مدل ریاضی ترانسفورماتور با چند سیم پیچ و مدار معـــــادل آن

حسیـــن محسنــــی

دانشیار دانشکده فنی ـــ دانشگـــاه تهـــــــران

چکیده .

ابتدا با توجه به‌معانی فیزیکی اجزاء ماتریس‌های‌مثلثی که از تجزیه ماتریس اندوکتانس بدست میآیند ،معکوس[1] ماتریـــس اندوکتانس از اندوکتانس‌های اتصال کوتاه بدست‌آورده شده‌است . سپس بکمک ماتریس تلاقی[2] ماتریس‌ادمیتاس‌گره‌محاسبه ونشـان داده شده است که میتوان مداری شامل‌اندوکتانس‌ها بدون القاء متقابل یافت که‌این ماتریس ادمیتاس‌گره‌در آن‌مدار نیز صـــادق باشد .در پایان چند مثال ساده آورده شده‌اند .

مقدمه

برای محاسبه حالتهای ماناوگذرا در یک ترانسفور‌ماتور چندسیم پیچه، مناسب است یک مدل ریاضی برای ضرایب القای سیـــم پیچهای ترانسفورماتور بدست آورد .یکی از مشکلات در راه پیدا کردن این مدل ، هسته مغناطیسی‌قوی است .در زیر روشی برای به دست آوردن این مدل عرضه می‌شود .به کمک این مدل‌ریاضی می‌توان یک مدار معادل‌برای ضرایب القای ترانسفورماتور تعیین کرد . این مدار معادل ، شامل پیچک هایی بدون القای متقابل است . دراین مدل ، ولتاژ گرهها نسبت به یک نقطه دلخواه به صورت یک ماتریس ستونی‌و مشتق مجموع جریانهای رسیده به هرگره نیز به‌صورت یک ماتریس ستونی در نظر گرفته شده است و این دو با یک ماتریس Γ به هم وابسته اند :

$$\dot{I} = \Gamma U \qquad (۱)$$

به این ترتیب می‌توان برای محاسبه حالتهای گذراو مانااز این رابطه ماتریسی استفاده‌کرد . و یا مدار معادلـــی شامل پیچک هایی بدون القای متقابل در نظر گرفت کـــــه ماتریس Γ و رابطه (۱) برای آن صادق است .

۱ــ در نظر گرفتن هسته ترانسفورماتور

برای به دست آوردن ماتریس Γ باید ابتداماتریس ضرایب القای سیم پیچها یعنی L را به دست آوردو سپس عکس‌آن یعنی L^{-1} را محاسبه کرد .

از آنجاکه ترانسفورماتور دارای یک هسته مغناطیسی قوی است نوشتن ماتریس Lو محاسبه عکس‌آن L^{-1} دشوار است و محاسبه عددی نیز می‌تواند به مشکل برخورد کند .

اشکال دراین است‌که اگر هسته مغناطیسی قوی را به حساب آوریم اجزاء ماتریس L بسیار بزرگ می‌شوند در حالی که دراین محاسبات اهمیت با شارهای پراکنده است که‌بسیار کوچکترند .

بعدا " خواهیم دید که این مشکل چگونه برطرف می‌شود . ابتدا فرض می‌کنیم ماتریس Lداده شده باشد .این ماتریس به صورت زیر است :

$$L = \begin{matrix} L_1 & M_{12} & : & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & : & M_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ M_{n1} & M_{n2} & : & L_n \end{matrix}$$

1- Inverse　　2- Incidence Matrix

برای محاسبه عکس این ماتریس آن را به صورت حاصل ضرب دو ماتریس مثلثی در نظر می‌گیریم .

$$L = A \, . \, B \qquad (۲)$$

ماتریسهای مثلثی A و B به صورت زیرند .

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & : & 0 \\ a_{21} & 1 & : & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & : & 1 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & : & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & : & b_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & : & b_{nn} \end{matrix}$$

اجزاء این ماتریسها از روابط زیر به دست می‌آیند :

$$b_{ik} = M_{ik} - a_{i1}b_{1k} - a_{i2}b_{2k} - \dots \dots - a_{i,i-1}b_{i-1,k} \qquad (۳)$$

$$a_{ki} = (M_{ki} - a_{ki}b_{1i} - a_{k2}b_{2i} - \dots - a_{k,i-1}b_{i-1,i})/b_{ii} \qquad (۴)$$

۱ . ۱ معانی فیزیکی اجزاء ماتریسهای مثلثی A و B

اندکی توجه به روابط (۳) و (۴) نشان میدهد که اجزاء ماتریسهای مثلثی A و B معانی فیزیکی جالبی دارند .

سطر اول ماتریس B همان سطر اول ماتریس L یعنی ضریب خود القائی پیچک شماره ۱ و القای متقابل پیچک شماره ۱ نسبت به دیگر پیچکها است به راحتی می‌توان کنترل کرد که سطر دوم ماتریس B ضریب خود القای پیچک شماره ۲ و القای متقابل پیچک شماره ۲ نسبت به دیگر پیچکهاست اگر پیچک شماره ۱ اتصال کوتاه شده باشد .

سطر سوم ماتریس B ضریب خود القای پیچک شماره ۳ و القای متقابل پیچک شماره ۳ نسبت به دیگر پیچکهاست اگر پیچکهای شماره ۱ و ۲ اتصال کوتاه شده باشند الی آخر .

همچنین ستون شماره ۱ ماتریس A به معنی نسبت تبدیل (نسبت ولتاژهای بی باری) بین پیچک شماره ۱ و دیگر پیچکهاست . ستون دوم ماتریس A نسبت تبدیل بین پیچک شماره ۲ و دیگر پیچکهاست اگر پیچک شماره ۱ اتصال کوتاه شده باشد . و ستون شماره ۳ نسبت تبدیل بین پیچک شماره ۳ و دیگر پیچکهاست اگر پیچکهای شماره ۱ و ۲ اتصال کوتاه شده باشند .

اثبات این مطالب در مرجع ۱ آمده است و از روابط (۳) و (۴) نیز قابل تاییداست .

اگر سطر اول ماتریس B و ستون اول A را کنار بگذاریم می‌توان نوشت :

$$L_1 = A_1 \, B_1 \qquad (۵)$$

که در آن L_1 ماتریس ضرایب القاست. اگر پیچک شماره ۱ اتصال کوتاه شده باشد . محاسبه L_1 کار دشواری نیست و از نظر عددی نیز به اشکال برنمی‌خورد . دلیل آن این است که با اتصال کوتاه کردن یک پیچک شار مغناطیسی متغیر نمی‌تواند تمام مسیر خود را در هسته آهنی طی کند . زیرا با صفر بودن ولتاژ القایی در پیچک اتصال کوتاه شده (که مقاومت آن را صفر فرض می‌کنیم) شار گذرنده از آن باید صفر (یا ثابت) باشد .

برای محاسبه L_1 می‌توان از پتانسیل برداری میدان مغناطیسی استفاده کرد [۲و۳] و یا به کمک اندازه گیری اجزاء آن را به دست آورد .

L_1 را به ماتریسهای مثلثی تجزیه می‌کنیم A_1 و B_1 به دست می‌آیند . حال می‌توان A و B را نیز مشخص کرد .

برای این کار یک ستون در طرف چپ به A_1 و یک سطر در طرف بالا به B_1 اضافه می‌کنیم .

در ستون اول A_1 نسبت تبدیل پیچکها می‌آید . در ترانسفورماتور با هسته آهنی قوی این نسبت برابر نسبت تعداد حلقه هاست .

در سطر اول B_1 ضریب خود القای پیچک ۱ والقای متقابل پیچک ۱ نسبت به دیگر پیچکها نوشته می‌شود . البته این مقادیر بستگی به هسته مغناطیسی دارد . (۱) اگر رلوکتانس هسته را R_m فرض کنیم می‌توان نوشت :

$$S_m = 1/R_m \qquad (۷)$$

$$b_{11} = L_{11} = S_m \, N_1^2$$

$$b_{12} = M_{12} = S_m \, N_1 N_2$$

$$b_{13} = M_{13} = S_m N_1 N_3 \qquad (۸)$$

$$-----------------$$

$$b_{1i} = M_{1i} = S_m \, N_1 N_i$$

(۱) ضرایب خود القا والقای متقابل با وجود اتصال کوتاه کردن یک پیچک نیز بستگی به هسته آهنی دارند ولی چون قسمتی از مسیر شار در هواست در نظر گرفتن ضریب نفوذ هسته چندان نخواهد بود .

جالب اینجاست که درمحاسبه عکس B باید از سطر آخرشروع کنیم و به این‌ترتیب می‌توان تمام اجزاء B^{-1} را از B بـه دست آورد و سطر اول را درآخر کار محاسبه کرد به طوری که اگر رلوکتانس هسته به علت اشباع آن ثابت نباشد کافی‌است فقط سطر اول را تغییر داد.

۲ـ محاسبه عکس ماتریس ضرایب خود القا

بعداز محاسبه ماتریسهای A و B چون این ماتریسها مثلثی هستند به راحتی می‌توان عکس آنها را حساب کرد وبه کمک عکس آنها ماتریس L^{-1} را به دست آورد.

$$L^{-1} = B^{-1} A^{-1} \qquad (۹)$$

۳ـ حل مدار

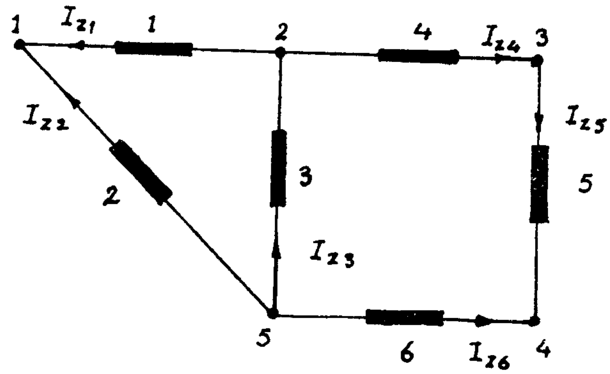
حل مدارالبته‌باداشتن L^{-1} به اشکالی‌برنمی‌خورد. در حقیقت می‌توان نوشت:

$$\dot{I}_Z = L^{-1} U_Z \qquad (۱۰)$$

که درآن $\dot{I}_Z$ مشتق جریان شاخه‌ها و U_Z ولتاژ شاخه هاست. اگر ولتاژ هرگره را نسبت به یک‌نقطه مبنا در نظر بگیریم می‌توان نوشت:

$$U_z = T\, U_Z \qquad (۱۱)$$

که درآن T ماتریس تلاقی (۱) مدار است.



شکل ۱: مدار شامل پیچکهایی با القای متقابل

برای مثال، در مدارشکل ۱ ماتریس تلاقی به صورت زیراست:

$$T = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

ماتریس تلاقی به تعدادگرههـاستون و به تعداد شاخه ها سطر دارد. مجموعه اجزاء هر سطر این ماتریس برابر صفر است. رابطه جریان رسیده به گرههـا و جریان شاخه هانیز از ماتریس تلاقی مشخص می‌شود. یعنی می‌توان نوشت:

$$I = T^t I_Z \qquad (۱۲)$$

که I جریان رسیده به هرگره است.

از رابطه (۱۲) می‌توان مشتق گرفت و نوشت:

$$\dot{I} = T^t \dot{I}_Z \qquad (۱۳)$$

از روابط (۱۰) تا (۱۳) نتیجه می‌شود:

$$I = T^t L^{-1} T U \qquad (۱۴)$$

و یا:

$$I = \Gamma U \qquad (۱۵)$$

ماتریس Γ یک ماتریس مربعی متقارن است. درستی این‌مطلب را به راحتی می‌توان به کمک رابطه (۱۴) آزمود.

۴ـ مدار معادل

برای مدار شکل ۱ مداری در نظر میگیریم شامل P گره که $P(P-1)/2$ پیچک بین‌گرههـای آن قرار دارند و ضرایب القای متقابل بین آنها صفر است.

عکس ضریب خودالقای‌پیچک بین دو نقطه i و k را با λ_{ik} و ولتاژ نقطه j را نسبت به یک نقطه مبنا با U_j نمایش می‌دهیم. مشتق جریانهای رسیده به گرههـا ازروابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&(U_1-U_2)\lambda_{12}+(U_1-U_3)\lambda_{13}+\ldots+(U_1-U_p)\lambda_{1p}=I_1\\
&(U_2-U_1)\lambda_{21}+(U_2-U_3)\lambda_{23}+\ldots+(U_2-U_p)\lambda_{2p}=I_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(U_p-U_1)\lambda_{p1}+(U_p-U_2)\lambda_{p2}+\ldots+(U_p-U_{p-1})\lambda_{p,p-1}=I_p
\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

و یا می‌توان نوشت:

1- Incidence Matrix

$$U_1(\lambda_{12}+\lambda_{13}+\ldots+\lambda_{1p})-U_2\lambda_{12}-U_3\lambda_{13}-\ldots-U_p\lambda_{1p}=I_1$$

$$-U_1\lambda_{12}+U_2(\lambda_{12}+\lambda_{23}+\ldots+\lambda_{23})-U_3\lambda_{23}-\ldots-U_p\lambda_{2p}=I_2 \qquad (۱۷)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

و بالاخره

$$-U_1\lambda_{1p}-U_2\lambda_{2p}-U_3\lambda_{3p}-\ldots+U_p(\lambda_{1p}+\lambda_{2p}+\ldots+\lambda_{p1-p-1})=I_p$$

که درآن

$$\Lambda = \begin{matrix} \sum_{i=1}^{p} & -\lambda_{12} & : & -\lambda_{1p} \\ -\lambda_{12} & \sum_{i=1}^{p}\lambda_{2i} & : & -\lambda_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda_{1p} & -\lambda_{2p} & : & \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ip} \end{matrix} \qquad (۱۸)$$

اجزاءقطراین ماتریس مجموع‌دیگر اجزاء سطریاستون مربوط به آن است و مجموع هر سطر (یا ستون)صفر است .

اینک دو رابطه (۱۵)و (۱۸) را داریم که یکی مربوط به مدار شکل ۱ با P گره و پیچکهایی شامل خود القا والقای متقابل است و دیگری مربوط به‌مداری با P گره و $P(P-1)/2$ پیچک بدون القای متقابل .

اگر Γ و Λ برابر باشند دو مدار معادل یکدیگرند . شرط برابر بودن Γ و Λ این است که اجزاء آنها برابر باشند . یعنی جزء $(-\lambda_{ik})$ از ماتریس Λ باید برابر جزء (ν_{ik}) از ماتریس Γ باشد . از طرف دیگر λ_{ik} برابر عکس ضریب خود القای پیچک بین نقاط i و k است :

$$-\lambda_{ik}=\frac{1}{L_{ik}} \qquad (۱۹)$$

پس کافی است ضریب القای پیچک ik یعنی L_{ik} را در مدار معادل برابر منفی عکس جزء ν_{ik} از ماتریس Γ انتخاب کنیم . البته انتخاب اجزاء قطر دیگر آزاد نیست . باید ثابت کنیم که مجموع اجزاء هر سطر ماتریس Γ نیز صفر است تا دوماتریس Λ و Γ برابر شوند .

ماتریس Γ بنابه رابطه های (۱۴)و (۱۵) عبارت است از

$$\Gamma = T^T L^{-1}\, T \qquad (۲۰)$$

با توجه به اینکه‌مجموع اجزاء هر سطر ماتریس T صفر است مجموع هر سطر ماتریس Γ نیز صفر است . پس برای به دست آوردن مدار معادل ابتدا ماتریس Γ رامطابق رابطه (۲۰) می‌نویسیم . سپس مدار معادل را با همان تعداد گرههای که مدار اصلی در نظر گرفته بین تمام گرههای آن پیچکهایی بدون القای متقابل می‌بندیم . مقدار ضریب خود القای پیچک بین دو نقطه i و k برابر منفی عکس جزء ν_{ik} از ماتریس Γ است .

$$L_{ik} = -\frac{1}{U_{ik}} \qquad (۲۱)$$

البته برای تعیین مدار معادل باید رابطه (۱۵) را که قبلا " رابطه (۱۴) و مشخص کننده ماتریس Γ است به کار بریم .لذا از مدار معادل درمواردی که بخواهیم مدل‌فیزیکی بسازیم استفاده می‌کنیم . زیرا مدل ریاضی مدار را قبلا " به دست آورده بودیم .

۵ ــ مثال

در مثالهای عددی زیر مدار معادل ترانسفورماتور دو سیم پیچه و سه سیم پیچه را به کمک روش شرح داده‌شده در این مقاله به دست‌می‌آوریم و با مدار معادل معمول ترانسفورماتور مقایسه می‌کنیم . همچنین مدار معادل ترانسفورماتور را پس از اتصال دلخواه سیم پیچها به‌یکدیگر پیدا می‌کنیم .

مثال ۱ ترانسفورماتور دوسیم پیچه

تعداد حلقه های سیم پیچ اول $N_1 = 100$

تعداد حلقه های سیم پیچ دوم $N_2 = 10$

ضریب القای سیم پیچ دوم در حالی که سیم پیچ اول‌اتصال کوتاه باشد $L_{2sc} = 0{,}2\ H$

رلوکتانس هسته $R_m = \frac{1}{S_m} = 1\ H^{-1}$

ماتریس Γ به ترتیب زیر محاسبه می‌شود :

$$L_{2sc} = 0{,}2$$

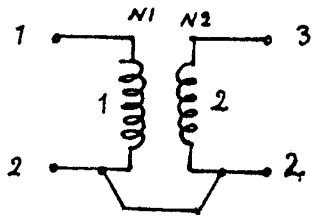
$$A_1 = 1 \qquad B_1 = 0{,}2$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{N_2}{N_1} & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0{,}1 & 1 \end{matrix} \qquad A^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ -0{,}1 & 1 \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} N_1^2 S & N_1 N_2 S \\ 0 & L_{2SC} \end{matrix} = \begin{matrix} 10^4 & 10^3 \\ 0 & 0,2 \end{matrix}$$

$$B^{-1} = \begin{matrix} 10^{-4} & -0,5 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

$$L^{-1} = B^{-1} A^{-1} = \begin{matrix} 0,0501 & -0,5 \\ -0,5 & 5 \end{matrix}$$



شکل ۲: شماره گذاری شاخه ها و گرهها.

درشکل ۲ انتهای دو سیم پیچ به هم متصل شده است تا مدار معادل به دست آمده از این روش با مدار معادل معمول ترانسفورماتور دو سیم پیچه قابل مقایسه باشد. البته این اتصال کاملا" دلخواه است و هر اتصال دیگری مانند اتصال متوالی دو سیم پیچ یا اتصال موازی آنها و یا اتصال به مدارهای دیگر می‌تواند به کار رود.

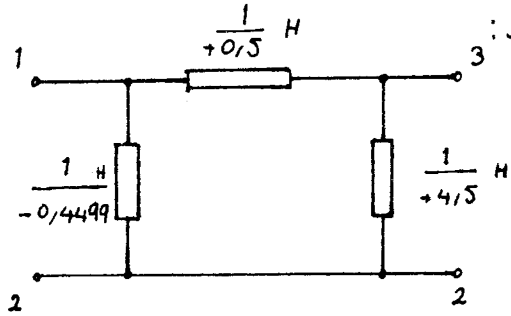
ماتریس تلاقی در اتصال شکل ۲ به صورت زیر است

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

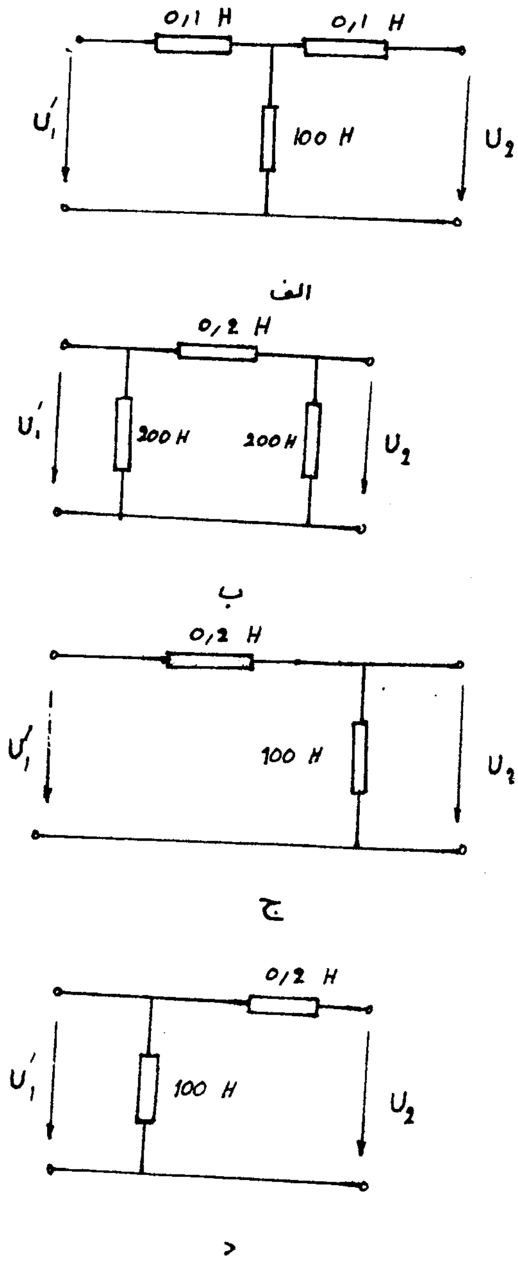
و در نتیجه

$$\Gamma = T^t L^{-1} T = \begin{pmatrix} 0,0501 & 0,4499 & -0,5 \\ 0,4499 & 4,0501 & -4,5 \\ -0,5 & -4,5 & 5 \end{pmatrix}$$

از این ماتریس مدار معادل ترانسفورماتور مورد بحث چنین به دست می‌آید:



شکل ۳: مدارمعادل ترانسفورماتوردو سیم پیچه ومقدارعناصر مدار برای اتصال شکل ۲.

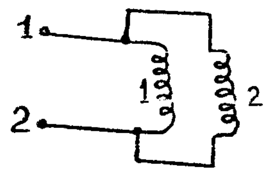


شکل ۴: مدارهای معادل معمول ترانسفور دو سیم پیچه در طرف سیم پیچ دوم.

درحالیکه نسبت تبدیل‌ترانسفورماتور درمدارمعادل معمول آن باید جداگانه ذکر و منظور شود ، در مدار معادل شکل ۳نسبت تبدیل در مدار معادل منظور شده است .برای کنترل این مطلب می‌توان ولتاژ را بین دو نقطه ۱و ۲ یا ۳ و ۲ اعمال کرد و ولتاژ بین نقاط دیگر را محاسبه و با نتیجه به دست آمده از مدارهای الف تا د شکل ۴ مقایسه کرد .

مثال ۲ : موازی بستن دوسیم پیچ در ترانسفورماتور مثال‌پیش

فرض می‌شود دو سیم پیچ ترانسفورماتور مثال قبل‌به صورت موازی بسته شده باشند . بدین ترتیب یک ضریب القا به دست می‌آید . این ضریب القا چه مقدار دارد؟



شکل ۵ : اتصال موازی دو سیم پیچ ترانسفورماتور .

ماتریس تلاقی در این حالت به صورت زیر است :

$$T = \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

و در نتیجه :

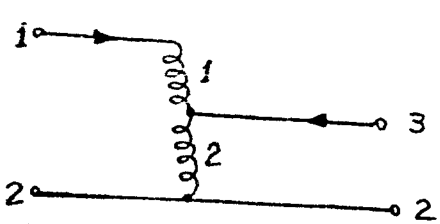
$$\Gamma = T^t L^{-1} T = \begin{matrix} 4,0501 & -4,0501 \\ -4,0501 & 4,0501 \end{matrix}$$

ضریب القای معادل L برابر $L = \frac{1}{4,0501}$ H است .

مثال ۳: اتصال ترانسفورماتور مثال به صورت‌اتوترانسفورماتور

ماتریس تلاقی در این حالت به صورت زیر است :

$$T = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$



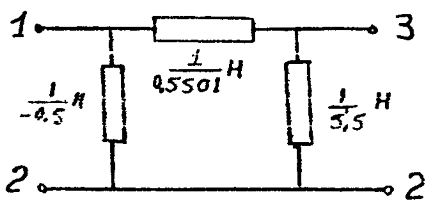
شکل ۶ : اتصال ترانسفورماتور

مثال ۱ به صورت اتو ترانسفورماتور

در نتیجه :

$$\Gamma = \begin{matrix} 0,0501 & 0,5 & -0,5501 \\ 0,5 & 5 & -5,5 \\ -0,5501 & -5,5 & 6,0501 \end{matrix}$$

و مدار معادل به صورت شکل ۷ است . برای کنترل می‌توان نسبت تبدیل حالت بی باری یا ضریب القا را در حالی که دو نقطه ۲و ۳ اتصال کوتاه شده‌اند محاسبه کرد .



شکل ۷: مدار معادل اتو ترانسفورماتور .

نیز می‌توان ضریب القای بین دو نقطه ۲و ۳ را در حالی که دو نقطه ۱و ۲ اتصال کوتاه شده‌اند محاسبه کرد که برابر است با :

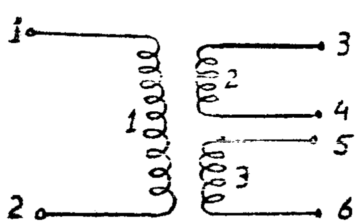
$$\frac{1}{0,5501 + 0,5} = 0,1653 \text{ H}$$

مثال ۴: ترانسفورماتور سه سیم پیچه

تعداد حلقه ها عبارتند از:

$N_1 = 100 \quad N_2 = 10 \quad N_3 = 10$

ماتریس ضرایب القای سیم پیچهای شماره ۲و۳ در حالی که سیم پیچ شماره ۱ اتصال کوتاه باشد به صورت زیر فرض می‌شود :



شکل ۸ : ترانسفورماتور سه سیم پیچه .

$$L_1 = \begin{matrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{matrix}$$

$$A_1 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 \end{matrix} \qquad B_1 = \begin{matrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}35 \end{matrix}$$

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} 10^4 & 10^3 & 10^3 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 0{,}35 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 1 & 0 \\ -0{,}05 & -0{,}5 & 1 \end{matrix} \qquad B^{-1} = \begin{matrix} 10^{-4} & -0{,}5 & -\frac{100}{700} \\ 0 & 5 & -\frac{1000}{700} \\ 0 & 0 & \frac{2000}{700} \end{matrix}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{700} \begin{matrix} 40{,}07 & -300 & -100 \\ -300 & 4000 & -1000 \\ -100 & -1000 & 2000 \end{matrix}$$

در صورتی که همه سرهای سیم پیچها مطابق شکـــل ۸ آزاد باشند ماتریس تلاقی به صورت زیر است .

$$T = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

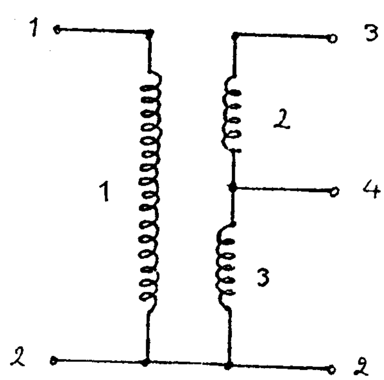
که در نتیجه :

$$\Gamma = T^t\, L^{-1} T = \frac{1}{700}\begin{bmatrix} 40,07 & -40,07 & -300 & 300 & -100 & 100 \\ -40,07 & 40,01 & 300 & -300 & 100 & -100 \\ -300 & 300 & 4000 & -4000 & -1000 & -1000 \\ 300 & -300 & -4000 & 4000 & 1000 & -1000 \\ -100 & 100 & -1000 & 1000 & 2000 & -2000 \\ 100 & -100 & 1000 & -1000 & -2000 & 2000 \end{bmatrix}$$

مدار معادل حاصل از این ماتریس دارای ۶ گره و ۱۵ شاخه است که ضریب القای بین گرههای i و j از جزء $\frac{1}{\Gamma_{ij}}$ ـ به دست می‌آید . این ضریب القا ممکن است منفی باشد .

ماتریس Γ به صورت بالا منفرد (تکین*) است .

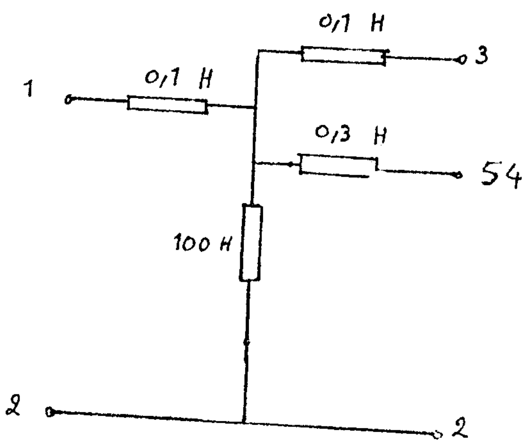
دلیل آن این است که برای هیچ یک از سرهای سیم پیچها پتانسیل مبنا انتخاب نشده است . در صورتی که مثلا " گره ۴ و ۵ به یکدیگر و گره ۲ و ۶ نیز به یکدیگر وصل باشند با توجه به معنی اجزاء ماتریس کافی است در این ماتریس سطر و ستون ۵ را به سطر و ستون ۴ و نیز سطر و ستون ۶ را به سطروستون ۲ اضافه و بدین سان سطرو ستون ۶ و ۵ را حذف کنیم‌دلیل این مطلب این است که بااتصال دو نقطه به یکدیگر ادمیتانسهایی که از یک نقطه سوم به این دو نقطه وصل هستند موازی می‌شوند و مقادیرآنها باید باهم جمع شود .



$$\Gamma = \frac{1}{700}\begin{bmatrix} 40,07 & 59,93 & -300 & 200 \\ 59,93 & 1840,07 & 1300 & -3200 \\ -300 & 1300 & 4000 & -5000 \\ 200 & -3200 & -5000 & 8000 \end{bmatrix}$$

شکل ۹ : اتصال دلخواه در ترانسفورماتور سه سیم پیچه .

* Singular



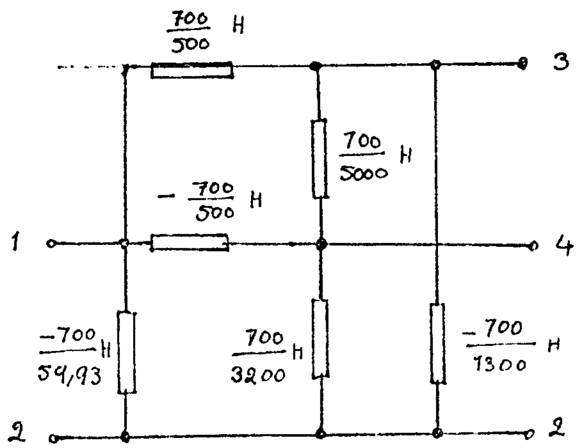
شکل ۱۱ : مدار معادل معمول ترانسفورماتور سه سیم پیچه .

شکل ۱۱ مدار معادل معمول ترانسفورماتور سه سیم پیچه را نشان می‌دهد .

۶ـ برنامه کامپیوتری

دو برنامه کامپیوتری برمبنای این روش نوشته شده است . یک برنامه که شامل یک برنامه اصلی و هفده زیربرنامه است با استفاده از ابعاد هندسی سیم پیچها ابتدا ماتریس ضرایب القای اتصال کوتاه را محاسبه می‌کند . سپس در یک فرکانس معین و با درنظرگرفتن مقاومت سیم پیچها مدار معادل چندترانسفورماتور چند سیم پیچه را به دست می‌آورد و ماتریس ادمیتانس Γ را به صورت مختلط [1] در حالتی که کلیه سرهای سیم پیچها آزاد باشند محاسبه می‌کند . با استفاده از اطلاعات مربوط به اتصال سرهای سیم پیچها به یکدیگر ادمیتانس Γ برای مدار دلخواه بدست می‌آید .

ضرایب القای بدون القای متقابل را می‌توان به مدار افزود . ضرایب القای با القای متقابل را نیز می‌توان با استفاده از روش با لا به مدار معادل شامل ضرایب القای بدون القای متقابل تبدیل کرد و به مدار افزود . در صورت دردست نبودن ابعاد سیم پیچها می‌توان ماتریس ضرایب القای اتصال کوتاه یا اتصال باز ترانسفورماتور را از طریق دیگر به دست آورد و واردبرنامه کامپیوتری کرد . امکان منظورکردن خازنها یا مداری



شکل ۱۰ : مدار معادل ترانسفورماتور سه سیم پیچه .

شامل چند خازن هم وجود دارد . سرانجام ولتاژ گرهها و جریان شاخه ها و تلفات هر شاخه محاسبه می‌شود .

برنامه دیگرنیز که شامل یک برنامه اصلی و بیست و یک زیر برنامه است به چند ترانسفورماتور چند سیم پیچه اجرا می‌شود و مدار معادل آنها را به روش ذکر شده به‌دست می‌آورد . سپس با منظور کردن خازنهای موجود در مدار وبه فرض اعمال ولتاژ پله در یکی از نقاط شبکه نوسانهای آزاد کلیه گره‌ های شبکه را با استفاده ازکمیات و بردارهای خاص محاسبه می‌کند . سپس به کمک انتگرال دوهامل [2] نوسان آزاد گره‌ها را به فرض اعمال ولتاژ ضربه استاندارد به یک گره از شبکه حساب می‌کند . برنامه های نامبرده از نظر تعداد ترانسفورماتورها و تعداد سیم پیچ آنها محدودیتی ندارند . تنها محدودیت از نظر حافظه کامپیوتر است . این برنامه‌ها که محدود به ترانسفورماتور نیستند و برای هر مدار دارای ضرایب القای با القای متقابل یا بدون القای متقابل قابل اجرا هستند ، در صورت تقاضا در اختیار علاقه مندان قرار داده می‌شود .

1- Complex

2- Duhammel

فهرست منابع

(1) Mohseni H.: Physikalische Bedeutung der Elemente der Matrixfaktoren die durch Dreieckfaktorisierung der Induktivitatsmatrix entstehen E & M 7 1979 Wien

(2) Gerstl A.: Programmsysteme fur rotationssymmetrische Streufeld-und Induktivitaten-berechnung vou Transformatoren.
Elin-Zeitschrift 2 1976 Wien

(3) Andersen O.W.: Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method. IEEE Transaction, Vol. PAS-92,
March-April 1973 PP. 682-689.