & & F_2 & F_1+F_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \vdots \\ \phi_{n-2} \\ \phi_{n-1} \end{bmatrix} + \frac{p.l^2}{12}\begin{bmatrix} 1-\frac{2}{F_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1-\frac{2}{F_1} \end{bmatrix} = 0 \qquad (۲۰)$$

از حل معادلات (۲۰) مقادیر ϕ_2 و ϕ_3 و ϕ_{n-1} بدست می‌آیند و مقادیر لنگرهای تیکه گاهی با کمـــک روابط (۱۰a,b) و (۱۷a,b) محاسبه می‌شوند . لنگرهای تکیه گاههای ۲و۳ به ترتیب عبارتند از :

$$M_2=m_2 \cdot p \cdot l^2 \qquad M_3=m_3 \cdot p \cdot l^2$$

مقادیر m_2 و m_3 به تتیب درجداول شماره ۲و۳ برحسب ضریب نرمی برشی $\mathcal{K}_s$ و تعداد دهانه های

جدول شماره ۲ــ مقدار $m_2 = \dfrac{M_2}{p.l^2}$

$n \backslash \mathcal{K}_s$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
2	-0,125	-0,099	-0,079	-0,066	-0,057	-0,050	-0,044	-0,041	-0,037	-0,034	-0,031
3	-0,100	-0,089	-0,081	-0,075	-0,070	-0,064	-0,063	-0,060	-0,058	-0,056	-0,054
4	-0,107	-0,091	-0,081	-0,073	-0,068	-0,062	-0,058	-0,054	-0,051	-0,048	-0,045
5	-0,105	-0,090	-0,081	-0,074	-0,066	-0,062	-0,060	-0,059	-0,056	-0,054	-0,052
10	-0,105	-0,090	-0,081	-0,074	-0,066	-0,062	-0,060	-0,059	-0,057	-0,055	-0,053

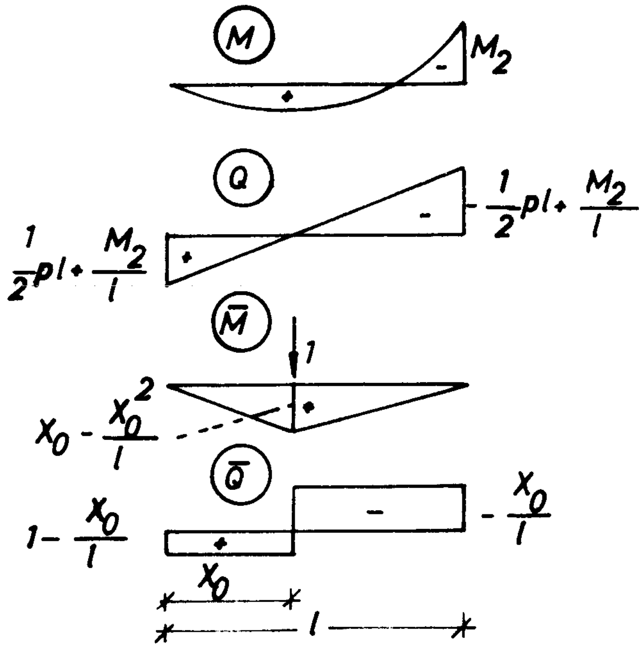
جدول شماره ۳ــ مقدار $m_3 = \dfrac{M_3}{p.l^2}$

$n \backslash \mathcal{K}_s$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
3	-0,100	-0,089	-0,081	-0,074	-0,068	-0,063	-0,058	-0,055	-0,051	-0,048	-0,046
4	-0,071	-0,083	-0,084	-0,083	-0,081	-0,080	-0,079	-0,077	-0,076	-0,084	-0,083
5	-0,079	-0,083	-0,084	-0,082	-0,079	-0,076	-0,074	-0,071	-0,068	-0,065	-0,063
10	-0,077	-0,083	-0,084	-0,083	-0,081	-0,079	-0,077	-0,075	-0,074	-0,072	-0,069

n (برای طول مساوی lهمه دهانه ها) ذکر شده اند . مشاهده می‌شود که‌مقدار لنگرهای تکیه گاهی M_2 و M_3 با افزایش نرمی برشی $\mathcal{K}_s$کاهش می‌یابد .

۴-۲- خیـــز حداکثـــــر

خیز حداکثر δ_1 برای EI و l ثابت در دهانه های کناری ایجاد می‌شود و درمحاسبات تقریبی ، محل خیـــز حداکثربا محل لنگر حداکثر این دهانه‌ها منطبق فرض می‌شود . برای محاسبه δ_1 از روش کاهش درجه نامعینی استفـاده می‌کنیم . (شکل ۶) .



شکل ۶ ـ محاسبه خیز حداکثر دهانه کناری با استفاده از روش کاهـش درجـــه نامعینـــــــــــی

$$EI\,\delta_1 = \int M\bar{M}\,dx + \varkappa_s \cdot l^2 \cdot \int Q\bar{Q}\,dx$$

M و Q به ترتیب لنگر و نیروی برشی دهانه کناری تحت بارگذاری گسترده یکنواخت در سیستم نامعیـن‌و $\bar{M}$ و $\bar{Q}$ لنگر و نیروی برشی همین دهانه تحت بارگذاری واحد "۱" درمحل حداکثر M در دهانه کناری (یعنی در محل X_o) می‌باشند . مقادیر M_2 و X_o برابراند با :

$$M_2 = m_2 \cdot p \cdot l^2 \qquad , \qquad X_o = \frac{1}{2} l + \frac{M_2}{p \cdot l}$$

مقدار $EI\ \delta_1$ با استفاده از روابط بالا محاسبه می‌شود :

$$\frac{EI\ \delta_1}{p.l} = -\frac{1}{3}\, m_2 \left(\frac{1}{2} + m_2\right)(1+m_2)\left(\frac{1}{2} - m_2\right)^2 +$$

$$\varkappa_s \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - m_2^2\right)(1-2m_2) + \left(\frac{1}{16} - m_2^4\right) + m_2^2(1+2m_2)\right] \qquad (۲۱)$$

رابطه فوق را به صورت تقریبی زیر می‌توان خلاصه کرد :

(۲۲)

$$\frac{EI\ \delta_1}{p.l^4} \approx 0,005 + 0,13\,\varkappa_s$$

جدول شماره ۴ مقدار فوق رانشان می‌دهد و مشاهده می‌شود که خیز با افزایش ضریب نرمی برشی $\varkappa_s$ افزایـش می‌یابد .

جدول شماره ۴ ـ مقدار خیز در دهانه اول ـ $\frac{\delta_1 \cdot EI}{p \cdot l^4}$

$\varkappa_s$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	0,005	0,018	0,030	0,043	0,054	0,070	0,083	0,095	0,109	0,120	0,135

۴ـ۳ـ چند مثـــال

۴ـ۳ـ۱ـ مثـــال ۱

کاربرد روش فوق در مورد خرپای معین شکل ۷ نشان‌داده شده و δ_m خیز وسط دهانه محاسبه می‌گردد.

	نیمرخ مستطیلـــی	سطح مقطـــع
O_1 O_4	2 X 10/20	A_b=400 cm^2
U_1 U_4	2 X 10/18	A_p=360 cm^2
D_1	12/24	A_d=216 cm^2
D_2, D_3, D_4	12/18	
V_1	2 X 10/18	
V_2	2 X 10/16	A_v= 271 cm^2
V_3	2 X 10/12	
V_4	2 X 10/10	

e = 200cm,: d=320cm; s= 250cm; l= 2000cm

$$a=\frac{400.200}{400+360}=105,3 \text{ cm} \qquad I = 12760+6226+124.60^2+62.120^2=1358286 \text{Cm}^4$$

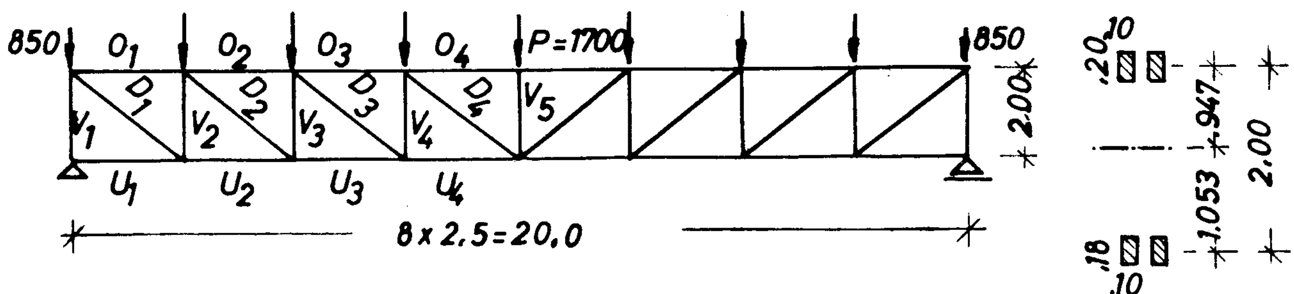
$$I= 400.94,7^2+2.10.\frac{20^3}{12}+ 360.105,3^2+2.10.\frac{18^3}{12}=7602001 \quad cm^4$$

$$\varkappa_s=\frac{7,602.10^6}{2000^2}\cdot\frac{\frac{320^3}{216}+\frac{200^3}{271}+\frac{250^3}{12}+\frac{250^3}{250}\left(\frac{1}{400}+\frac{1}{360}\right)}{200^2}=0,0357$$

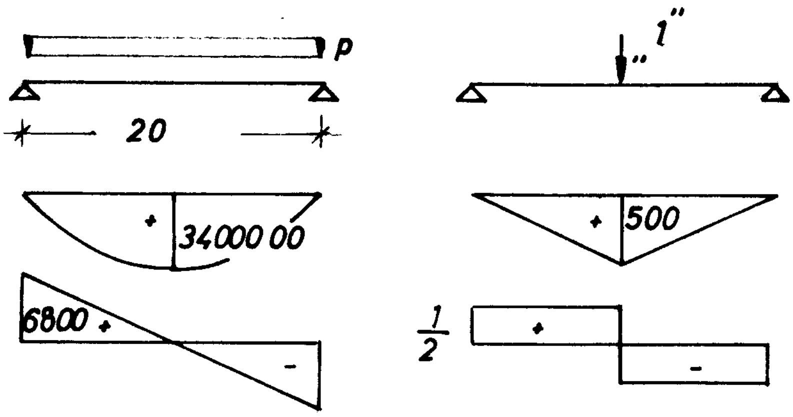
نیروهای متمرکز تبدیل به باریکسان می‌گردند:

$$p = \frac{8.1700}{20} = 680 \text{kg/m}$$

محاسبات در سیستم معادل طبق شکل ۸ انجام می‌گیرد.



شکل ۷ ـ خرپـــای ساده چوبـــی



شکل ۸ ــ پخش‌لنگر و نیروی برشی تحت بار یکنواخت و بار واحد در وسط دهانه

$$EI\,\delta_m = \int M.\bar{M}\,dX + \varkappa_s\,.1^2 \int Q.\,\bar{Q}\,dX$$

$$= \frac{1}{3}\,3400000\,.\,500\,(1 + 0,25)\,.\,2000$$

$$+\,0,0357\,.\,2000^2\,.\,2.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,6800\,.\,1000$$

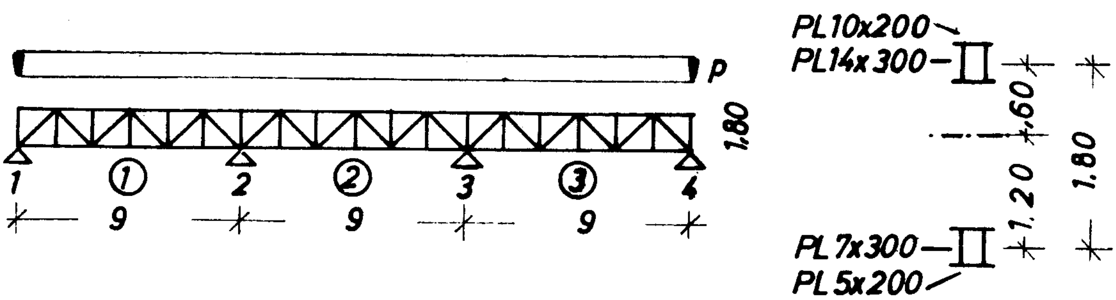
$$= 1,416666\,.\,10^{12} + 0,48552\,.\,10^{12} = 1,902.10^{12}$$

$$\delta_m = \frac{1,902\,.\,10^{12}}{7,602\,.\,10^{6}.1,0.10^{5}} = 2,50\text{cm}$$

جواب دقیق طبق مرجع [1] مساوی $\delta_m=2,42$ سانتیمتر می‌باشد و مقدار δ_m با محاسبه خرپا بعنوان تیرجان پربدون در نظر گرفتن نرمی برشی یعنی برای $\varkappa_s=0$ مساوی $\delta_m=1,79$ سانتیمتر می‌شود. از اینجا ملاحظه می‌شود که جواب دقیق با جواب روش این مقاله حدود ۲ درصد تفاوت دارد در حالی که باصرفنظر از نرمی برشی تفاوت با جواب دقیق حدود ۳۴ درصد خواهد بود.

مثال ۲:

محاسبه لنگرهای تکیه گاهی و خیز حداکثر برای یک خرپای فلزی یکسره سه دهانه طبق شکل ۹ انجام می‌گیرد. (مرجع [۲]).



شکل ۹ ــ خرپای فلزی سه دهانه

مشخصات سطح مقطع نیمرخ معادل در برش A-A بشرح زیر می‌باشد:

سطح مقطع ضلع بالائـــی :

$$A_b = 2.\ (1,0.20,0 + 1,4.\ 30,0) = 124\ cm^2$$

سطح مقطع ضلع پائینـــی :

$$A_p = 2.\ (0,5\ .\ 20,0 + 0.7.\ 30,0) = 62\ cm^2$$

سطح مقطع ضلع قطـــری : 2L100X12

$$A_d = 2.\ 22,7 = 45,4\ cm^2$$

سطح مقطع ضلع قائـــم : 2L70X11

$$A_v = 2.\ 14,3 = 28,6 cm^2$$

$e = 1,80m,\quad s=1,50m,\quad l=9,0m,\quad d= 2,343m,\quad p=1,0\ t/m$

$E = 2100\ t/cm^2,\quad G=810\ t/cm^2,\quad I_b = 12760\ cm^4,\quad I_p = 6226\ cm^4$

$$e_s = \frac{124.180}{124+62} = 120\ cm,$$

طبق جدول ۱ نرمی برشی عبارت است از :

$$\varkappa_s = \frac{1358186}{900^2}\ .\ \frac{\frac{234,3^3}{45,4} + \frac{150^3}{3}\left(\frac{1}{124} + \frac{1}{62}\right)}{180^2\ .\ 150} = 0,11$$

لنگرهای تکیه گاهها از جدولهای ۲و۳ و خیز حداکثر دهانه کناری از جدول ۴ بدست می‌آید :

$$M_2 = M_3 = -0,089.p.l^2 = -0,089\ .\ 1,0.\ 9,0^2 = -7,21\ tm$$

$$\delta_1 = \delta_3 = 0,02.\ \frac{p.l^4}{EI} = 0,018\ .\ \frac{1,0\ .\ 900^4}{2100.1358186} = 0,041\ cm$$

نتایج روشهای مختلف برای مقایسه در جدول شماره ۵ ذکر شده اند :

جدول شماره ۵- مقایسه نتایج روشهای مختلف

	محاسبات دقیق	برش نرم	تفـاوت %	$\varkappa_s=0$ (برش سخت)	تفـــاوت %
A_1 عکس العمل تکیه گاه ۱	3,693	3,69	0,08	3,60	2,5
M_2 لنگر تکیه گاه ۲	-7,26	-7,21	0,55	8,10	11,6
δ_1 خیز در دهانه ۱	-0,040	0,041	2,5	0,018	55,0

مقایسه جوابهانشان میدهدکه اشتباه محاسبه به روش برش نرم نسبت به جواب دقیق خیلی کم بوده و مخصوصا " در مورد نیروها این تفاوت کمتر از ۱ درصد می‌باشد .

۵ ـ نتیجـــه گیـــری

طرزبدست آوردن ضخامت جان نیمرخ معادل برای محاسبه خرپا بصورت تیرجان پربرش نرم ، و همچنین محاسبه نرمی برشی خرپای تبدیل یافته نشان داده شده است . روابط اساسی برای محاسبه دستگاههای ساختمانی متشکـــل از تیرهای برش نرم با روش نیرو وافت ــ شیب ذکر شده است . استفاده از روش ارائه شده از میزان محاسبات به شـــدت می‌کاهد جداول لازم برای محاسبه لنگرهای تکیه گاهها و خیز حداکثر خرپاهای یکسره با بار یکنواخت و دهانه هـــای یکسان داده شده است .

فهـــرســت منابــــع

[1]- HEMPEL G. "FREIGESPANNTE HOLZBINDER", 9. AUFLAGE KARLSRUHE 1971.

[2]- NOTHNAGEL D. "BERECHNUNG VON SCHUBWELCHEN DURCHLAUFTRAEGERN", DIE BAUTECHNIK 53 (1976) H. 6,S. 203 - 207.

TRUSS ANALYSIS USING AN EQUIVALENT BEAM WITH SHEAR FLEXIBILITY

By: M. Sadegh Azar

Assistant Professor faculty of Engineering

Tehran Universty

Abstract

Truss is considered as equivalent to a beam with shear flexibility. The web thickness of the equivalent beam is calculated for various truss forms. The basic relations utilized in the analysis of structural systems composed of beams with shear flexibility, by means of the force method and the slope - deflection method, are presented.

Finally, the tables to be used in the analysis of contineous trusses are produced.