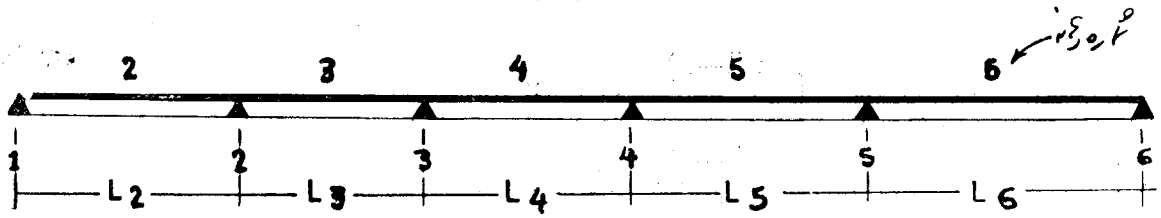
# محاسبه منحنی تأثیر لنگر خمشی یك تیر پنج‌دهانه بوسیله کمپیوتر

نوشته‌ی
خسرو کریم پناهی
(استادیار دانشکده فنی)
و
ناصر توفیق
(دانشجوی سال چهارم راه)

این مقاله بیشتر برای آشنائی مهندسین و دانشجویان دانشکده‌های فنی با طرز برنامه ریزی برای محاسبات بوسیله کمپیوتر نوشته شده‌است. منظور رسم منحنی‌های تأثیر لنگر خمشی در بعضی از مقاطع یك تیر پنج دهانه میباشد. در صورتیکه منحنی تأثیر ۱۲ مقطع در دهانه‌رسم شود وارتفاعات این منحنی‌هادر ۱۲ نقطه‌از هردهانه‌حساب‌شود، لازمست که‌برای هردفعه‌بارگذاری ۶۰ × ۶۰ عددمحاسبه گردد. باتوجه‌به‌تغییراتی که‌درممان‌دینرسی‌درحین‌انتخاب مقاطع‌داده میشود تعداد دفعات محاسبه میتواند به‌سه‌بار برسد، درنتیجه‌لازم میشود که ۶۰ × ۶۰ × ۳ عددرا محاسبه‌نمود. یك‌برآورد ساده نشان میدهد که وقت‌لازم‌برای این محاسبات بکمك دست بسیار زیاداست. مدت محاسبه بوسیله کمپیوتر ۱۶۲ دانشگاه در حدود ۲۵ دقیقه‌بوده‌است. در نتیجه محاسبه بوسیله ماشین الکترونیك از لحاظ اقتصادی خیلی با صرفه‌تر از محاسبه بکمك دست میباشد.

**فرمولهای اساسی** ـ تیر پنج‌دهانه مطابق (شکل ۱) را در نظر میگیریم، دهانه‌هارا $l_2$ تا $l_6$ و تکیه گاهها را $A_1$ تا $A_6$ فرض میکنیم.




(ش ۱)

فرض کنیم بار واحد P در دهانه i ام بفاصله α از تکیه گاه $A_{i-1}$ قرار گرفته باشد . در صورتیکه لنگرهای خمشی روی تکیه گاه‌های $A_{i-1}$ و $A_i$ را بخواهیم لازمست از فرمولهای زیر استفاده کنیم :

$$M_{i-1}(\alpha)=\frac{1}{b_i}\times\frac{-\varphi_i\omega_i'(\alpha)+\varphi_i\varphi_i'\omega_i''(\alpha)}{1-\varphi_i\varphi_i'} \qquad (1)$$

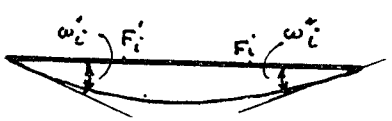
$$M_i(\alpha)=\frac{-1}{b_i}\times\frac{-\varphi_i\omega_i''(\alpha)+\varphi_i\varphi_i'\omega_i'(\alpha)}{1-\varphi_i\varphi_i'} \qquad (2)$$

لنگرخمشی روی تکیه گاهها از روابط زیر بدست میآیند :

$$\begin{cases} M_{i-2}(\alpha)=-\varphi_{i-1}M_{i-1}(\alpha) \\ M_{i-3}(\alpha)=-\varphi_{i-2}M_{i-2}(\alpha)=\varphi_{i-1}\varphi_{i-2}M_{i-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} M_{i+1}(\alpha)=-\varphi'_{i+1}M_i(\alpha) \\ M_{i+2}(\alpha)=-\varphi'_{i+2}M_{i+1}(\alpha)=\varphi'_{i+1}\varphi'_{i+2}M_i(\alpha) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (4)$$

در روابط بالا $\varphi_i$ و $\varphi'_i$ به‌ترتیب نسبتهای کانونی راست و چپ دهانه (i)ام از تیر یکسره‌اند و $\omega'(\alpha)$ و $\omega''_i(\alpha)$ نیز مقادیر دوران تکیه گاههای چپ‌وراست دهانه ، هنگامیکه تیرروی دوتکیه گاه بریده‌شده‌باشد و زیر اثر بار واحد در مقطع (α) قرارگیرد ، هستند[1] .




(ش ۲)

لنگر خمشی در هرنقطه دلخواه از دهانه‌ایکه بارگذاری شده (مثلاً دهانه i ام) از رابطه زیر بدست‌میآید :

$$M(\alpha,x)=\mu(\alpha,x)+M_{i-1}(\alpha)\times(1-\frac{x}{l_i})+M_i(\alpha)\times\frac{x}{l_i} \qquad (5)$$

که در آن $\mu(\alpha,x)$ منحنی تأثیر لنگر خمشی در تیر ایزوستاتیک نظیر است (موقعیکه بار بفاصله α از اول هردهانه قرارگرفته‌باشد) . مقدار $\mu(\alpha,x)$ بصورت‌زیر است :

$$\mu(\alpha,x)=\begin{cases} \dfrac{x(l-x)}{l} & \text{برای} \quad x\leqslant\alpha \qquad (6) \\ \dfrac{\alpha(l-x)}{l} & \text{برای} \quad x>\alpha \qquad (7) \end{cases}$$

۱ - برای توضیح بیشتر به‌مقاومت مصالح دانشکده فنی (دکتر کریم پناهی) مراجعه شود .

ضمناً برای یک مقطع در خارج از دهانه بارگذاری شده ، میتوان لنگر خمشی را از رابطه زیر بدست‌آورد .

$$M(\alpha,x)=M_{i-1}(\alpha)\times(1-\frac{x}{l_i})+M_i(\alpha)\times\frac{x}{l_i} \qquad (8)$$

برای بدست آوردن نقاط منحنی تأثیر لنگر خمشی یک تیر یکسره باید یک مقطع از تیر را درنظر گرفت وبار را در تمام دهانه‌ها حرکت‌داد . بسته بدقت لازم ، محل‌این‌نیروی واحد را چند متر به‌چندمتر تغییر میدهند . در محاسبات زیر بار را ۱/۱۲ دهانه به ۱/۱۲ تغییر داده‌ایم .

بازاء هروضعیت از نیرو مقدار لنگر خمشی ناشی ازآنرا درمقطع مورد نظر حساب میکنیم . جوابهای حاصل ارتفاعات‌منحنی‌تأثیر درنقاط مورد نظر هستند . اگر بخواهیم‌مقدار دقیق لنگر خمشی‌را در نا مناسبترین وضع بار بررسی کنیم محل مقطع را بایددر سراسر طول پل‌تغییر دهیم ؛ بدین‌نحو ،احتیاج به‌پیدا کردن‌تعداد معتنابهی منحنی تأثیر لنگر خمشی برای نقاط مختلف داریم . درمثال فوق لازمست که ، برای هربارانتخاب مقاطع تیر ، ۳۶۰۰=۶۰×۶۰ مرتبه فرمولهای بالا حساب شوند .

اکنون بشرح برنامه‌ایکه‌برای مسأله بالا بزبان Fortran II ریخته شده و در دانشکده فنی اجراء گردیده است می‌پردازیم :

قبل‌از هرچیز نامهائی‌راکه در محاسبات بکار رفته و تکرار شده‌اند با حروف اندیس‌دار نشان داده و برای ماشین تعریف میکنیم ، وبا ذکر حداکثر تعداد آنها ، تعداد کافی جا برای آنها در حافظه ماشین ذخیره مینمائیم . قبلاً حروف بکار رفته را معرفی‌میکنیم . (دستورات برنامه باحروف بزرگ و توضیحات را با حروف کوچک نشان داده‌ایم) .

$l_i$= طول کل دهانه (i) ام — T(I)

$b_i$= یکی از مشخصات مکانیکی تیرکه درمورد تیرهای ماهیچه‌دار از جدول بدست میآید . — B(I)

$\varphi_i$= نسبت کانونی چپ دهانه (i)ام — P1(I)

$\varphi_i'$= نسبت کانونی راست‌دهانه (i) ام — P2(I)

$\frac{EI_i\omega_i'(\alpha)}{l_i^2}$ — زاویه دوران تکیه‌گاه چپ‌دهانه (i) ام دریک ضریب — Q1(I)

$\frac{EI_i\omega_i''(\alpha)}{l_i^2}$ + زاویه دوران تکیه‌گاه راست دهانه (i) ام دریک‌ضریب — Q2(I)

(دو مقدار $Q_1$ و $Q_2$ همان مقادیر هستند که درجدول داده شده‌اند[1] )

$M_{i-1}(\alpha)$ لنگر خمشی در تکیه‌گاه چپ تیر — EMG(I , J)

$M_i(\alpha)$ لنگر خمشی درتکیه‌گاه راست تیر — EMD(I , J)

---

۱ - برای توضیح بیشتر به‌کتاب وجدول ضمیمه مقاومت مصالح دانشکده فنی (کریم پناهی) مراجعه شود

EMU(I , J) $\mu(\alpha , x)$ قبلاً معرفی شده

EMO(I) $M(\alpha , x)$ لنگر خمشی درمقطع x وقتیکه بار واحد در $\alpha$ باشد

درابتدای برنامه لازمست که تعدادی حافظه برای هریک از این حروف تعیین شود ؛ این عمل بادستورالعمل زیر بماشین داده میشود .

DIMENSION T(6) و B(6) و P1(6) و P2(6) و Q1(12) و Q2(12) و BE(6 , 6) و
E(5 , 12) و D(5,12) و C(6) و EMG(6,12) و EMD(6 , 12) و
EM(6 , 6 , 12)EMU(12 , 12) و EMO(12) و R(6) و
AL(6 , 6) و S(6)

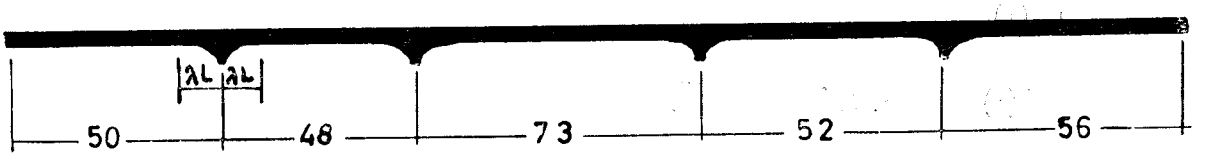
سایر حروف بالا که در DIENSION ذکر شده اندنام گذاریهائی هستند که بعداً معرفی خواهند شد؛ اعداد داخل پرانتز نیز تعداد حافظه های ذخیر شده رانشان میدهند .

این برنامه را طوری طرح میکنیم تا برای پلهای بادهانه های مختلف وبا ساهیچه های مختلف بتواندمورداستفاده قرارگیرد، لذابوسیله دستور READ کارتهای اطلاعات را، که Data نامیده میشودومشخصات پل را به ماشین میدهد، بشرح زیر میخوانیم .

```
    DO110I=2 , 6
110READ111 , T(I) و B(I) و P1(I) و P2(I)
111FORMAT(F6.2 , F5.3 , 2F6.4)
```

طبق این دستورات ماشین پنج سری عدد از مقادیر بالا برای اندیس های ۲ تا ٦ را میخواند.

(حروف از این روبا اندیس ۲ شروع شده اند تا در هیچ مورد اندیس صفر (0) ایجادنشود (چون از نظر ماشین اندیس صفر شناخته شده نیست) . عبارت FORMAT اعشاری یا صحیح بودن اعداد وبعدهم تعداد ارقام آنها را تعیین میکند. بعنوان نمونه یک شکل توضیحی از یک پل و مقداری نیزاز Data آنرادر زیر داده ایم : (شکل ۳) .




(ش ۳)

$\lambda$1 طول ساهیچه پارابولیک مطابق شکل بالاست که مقدارش ممکن است بنا به مشخصات پروژه ویا بعدازطرح (DESIGN) مرتبه اول تعیین شود .

```
T(1) و B(1) و P1(1) و P2(1)
059.00 0 160 0.0000 0.3210
```

اکنون قسمت دیگری از اطلاعات راکه مقادیر :

$$Q1(I) = -\frac{EI_{\circ}\omega_i'(\alpha)}{l_i^{2}} \quad \text{و} \quad Q2(I) = \frac{EI_{\circ}\omega_i''(\alpha)}{l_i^{2}}$$

باشند بماشین میدهیم؛ این مقادیر ازجدول استخراج شده و برای هنگامیکه بار واحد در ۱۲ نقطه ازطول دهانه قرارگرفته باشد نوشته شده است . بعبارت دیگر $I\frac{1}{12}\times\alpha$ و I از تا ۱۲ تغییر میکند.

READ112 و (Q1(I) , I=1,12)
READ112 و (Q2(I) , I=1,12)
112FORMAT(12F6.12)

برای مثال یک Data در زیر داده است :

0.0225 0.0399 0.0528 0.0601 0.0631 0.0612 0.0566 0.0487 0.0383 0.0264 0.0134
0.0134 0.0264 0.0383 0.0487 0.0566 0.0612 0.0631 0.0601 0.0528 0.0399 0.0225

| | |
|---|---|
| BE(2,3)=−P2(3) | $\beta_{۲,۳}=-\varphi'_{۳}$ |
| BE(2,4)=−BE(2,3)×P2(4) | $\beta_{۲,٤}=-\beta_{۲,۳}\varphi'_{٤}=\varphi'_{۳}\varphi'_{٤}$ |
| BE(2,5)=−BE(2,4)×P2(5) | $\beta_{۲,۰}=-\varphi_{۳}'\times\varphi'_{٤}\times\varphi'_{۰}$ |
| BE(2,6)=0.0 | $\varphi'_{٦}=۰$ |
| BE(3,4)=−P2(4) | $\beta_{۳,٤}=-\varphi'_{٤}$ |
| BE(3,5)=−BE(3,4)×P2(5) | $\beta_{۳,۰}=-\beta_{۳,٤}\times\varphi'_{۰}$ |
| BE(3,6)=0.0 | (چون $\varphi'_{٦}=۰$) |
| BE(4,5)=−P2(5) | $\beta_{٤,۰}=-\varphi'_{۰}$ |
| BE(4,6)=0.0 | (چون $\varphi'_{٦}=۰,۰$) |
| BE(5,6)=0.0 | (چون $\varphi'_{٦}=۰,۰$) |
| AL(5,4)=−P1(5) | $\alpha_{۰,٤}=-\varphi_{۰}$ |
| AL(5,3)=−AL(5,4)×P1(4) | $\alpha_{۰,۳}=-\alpha_{۰,٤}\times\varphi_{۰}$ |
| AL(5,2)=−AL(5,3)×P1(3) | $\alpha_{۰,۲}=-\alpha_{۰,۳}\times\varphi_{۳}=-\varphi_{۰}\varphi_{٤}\varphi_{۳}$ |
| AL(4,3)=−P1(4) | $\alpha_{٤,۳}=-\varphi_{٤}$ |
| AL(4,2)=−AL(4,3)×P1(3) | $\alpha_{٤,۲}=-\alpha_{٤,۳}\times\varphi_{۳}=\varphi_{٤}\times\varphi_{۳}$ |
| AL(3,2)=−P1(3) | $\alpha_{۳,۲}=-\varphi_{۳}$ |
| AL(5,1)=0.0 | (چون $\varphi_{۱}=۰$) |
| AL(4,1)=0.0 | (چون $\varphi_{۱}=۰$) |
| AL(4,1)=0.0 | (چون $\varphi_{۱}=۰,۰$) |
| AL(2,1)=0.0 | (چون $\varphi_{۱}=۰,۰$) |

تمام دستوراتی که در بالا ذکرشدند مفروضات و تعاریف بودند. اکنون باخواندن دستورات زیر ماشین محاسبه را شروع میکند. برای اینکه دهانه های مختلف را یکی یکی طی کنیم و جلو برویم از عبارت DO استفاده می کنیم ، معنی عبارتی مانند DO21I=2,6 آنست که اعمال واقع در داخل حلقه DO تا شماره ۲۱ را بازاء I=۲ و I=۳ و ... I=۶ تکرار کن.

بوسیله دستورات زیر $M_i$ و $M_{i-1}$ ،مورد نیاز فرمولهائی (۵)و(۸)، را، برحسب مورد و بنابحالت بار ،از روابط (۱) و (۲) ویا از روابط (۳) و (٤) بدست میآوریم :

DO21I=4,6

IH=I-1

C(I)=1.-P1(I)×P2(I)  $C_i=1-\varphi_i\varphi'_i$

R(I)=T(I)/(B(I)×C(I))  $R_i=\frac{l_i}{b_i(1-\varphi_i\varphi'_i)}$

بوسیله این عبارات محل مقطع را ، هم‌از نظر شماره دهانه و هم‌از نظر محل روی ۱۲ قطعه داخل هردهانه، تعیین کرده یکی‌یکی و بتدریج روی ۱۲ قطعه بوسیله عبارت زیر جلو می‌رویم :

D021K=1,12

D(I,K)=-P1(I)×Q1(K)+P2(I)×P1(I)×Q2(K)

E(I,K)=P1(I)×P2(I)×Q1(K)-P2(I)×Q2(K)

یعنی ماشین مقادیر زیر را حساب میکند :

$$Di,k=-\frac{\varphi_i\omega'(\alpha)+\varphi'_i\varphi_i\omega''(\alpha)}{l_i^2}\times EI_o$$

$$Ei,k=\frac{\varphi_i\varphi'_i\omega'(\alpha)-\varphi'_i\omega''(\alpha)}{l_i^2}\times EI_o$$

EMG(I,K)=R(I)×D(I,K)  $M_{i-1}(\alpha)=\frac{EI_o(\varphi'_i\varphi_i\omega''(\alpha)-\varphi_i\omega'(\alpha))}{l_ib_i(1-\varphi_i\varphi'_i)}$

EMD(I,K)=R(I)×E(I,K)  $M_i(\alpha)=\frac{EI_o(\varphi_i\varphi'_i\omega'(\alpha)-\varphi'_i\omega''(\alpha))}{l_ib_i(1-\varphi_i\varphi'_i)}$

ولی‌قبل‌از آنکه‌به‌انتهای‌حلقه Do21 برسیم بوسیله‌عبارت DO21 دیگری محل بار واحد رانیز تعیین میکنیم

DO21N=3,6

که N مشخص میکند که بار واحد درچه دهانه‌ای قرارگرفته است. ولی قبلاً باید دستور دهیم که اگر N ، یعنی شماره دهانه‌ایکه بار درآن قرار دارد ، مساوی I (یعنی دهانه‌ایکه مقطع را درآن انتخاب کرده‌ایم) باشد لنگرهای روی تکیه‌گاهها از فرمولهای (۱) و(۲) و در غیر اینصورت از روابط (۳)و(٤) حساب‌شوند. بزبان ماشین مطالب بالا چنین نوشته میشود .

40IF(N-I)5و10,20

این عبارت نشان میدهد که اگر N=I باشد کنترل به‌شماره 10 انتقال پیدا کند ، اگر N<I باشد بعبارت 5 و اگر N<I باشد کنترل به عبارت 20 انتقال مییابد. هریک از این شماره‌ها فرمولی راکه باید درآن حالت بکار برد تعیین میکند.

10EM(N ,I,K)=EMD(I,K)  (قبلا توضیح داده شده است)

```
      GOTO21
```
کنترل با این دستور به‌عبارت 21 انتقال میابد

```
20EM(N,I,K)=EMD(I,K)×BE(I,N)
 5IF(N—I+1)25,15,40
```

عبارت بالا را میتوان بشرح زیر توضیح داد : درموقعیکه $N=I+1$ باشد کنترل به عبارت 15 بدین شرح انتقال میابد :

```
15EM(N,I,K)=EMG(I,K)
   GOTO21
```

و درصورتیکه $N<I+1$ باشد ماشین از فرمول

```
25EM(N,I,K)=EMG(I,K)×AL(IH,N)
```

استفاده می‌کند و هنگامیکه $N>I+1$ باشد کنترل به‌عبارت 40 انتقال میابد. البته حالت اخیر هیچوقت پیش‌نمی‌آید زیرا بادستور قبلی شرط رسیدن بعبارت 5 این‌بود که $N<I$ باشد و بدیهی است که دراینحالت $N<I+1$ نیز میباشد .

دراین‌موقع که مقادیر $M_i$ و $M_{i-1}$ در تمام حالات محاسبه شده‌اند حلقه DO را باعبارت :

```
21CONTINUE
```

می‌بندیم . بازهم روابط قراردادی زیر را می‌پذیریم :

```
SK=K
```
(متغیر با ممیز شناور) SK همان α است .

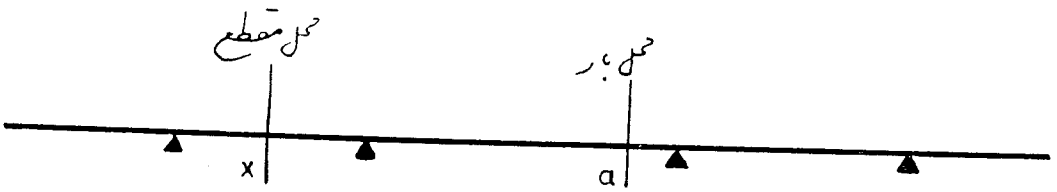
```
FAK=1.—SK/12.
```
$FAK = 1 - \frac{\alpha}{12}$

```
AK=SK/12.
```
$AK = \frac{\alpha}{12}$

حال با دستور زیر مسأله انتخاب فرمول(٥)یا(٨) را برای ماشین روشن میکنم :

```
IF(N—I)402,401,402
```

یعنی اگر $N<I$ باشد باتوجه به (شکل ٤) از فرمول‌زیر استفاده می‌کنیم (عبارت 402)




(ش ٤)

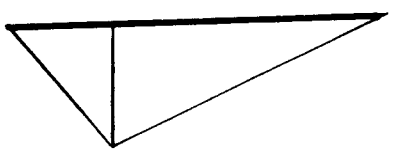
```
402EMO(K)=EM(N,I,K)×FAJ+EM(N,I,K)×AJ
```

که همان فرمول (٨) است .

در اینصورت باید کنترل ماشین دیگر بعبارت حالت N=I نرسد یعنی بدستور بعدی برود ،بنابراین ازعبارت زیر استفاده می کنیم .

GOTO501

اگر N=I باشد باید شروطی را که در معادلات (٦) و (٧) قید کردیم (شکستگی منحنی تأثیر $\mu(\alpha,x)$ مطابق (شکل ٥)) اجراء کنیم. انجام این شرط یعنی انتخاب معادله $\mu(\alpha,x)$ بصورت انجام میگیرد.



(ش ٥)

اگر $\alpha < x$ باشد $\mu(\alpha,x)=\frac{\alpha}{12}\left(1-\frac{x}{12}\right)$ 401IF(K—J) 11,11,100

مقدار $l_i$ را بعداً درآن ضرب کرده‌ایم :

11EMU(K,J)=AK×FAJ

اگر $\alpha > x$ باشد کنترل بعبارت100 انتقال میابد (K>J)

$\mu(\alpha,x)=\frac{x}{12}\left(1-\frac{\alpha}{12}\right)$ 100EMU(K,J)=AJ×FAK

البته مقدار $l_i$ بعداً درآن ضرب خواهد شد.

اکنون میتوان M را بکمک فرمول(٥) بشرح زیر محاسبه نمود .

1EMO(K)=T(N)×EMU(K,J)+EM(M,I,K)×FAJ+
EM(N,I,K)×AJ

حال حلقه DO501 را بانوشتن عبارت زیر می‌بندیم :

501CONTINUE

بدین‌ترتیب محل بار و محل مقطع را تغییر داده‌ایم و تمام مقادیر ممکن و مورد نیاز را محاسبه کرده‌ایم.

جون سطح منحنی‌های تأثیر مورد نیازاست آنرا بکمک فرمول تقریبی زیر در هردهانه‌حساب‌میکنیم

$$S=\frac{\Sigma h_i}{l/12}\times l/12=(M_1+M_2+\cdots+M_{12})\times l/12$$

که بزبان ماشین بصورت .

S(N)=(T(N)/12)×(EMO(1)+EMO(2)+EMO(3)+EMO(4)+
EMO(5)+EMO(6)+EMO(7)+EMO(8)+EMO(9)+EMO(10)+
EMO(11)+EMO(12))

بدین ترتیب محاسبات بکلی پایان پذیرفته و با نوشتن رابطه زیر و بستن حلقه DO اصلی دستور منگنه کردن جوابها را میدهیم :

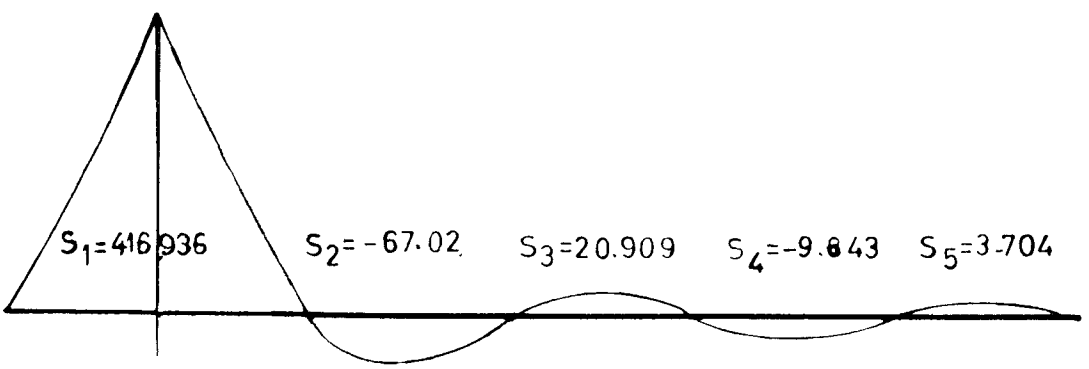
```
502        PUNCH504 , (EMO(K) , K=1 , 12) , N , I , J , S(N)
```

حلقه DO اول را نیز با عبارت :

```
505        CONTINUE
```

می‌بندیم . پس از انجام محاسبات و رسیدن بعبارت شماره 505 یک کارت منکنه میشود و محاسبات از سر گرفته‌میشود تا تمام حلقه DO اولیه‌بسته شود . بالاخره با دستور زیر ماشین‌میایستد .

```
           STOP
           END
```




(ش ٦)

در شکل ٦ یکی از منحنهای تاثیر ، که توسط ماشین محاسبه شده ، رسم شده است