

# روش تفاوتهای محدود<sup>(۱)</sup> در حل معادلات غیر خطی صفحات

نوشته‌ی

جلیل فامیلی (Ph. D.)

دانشکده فنی - شرکتهای عامل نفت

## خلاصه :

در مرجع [۱] طریقه حل معادلات غیر خطی صفحات ، با استفاده از روش تفاوتهای محدود ، ذکر شده است . در آن مقاله با استفاده از معادلات فن کارمن ، که شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهار بر حسب تغییر مکان قائم (W) و تابع تنش اری (F) است ، تنش ها و تغییر مکان صفحات تحت اثر باریکنواخت بدست آمده است .

از آنجائیکه استفاده از طریقه تفاوتهای محدود در حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی احتیاج به روشهای حساب عددی بخصوصی داشته تا بتوان معادلات و مسائل مربوطه را با کمترین مدت و ساده ترین طریقه حل نمود لذا در اینجا بار دیگر معادلات تغییر مکان صفحات را که توسط فن کارمن بدست آمده است [۲] مورد مطالعه قرار میدهم و روش جدیدی بنام Tridiagonal Iteration را برای حل معادلات فوق بکار میبریم .

از نتایج بدست آمده میتوان منحنی تنش ها و تغییر مکان قائم صفحه را در نقاط مختلف آن برای بارهای مختلف رسم نمود .

## تئوری :

معادلات غیر خطی صفحات که در آنها اثر تنش های خمشی و پوسته ای توأمآ در نظر گرفته شده است توسط فن کارمن از روی معادلات غیر خطی تئوری ارتجاعی بدست آمده و بصورت زیر میباشد .

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \frac{q}{D} + \frac{1}{D} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right)$$

$$(1) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial Y^4} = Eh \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right]$$

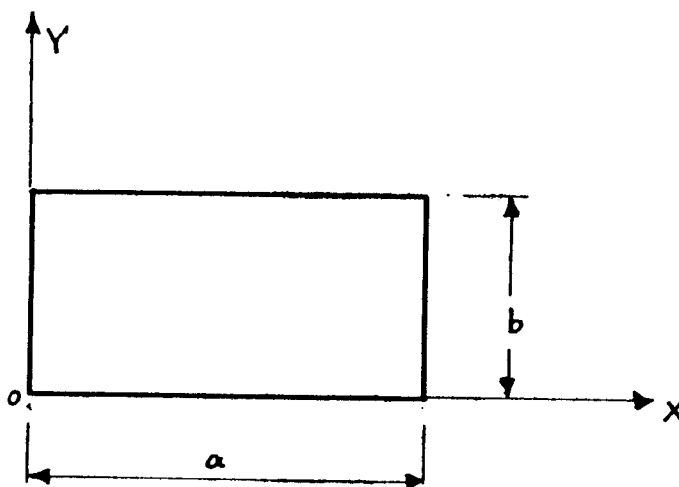
که در آن  $W$  تغییر مکان قائم صفحه و  $F$  تابع اری<sup>(۱)</sup> بوده که بصورت زیر تعریف شده است :

$$(2) \quad \sigma_{Xmh} = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}, \quad \sigma_{Ymh} = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}, \quad \sigma_{XYmh} = -\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}$$

سایر علائم مورد استفاده در روابط (۱) و (۲) در انتهای این مقاله داده شده است.

واضح است که حل کامل و دقیق معادلات (۱) بعلت غیر خطی بودن آنها بسیار مشکل و حتی میتوان گفت که غیر ممکن میباشد. روشهای تقریبی مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل فوق بکار برده شده است مثلاً [۳] S. Levy با استفاده از سریهای فوریه و [۴] S. Way با استفاده از طریقه انرژی ریلی و همچنین [۵] C.T. Wang با استفاده از روش تفاوتهای محدود و بکار بردن تقریبهای متوالی معادلات فوق را حل نموده اند. طریقه ای که در مرجع [۱] برای حل معادلات فوق استفاده شده نظیر همان طریقه ایست که C.T. Wang برای حل آن بکار برده است.

طریقه ای که در اینجا بیان خواهد شد نیز شبیه روش C.T. Wang بوده با این تفاوت که در اینجا اثر قشر حدی<sup>(۲)</sup> را نیز پیدا میکنیم. نکته دیگری که در اینجا لازم است توضیح داده شود استفاده از خواص ماتریس های سه قطری میباشد که سرعت عملیات را در ماشین الکترونیکی زیاد کرد و حل معادلات را نیز ساده میکند. این روش را نویسنده قبلاً در حل معادلات کمانش و ارتعاشی پوسته ها (Shells) که بسیار مشکل تر از معادلات صفحات است در مراجع [۶] و [۷] و [۸] بکار برده است. برای سهولت در محاسبات بهتر است که معادلات (۱) را بصورت بدون دیمانسیون نوشت. اگر



شکل ۱ - صفحه و محور مختصات

۱- Airy stress Function

۲- Boundary Layers

۳- Tridiagonal Matrice

فرض کنیم که ضخامت صفحه  $h$  بوده و طول آن  $a$  و عرض آن  $b$  باشد، معادلات بدون دیمانسیون را میتوان با استفاده از روابط زیر بدست آورد.

$$x = \frac{X}{b} \quad \text{و} \quad y = \frac{Y}{b}$$

$$0 \leq x \leq 1 = \frac{a}{b}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$(۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \frac{c^r b}{h^r} U(X, Y) \quad \text{و} \quad v(x, y) = \frac{c^r b}{h^r} V(X, Y) \\ w(x, y) = \frac{c}{h} W(X, Y) \quad \text{و} \quad c^r = 12(1 - \nu^r) \\ p = \frac{c^r}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^{\xi} q \\ \sigma_{xm}(x, y) = \frac{c^r}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^r \sigma_{Xm}(X, Y) \\ \sigma_{ym}(x, y) = \frac{c^r}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^r \sigma_{Ym}(X, Y) \\ \tau_{xym} = \frac{c^r}{E} \left( \frac{b}{h} \right)^r \tau_{XYm}(X, Y) \end{array} \right.$$

رابطه بین تابع تنش اری  $f(x, y)$  بدون دیمانسیون و تنشهای پوسته‌ای طبق تعریف بصورت زیر است.

$$(۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xm} = \frac{\partial^r f}{\partial y^r} \\ \sigma_{ym} = \frac{\partial^r f}{\partial x^r} \\ \tau_{xym} = - \frac{\partial^r f}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

از طرفی رابطه تنش‌های پوسته‌ای برحسب تغییر مکانهای قائم و افقی برابر است با

$$(۵a) \quad \sigma_{xm} - \nu \sigma_{ym} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^r$$

$$(۵b) \quad \sigma_{ym} - \nu \sigma_{xm} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^r$$

$$(۵c) \quad \tau_{xym} = \frac{1}{r(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

همچنین روابط لنگرهای خمشی بدون دیمانسیون برحسب تغییر مکانهای قائم وافقی بصورت زیر میباشد.

$$(1a) \quad M_x(x, y) = -\frac{c^r b^r}{Eh^3} M_x(X, Y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$(1b) \quad M_y(x, y) = -\frac{c^r b^r}{Eh^3} M_y(X, Y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$(1c) \quad M_{xy}(x, y) = \frac{c^r b^r}{(1-\nu)Eh^3} M_{xy}(X, Y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

با استفاده از روابط (۳) معادلات دیفرانسیل (۱) بصورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$(v) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

و یا میتوان نوشت:

$$\nabla^4 w = p + H(w, f)$$

$$(8) \quad \nabla^2 f = k(w)$$

که در آن:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$H(w, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$k(w) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

چون روابط (۸) معادلات دیفرانسیل از مرتبه چهار هستند، با استفاده از دو متغیر دیگری مثل  $\Psi$  و  $\Phi$  میتوان دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم فوق را به چهار معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تبدیل نمود.

$$(9) \quad \begin{cases} \nabla^2 w = \Psi \\ \nabla^2 f = \Phi \\ \nabla^2 \Psi = P + H(w, f) \\ \nabla^2 \Phi = k(w) \end{cases}$$

واضح است که حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم از طریق تفاوت‌های محدود بمراتب ساده‌تر از حل معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم میباشد.

## شرایط حدودی<sup>(۱)</sup>

فرض کنید که صفحه روی تکیه گاه ساده قرار گرفته باشد بنابراین در محدوده صفحه روی تکیه گاه شرایط زیر برقرار است.

$$(1.0a) \quad w = \nabla^2 w = 0$$

$$(1.0b) \quad f = \nabla^2 f = 0$$

شرایط (1.0-a) نشان میدهد که در روی تکیه گاهها مماس خمشی و تغییرمکان قائم صفر میباشند. همچنین شرایط (1.0b) و معادلات (e) نشان میدهند که در محیط صفحه تنش های موازی با سطح صفحه صفر بوده و تغییرمکان مماسی مقدار ثابتی میباشد. در اینجا فرض میشود که این مقدار ثابت تغییرمکان مماس برابر صفر باشد.

با شرح فوق مسئله صفحات تبدیل بحل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم (q) و شرایط حدودی (1.0) شده است. واضح است که حل معادلات فوق بستگی به پارامترهای  $p$  و  $l$  دارد. با بدست آوردن مقادیر  $w$  و  $f$  میتوان بکمک معادلات (e) و (q) تنش ها و مماسهای خمشی را حساب کرد.

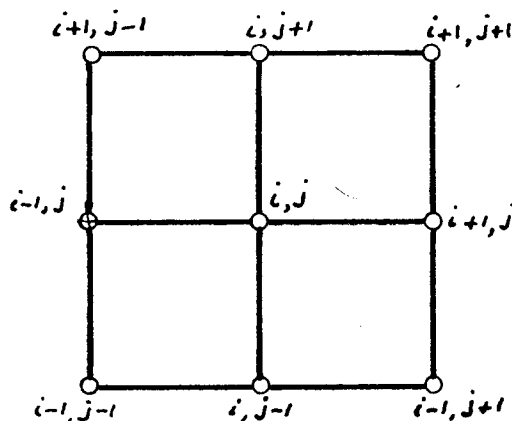
## طریقه حل عددی معادلات دیفرانسیل (۹)

بطوریکه قبلاً اشاره شد حل دقیق معادلات (۹) غیر ممکن بوده و بنابراین در اینجا از طریق تقریبی تفاوت های محدود و با استفاده از معادلات ماتریسی Block tridiagonal و تکرارهای متوالی<sup>(۲)</sup> برای حل معادلات دیفرانسیل فوق استفاده میکنیم. اگر مشتق های اول و دوم توابع دو متغیری (۹) را بوسیله مولکولهای تفاوت محدود و سطحی بنویسیم خواهیم داشت که :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} = f'_{i,j} = \frac{1}{2\delta_x} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} = f''_{i,j} = \frac{1}{\delta_x^2} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \\ \frac{\partial f_{i,j}}{\partial y} = \dot{f}_{i,j} = \frac{1}{2\delta_y} (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} = \dot{\dot{f}}_{i,j} = \frac{1}{\delta_y^2} (f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}) \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x \partial y} = \dot{f}'_{i,j} = \frac{1}{4\delta_x \delta_y} (f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j+1}) \end{array} \right.$$

که در آن  $i=1,2,3,\dots,N$  و  $j=1,2,3,\dots,M$  میباشد. همچنین  $\delta_x$  و  $\delta_y$  فاصله تقسیمات در جهت

$x$  و  $y$  میباشند. مولکولهای مربوط به روابط بالا را میتوان بصورت زیر نشان داد.



شکل (۲) طرز قرار گرفتن مولکولها در روش تفاوتهای محدود

برای اینکه عمل محاسبات را سریعتر کنیم جمله های غیر خطی در معادلات (۹) را بصورت زیر بسط میدهیم

$$(۱۲) \quad f^{n+1}w^{n+1} = f_0^n w_0^n + f_0^n (w^{n+1} - w_0^n) + w_0^n (f^{n+1} - f_0^n)$$

که در آن  $f^n$  و  $w^n$  جوابهای  $f$  و  $w$  پس از  $n$  مرتبه تکرار تقریبی میباشد. در اینجا حاصلضرب  $f$  و  $w$  را که بصورت جمله غیر خطی است با داشتن جواب تقریبی آنها، پس از  $n$  مرتبه تکرار، تبدیل به روابط خطی فوق مینمائیم. و بدین طریق مسئله در هر مرتبه تکرار موقتاً تبدیل به رابطه خطی شده در نتیجه حل معادله دیفرانسیل غیر خطی (۹) به حل  $(N \times M)$  دستگاه معادله معمولی خواهد شد. این دستگاه معادلات دارای این خاصیت است که برای هر نقطه ای مثل  $i$  و  $j$  در طریقه تفاوتهای محدود میتوان نوشت که:

$$(۱۳) \quad A_{ij}T_{i-1,j} + B_{ij}T_{i,j} + C_{ij}T_{i+1,j} = D_{ij}$$

که در آن  $T_{i,j}$  یک ماتریس ستون از متغیرهای  $w$  و  $f$  و  $\psi$  و  $\varphi$  بصورت زیر میباشد:

$$T_{i,j} = \begin{Bmatrix} w \\ f \\ \psi \\ \varphi \end{Bmatrix}_{i,j}$$

و  $A_{ij}$  و  $B_{ij}$  و  $C_{ij}$  ماتریسهای مربع  $4 \times 4$ ، که اجزاء آن معلوم است، میباشند این ماتریسهای ضرائب بصورت زیر هستند:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -f_0^n & -w_0^n & 1 & 0 \\ w_0^n & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} -\xi & 0 & -\delta^r & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & -\delta^r \\ \ddot{r}f_o & \ddot{r}w_o & -\xi & 0 \\ -\ddot{r}w_o & 0 & 0 & -\xi \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\ddot{f}_o & -\ddot{w}_o & 1 & 0 \\ \ddot{w}_o & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_r \\ d_\psi \\ d_\xi \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = -\dot{w}_{i,j+1} - \dot{w}_{i,j-1}$$

$$d_r = -\dot{f}_{i,j+1} - \dot{f}_{i,j-1}$$

$$d_\psi = -\dot{\psi}_{i,j+1} - \dot{\psi}_{i,j-1} - \ddot{r}\delta^r f'_o \dot{w}'_o + \delta^r P$$

$$d_\xi = -\dot{\phi}_{i,j+1} - \dot{\phi}_{i,j-1} - \delta^r \dot{w}'_o{}^2$$

### شرایط حدودی

بطوریکه قبلاً گفته شد، فرض میکنیم که شرایط حدودی صفحه مطابق روابط (۱۰) باشد یعنی صفحه در روی تکیه گاه ساده قرار گرفته باشد (در صورتیکه بارگذاری نیز قرینه باشد) چون تنش ها و تغییرمکانها در حول مرکز صفحه قرینه هستند پس کافی است که فقط یک ربع از صفحه را در نظر بگیریم. اگر این ربع صفحه را بمربع های مساوی که طول هر ضلع آن برابر با  $\delta$  است تقسیم کنیم شرایط حدودی در امتداد AC بصورت رابطه ماتریسی زیر خواهد شد:

$$(۱۴) \quad B_{i,j} T_{i,j} + C_{i,j} T_{i+1,j} = D_{i,j}$$

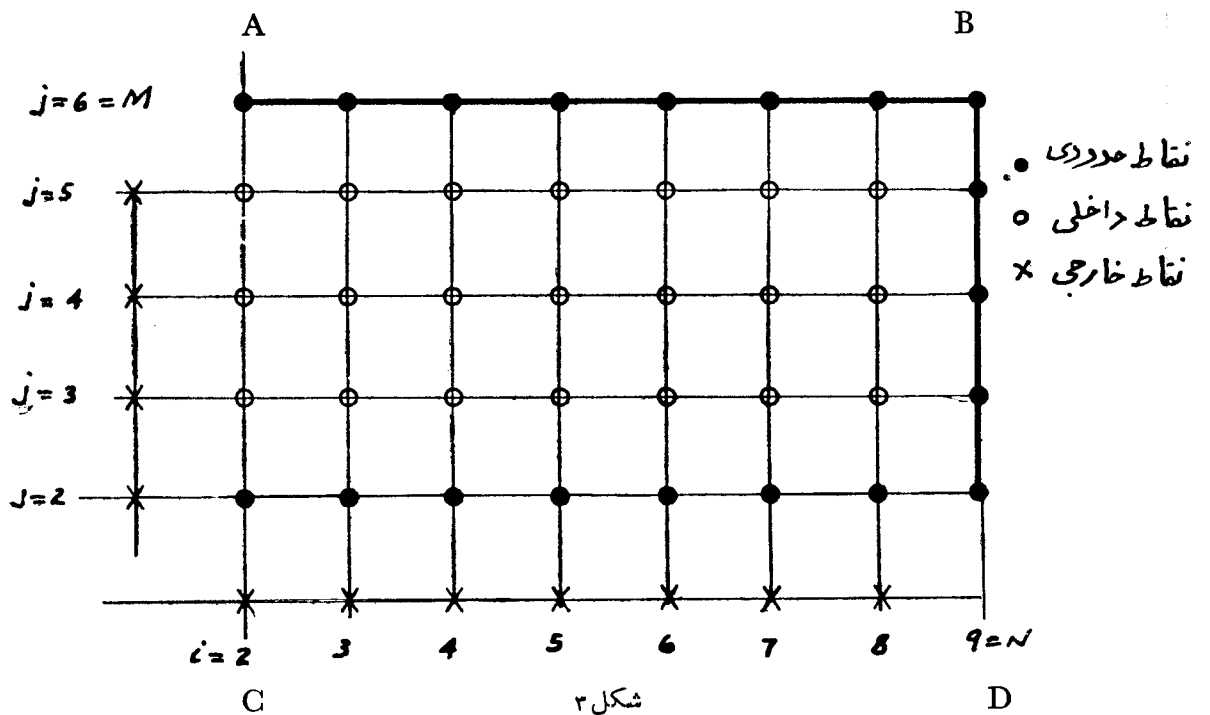
که در آن  $M, \dots, 4, 3, 2, j$  و  $i=2$  میباشد.

شرایط حدودی در امتداد BD برابر است با:

$$(۱۵) \quad A_{N,j} T_{N-1,j} + B_{N,j} T_{N,j} = D_{N,j}$$

واضح است که ضرایب روابط ماتریسی فوق یعنی  $B_{r,j}$  و  $C_{r,j}$  و  $A_{N,j}$  و  $B_{N,j}$  بستگی به شرایط

حدودی خواهند داشت.



شکل ۳

روابط ماتریسی (۱۳) و (۱۴) و (۱۵) برای هر نقطه ثابت تشکیل یک سیستم ماتریس سه قطری (Trinogonal) برای  $N-1$  مجهول  $T_{2,j}$  و  $T_{3,j}$  و ... و  $T_{N,j}$  را میدهد. واضح است که مقادیر  $T_{i,j}$  در طرف روابط فوق طبق تقریب متوالی نیوتن معلوم میباشند نوع ماتریس سه قطری مسئله فوق بصورت زیر خواهد شد :

$$(16) \begin{bmatrix} B_{2,j} & C_{2,j} & & & & \\ A_{3,j} & B_{3,j} & C_{3,j} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & A_{(N-2),j} & B_{(N-2),j} & C_{(N-2),j} & \\ & & & A_{(N-1),j} & B_{(N-1),j} & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2,j} \\ T_{3,j} \\ \vdots \\ T_{(N-2),j} \\ T_{(N-1),j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{2,j} \\ D_{3,j} \\ \vdots \\ D_{(N-2),j} \\ D_{(N-1),j} \end{bmatrix}$$

که بنام Block tridiagonal Matrice نامیده شده زیرا هر یک از اجزاء این ماتریس خود نیز یک ماتریس  $4 \times 4$  است .

### طریقه محاسبه ماتریس سه قطری فوق

برای سهولت در محاسبه  $T_{i,j}$  لازم است که رابطه ماتریسی (۱۶) را بصورت ماتریس مثلث بالائی



(Upper triangular form) در آورده بطوریکه اجزاء روی قطر آن همگی واحد شوند . بدین طریق که هر یک از معادلات موجود در رابطه ماتریسی (۱۶) را بجزء قطری آن یعنی  $B_{ij}$  تقسیم نموده و در نتیجه رابطه ماتریسی زیر بدست خواهد آمد :

$$(17) \quad \begin{bmatrix} 1 & R_{2j} & & & \\ & 1 & R_{3j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & R_{(n-2)j} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{2,j} \\ T_{3,j} \\ \vdots \\ T_{(n-2),j} \\ T_{(n-1),j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{2j} \\ S_{3j} \\ \vdots \\ S_{(n-2)j} \\ S_{(n-1)j} \end{Bmatrix}$$

اگر  $W_{rj}$  را برابر با  $B_{rj}$  تعریف کنیم خواهیم داشت که :

$$(18) \quad R_{rj} = \bar{W}_{rj}^{-1} C_{rj}$$

$$(19) \quad S_{rj} = \bar{W}_{rj}^{-1} D_{rj}$$

و بنابراین رابطه کلی برای بقیه مقادیر  $R_{ij}$  و  $S_{ij}$  با در نظر گرفتن ردیف  $(i-1)$  از رابطه ماتریسی (۱۷) در ردیف  $j$  و  $i$  از رابطه مایسی (۱۶) بطریق زیر بدست خواهد آمد .

ردیف  $(i-1)$  از رابطه (۱۶) چنین است :

$$(20-a) \quad (\dots 1 \quad R_{(i-1)j} \quad 0 \dots)(T_{(i-1)j}) = (S_{(i-1)j})$$

و ردیف  $j$  از رابطه (۱۶) نیز بصورت زیر است :

$$(20-b) \quad (\dots A_{ij} \quad B_{ij} \quad C_{ij} \dots)(T_{ij}) = (D_{ij})$$

اگر رابطه (۲۰-ا) را در  $A_{ij} -$  ضرب کرده با رابطه دوم جمع کنیم خواهیم داشت که :

$$(21) \quad [\dots 0 \quad (B_{ij} - A_{ij}R_{(i-1)j}) \quad C_{ij} \dots](T_{ij}) = (D_{ij} - A_{ij}S_{(i-1)j})$$

اگر  $W_{ij} = B_{ij} - A_{ij}R_{(i-1)j}$  قرار دهیم و سپس طرفین رابطه (۲۱) را بر  $W_{ij}$  تقسیم کنیم ردیف

$ij$  ماتریسی (۱۷) بدست خواهد آمد :

$$(22) \quad (0 \quad 1 \quad \bar{W}_{ij}^{-1} C_{ij})(T_{i,j}) = \bar{W}_{ij}^{-1} (D_{ij} - A_{ij}S_{(i-1)j})$$

بدین ترتیب میتوان تمام جزءهای رابطه ماتریسی (۱۷) را بدست آورد . در رابطه ماتریسی (۱۷)

روابط زیر برقرار میباشد .

$$(22a) \quad R_{ij} = W_{ij} C_{ij}$$

$$(22b) \quad S_{ij} = W_{ij}^{-1} (D_{ij} - A_{ij} S_{(i-1)j})$$

$$(22c) \quad W_{(N-1)j} = B_{(N-1)j} - A_{(N-1)j} R_{(N-2)j}$$

$$(22d) \quad S_{(N-1)j} = W_{(N-1)j}^{-1} (D_{(N-1)j} - A_{(N-1)j} S_{(N-2)j})$$

حال برای محاسبه مقادیر  $T_{ij}$  از آخرین ردیف رابطه ماتریسی (۱۷) استفاده کرده و میتوان نوشت که:

$$(22e) \quad T_{(N-1)i} = S_{(N-1)j}$$

$$(22f) \quad T_{i,j} = S_{i,j} - R_{i,j} T_{(i+1)j}$$

$$i = N-2 \text{ و } N-3 \text{ و } \dots \text{ و } 2$$

و بدین طریق با داشتن مقادیر  $A_{ij}$  و  $B_{ij}$  و  $C_{ij}$  و  $D_{ij}$  میتوان مقادیر  $W_{ij}$  و  $S_{ij}$  و  $R_{ij}$  برای هر یک از مقادیر ثابت  $j$  حساب کرد و از روی  $S_{ij}$  و  $R_{ij}$  بدست آمده  $T_{ij}$  های مربوطه از آخر به اول پیدا کرد. باید توجه داشت که ابتداء  $T_{N-1}$  حساب میشود و سپس از رابطه (22f) سایر مقادیر  $T_{ij}$  بترتیب حساب خواهد شد. پس از اینکه تمام مقادیر  $T_{ij}$  برای یک مقدار ثابت  $j$  حساب شد از آنها برای محاسبه  $T_{ij}$  های دیگر با مقدار ثابت  $i+1$  استفاده میکنیم. این عمل را برای سایر مقادیر  $j$  ادامه میدهم تا تمام نقاط مجهول در ماتریسی  $T_{ij}$  پیدا شود. سپس این مقادیر بدست آمده  $T_{ij}$  را جوابهای تقریبی در نظر گرفته و بار دیگر تمام مقادیر  $T_{ij}$  را حساب میکنیم و باز هم مقادیر بدست آمده  $T_{ij}$  را در دور دوم جواب تقریبی برای دور سوم محاسبات بکار برده و اینقدر این عمل را ادامه میدهم تا تفاوت جوابهای بدست آمده برای  $T_{ij}$  در دو محاسبه متوالی بسیار کوچک شود مثلاً در مورد تغییر مکان قائم محاسبات آنقدر تکرار میشوند تا رابطه زیر صدق نماید.

$$(24) \quad |W_{i,j}^{(n+1)} - W_{i,j}^{(n)}| < \varepsilon$$

$$2 \leq i \leq N-1$$

$$2 \leq j \leq M-1$$

$\varepsilon$  مقدار کوچکی میباشد. در محاسبات  $\varepsilon$  برابر با  $1 \times 10^{-6}$  گرفته میشود. نامساوی بالا نشان میدهد که آخرین جواب بدست آمده با جواب قبلی آن  $1 \times 10^{-6}$  تفاوت داشته و بنابراین اگر بار دیگر عملیات را تکرار کنیم جواب  $w^{n+2}$  با جواب فعلی آن یعنی  $w^{n+1}$  چندان تفاوتی نخواهد داشت. پس جوابهای  $w_{i,j}^{n+1}$  را میتوان جوابهای تغییر مکان قائم صفحه دانست.

بحث در نتایج بدست آمده

محاسبات فوق برای صفحات مربع که تحت بار یکنواخت  $p=0$  تا  $p=100000$  قرار داشت

انجام گرفت و نتایج حاصله از آن در منحنی‌های شکل (ε) تا (ν) داده شده است. همچنین محاسبات برای صفحات مربع مستطیل شکل برای مقادیر مختلف  $1 = \frac{a}{b}$  انجام گرفت. برای صفحه‌ای که در آن  $l = 2$  بود بار وارده را از صفر تا ۲۰۰۰ بالابردیم. و برای صفحاتی که در آنها  $l$  برابر ۴ و ۶ و ۸ بود بار وارده بین ۱۰۰۰ تا ۲۰۰۰ تغییر داده شد. برای مقایسه تئوری غیر خطی صفحات و تئوری خطی آنها تغییر مکان قائم در وسط صفحه برای بارهای مختلف رسم شد و در نتیجه (شکل ε) نشان داده شده است. منحنی نشان میدهد که تغییر مکان قائم وسط صفحه که از تئوری خطی کلاسیک بدست می‌آید بمقدار زیادی بیشتر از مقدار بدست آمد از تئوری غیر خطی است. مثلاً در صفحه مربع شکل این اختلاف برای  $p = 0.00$  در حدود ۱ درصد میباشد. این اختلاف با ازدیاد بار بسرعت زیاد میشود. در منحنی‌های شکل (و) و (ز) و (ح) تنش‌های وارده و تغییر مکانهای ایجاد شده در صفحه مربع شکل در امتداد محور  $x$  و خط ثابت  $y = \frac{1}{4}$  برای بارهای مختلف نشان داده شده است. بطوریکه در شکل (و) دیده میشود تغییر مکان قائم ماکزیمم برای تمام بارها - در وسط صفحه میباشد. وقتی بار زیاد میشود وسط صفحه از حالت منحنی بتدریج خارج شده و تقریباً سطح میگردد. این وضع آغاز پیدایش اثر Boundary layer میباشد. این پدیده در شکل (ز) بهتر دیده میشود. زیرا وقتی بار کم است همان خمشی  $M_x(x - \frac{1}{4})$  در وسط ماکزیمم بوده وقتی بار بتدریج زیاد میشود همان ماکزیمم بطرف محدوده صفحه حرکت میکند. چنین پدیده‌ای نیز برای تنش پوسته‌ای  $\sigma_{ym}$  نیز ایجاد خواهد شد. تغییرات تنش برشی  $\sigma_{xy}$  و همان پیچشی  $M_{xy}$  در نزدیکی محدوده صفحه در جهت  $x$  در منحنی‌های شکل (ح) و (و) نشان داده شده‌اند. بطوریکه ملاحظه میشود وقتی بار زیاد شود تنش برشی ماکزیمم بطرف مرکز رانده شده و این نشان میدهد که با ازدیاد بار پدیده Boundary layer بوجود خواهد آمد. در بارهای مساوی اثر Boundary layer در صفحات مستطیل شکل زود تر از صفحات مربع ظاهر میشود. برای اینکه تغییرات Boundary layer را نسبت به  $l$  نشان دهیم لازم است که متغیر جدیدی مطابق زیر در نظر بگیریم.

$$(20) \quad \begin{cases} x' = x - \frac{1}{4} \\ w(x' + \frac{1}{4}, y) \end{cases}$$

در شکل (۱۰) منحنی  $w'(0, y)$  و در شکل (۱۱) منحنی  $w'(x' + \frac{1}{4})$  برای بار  $p = 2000$  و نسبت  $l$  نشان داده شده است. اگر رابطه (۲۰) را در روابط (۹) و (۱۰) قرار دهیم خواهیم دید که در حد  $(l \rightarrow \infty)$  صفحه تبدیل به یک تسمه طولانی شده بطوریکه طول آن  $|x'| < \infty$  و عرض آن  $0 \leq y \leq 1$  میباشد. حل رابطه بدست آمده مستقل از  $x'$  بوده و بصورت زیر میباشد.

$$(۲۶) \quad \begin{cases} w_A(y) = \frac{Py}{24}(y^3 - 2y^2 + 1) \\ f_A(y) = 0 \end{cases}$$

این حل بنام Asymptotic ناسپیده میشود. واضح است که تمام شرایط حدودی (۱.۰) در:

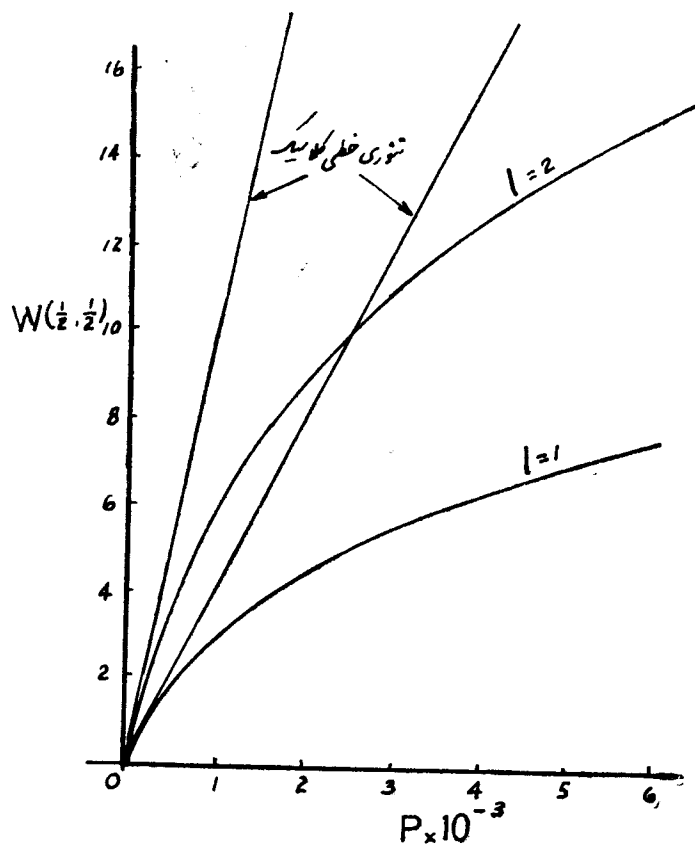
$$x' = \pm \frac{1}{2}$$

صدق نمیکند و بنابراین حل فوق حل تقریبی معادلات (۹) و (۱۰) میباشد. خط نقطه چین در منحنی شکل (۱.۰) از روی روابط فوق رسم شده است.

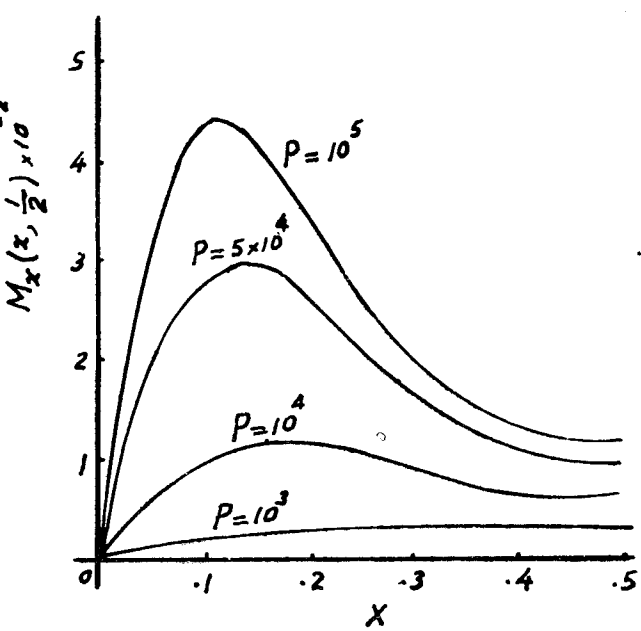
طریقه‌ای که در فوق برای حل معادلات غیر خطی صفحات گفته شد کلی بوده و میتوان از آن برای حل معادلات صفحات با شرایط حدودی دیگری نیز استفاده کرد. این طریقه حل عددی معادلات دیفرانسیل غیر خطی را تا حدودی ساده نموده و میتوان از آن برای حل معادلات غیرخطی در انتقال حرارت و مکانیک مایعات استفاده نمود.

نتایج بدست آمده در این مقاله را نویسنده در سال ۱۹۶۵ وقتی در شرکت Babcock and Wilcox

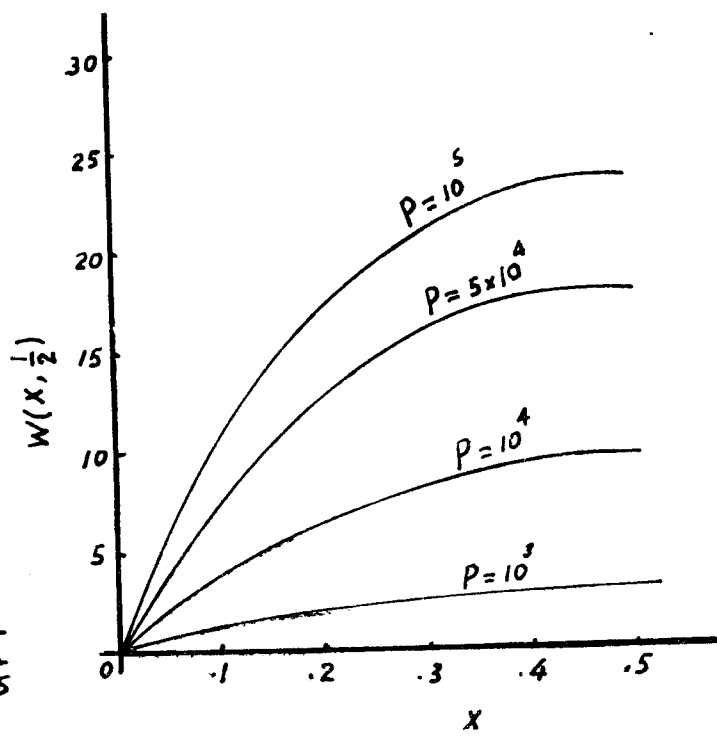
امریکا کار میکرده بدست آورده است.



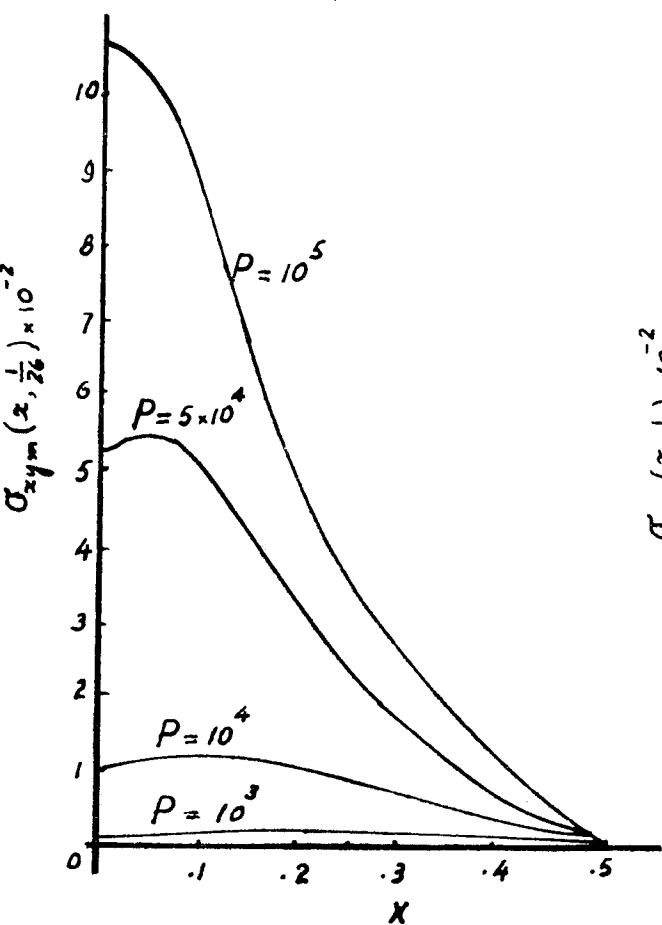
(ش ۴)



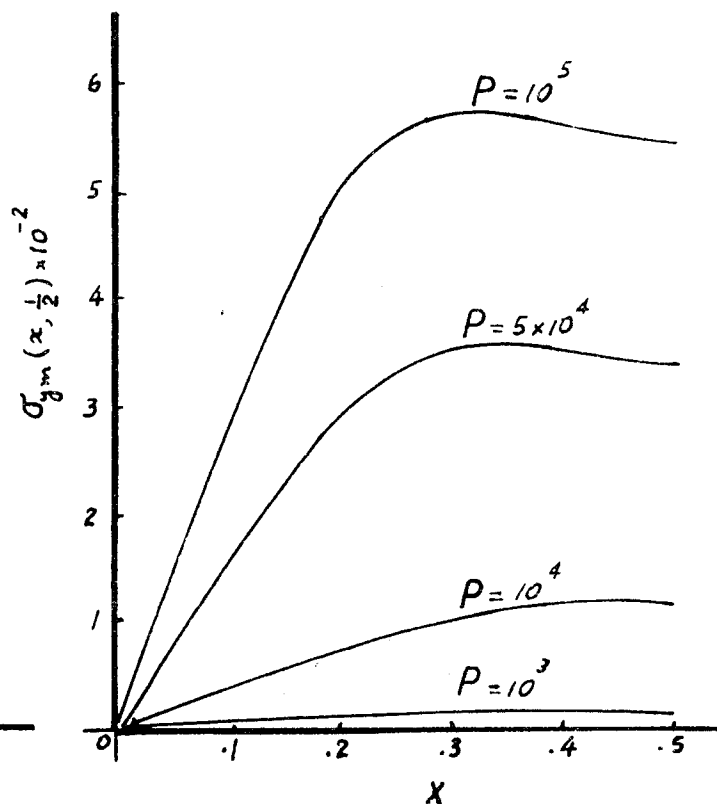
(ش ٦)



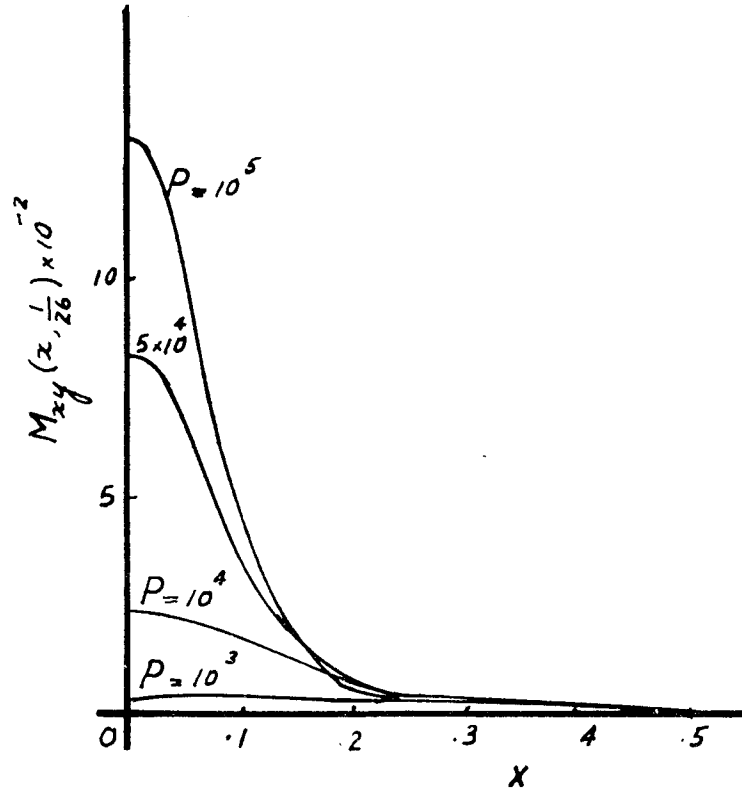
(ش ٥)



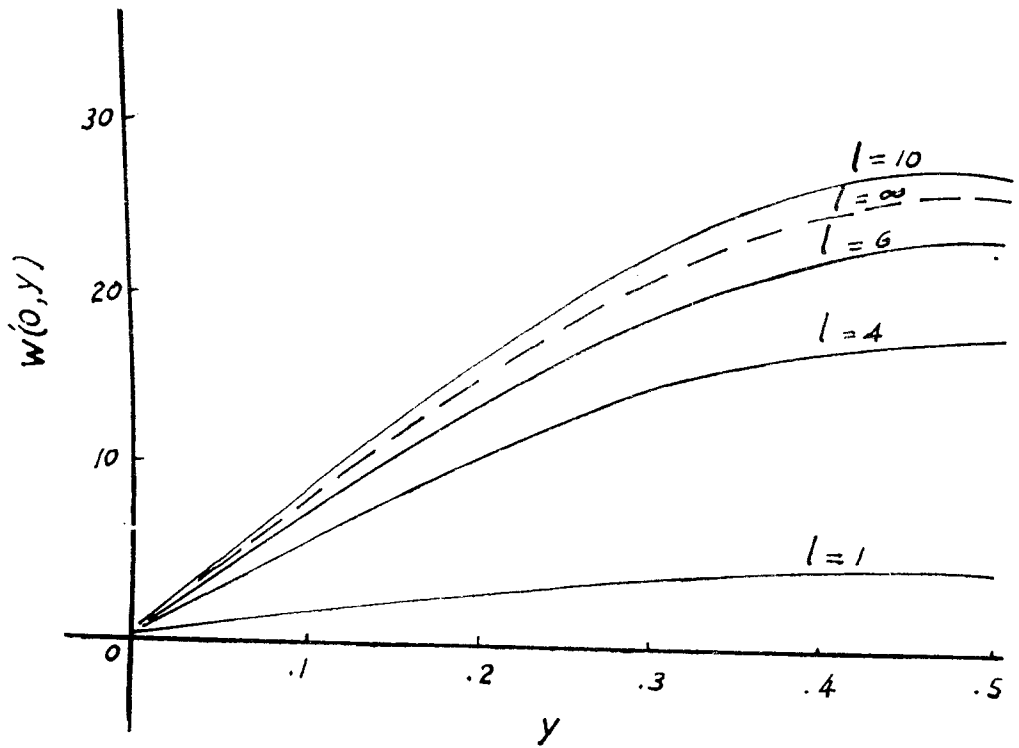
(ش ٨)



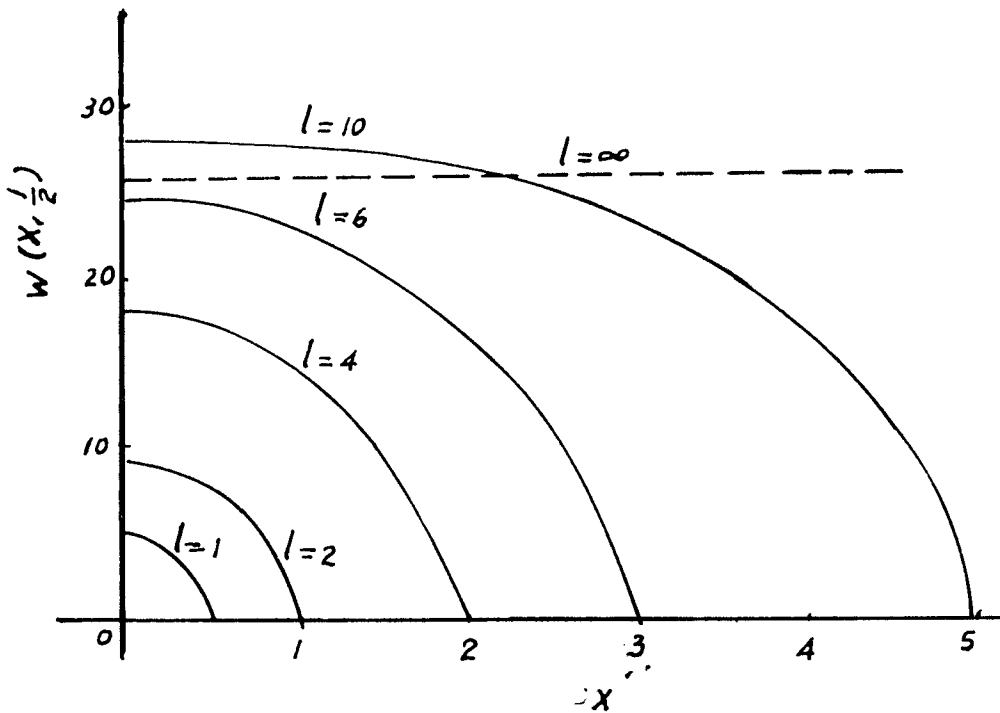
(ش ٧)



(ش ۹)



(ش ۱۰)



(ش ۱۱)

### نشانهها

محور مختصات	X و Y و Z
تغییر مکان صفحه در امتداد X و Y و Z	u و v و w
شدت بار وارده عمود بر سطح صفحه	q
ضخامت صفحه	h
ضریب پوسون	v
ضریب ارتجاعی یا ننگ	E
صلابت خمشی $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	D
بترتیب تنش در امتداد محور X تنش در امتداد Y و تنش پرسی	$\sigma_x$ و $\sigma_y$ و $\sigma_{xy}$
طول تقسیمات صفحه در امتداد محور x	$\delta_x$
عرض تقسیمات صفحه در امتداد محور y	$\delta_y$
طول و یا عرض تقسیمات صفحه در امتداد محور x و y	$\delta$
نسبت طول صفحه به عرض صفحه $l = \frac{a}{b}$	l

## فهرست مراجع

- ۱ - دکتر بیژن اعلامی - رفتار غیر خطی صفحات تحت اثر نیروهای جانبی - نشریه علمی دانشگاه صنعتی آریامهر شماره اول آبانماه ۶۱ ۱۳۴۶ صفحه ۱۳۱ تا ۱۵۴ .
- 2- Von Kàrmàn , T. Festigkeits Probleme im Maschinenbau Encyk. der Math. Wissen., IV , 4 , Teubner , Leipzig (1910) , pp. 348-352 .
- 3- Levy, S. , Bending of rectangular plates with large deflection NACA TR 737, (1942) .
- 4- Way , S. , Uniformly loaded, clamped, rectangular plates with large - deflectinos, Proc. Fifth Int. Cong. Appl. Mech. Wiley(1939),pp. 123-128.
- 5- Wang , C. T. Nonlinear large-deflection boundary - value problems of rectangular plates , NACA TN 1425 (1948) , Bending of rectangular plates With large deflectcions, NACA TN (1948).
- 6- Archer, R.R., and Famili , J., On the vibration and Stability of Finitely deformed Shallow Spherical Shells Journal of Applied Mech. March. 1965 pp. 116-120.
- 7- Famili, J. and Archer, R.R. , Finite Asymmetric Deformation of Shallow Spherical Shells. AIAA Journal, March 1965, pp. 506-510.
- 8- Famili, J, Asymmetric Buckling of Finitely deformed Conical Shells. AIAA Journal, August 1965, pp. 1456-1460.