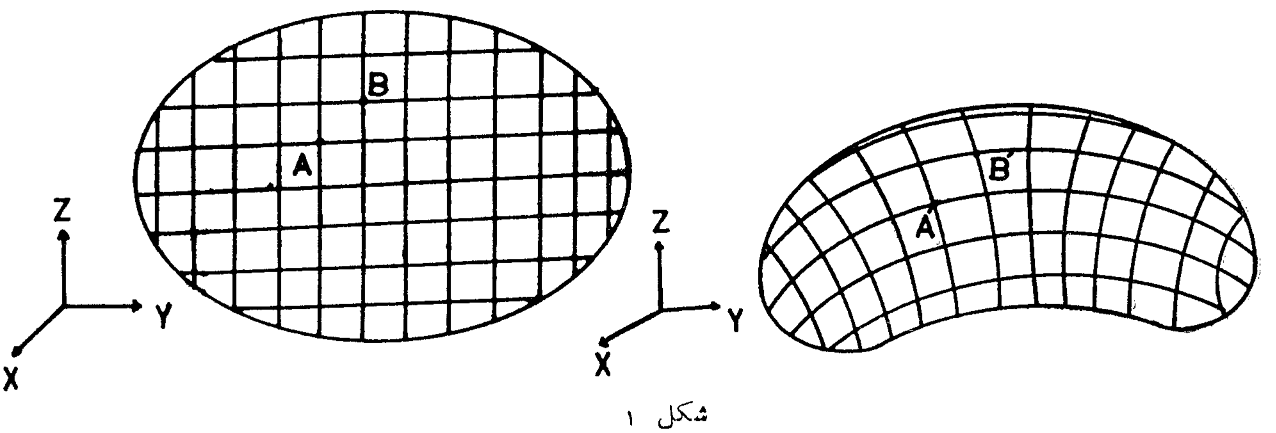
محاسبه تانسوری شرایط انتگرال‌گیری وسازگاری در محیط‌های پیوسته با تغییرشکل بینهایت کوچک

نوشته‌ی

دکتر خسرو کریم‌پناهی

دانشکده فنی

محیط پیوسته‌ای مانند (شکل ۱) را درنظر میگیریم وفرض‌میکنیم، پس از یک تغییرشکل بینهایت کوچک، ازحالت ۱ به حالت ۲ تبدیل شود. این تغییرشکل دراثر ورود نیروهای‌خارجی ایجاد شده است. منظور یافتن روابطی است که بایستی بین مولفه های تانسور کرنش ، که بعداً توصیف خواهد شد ، وجود داشته باشد تا، اگر جسم‌قبل ازتغییرشکل بمکعب های بینهایت کوچکی‌تقسیم شده باشد، پس ازتغییرشکلی مساوی مقادیر داده شده توسط تانسور کرنش ، مکعب ها همچنان تشکیل محیط پیوسته بدهند و بهم چسبیده بمانند.



شکل ۱

نقطه A از جسم را ، بمختصات $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ ، درنظر میگیریم وفرض میکنیم پس از تغییر شکل دارای مختصات $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$ گردد ، بطوریکه داشته باشیم:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad (۱)$$

$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$ ماتریس، ستون مولفه‌های تغییرمکان نقطه است. در محیط‌های پیوسته باتغییرشکل بینهایت کوچک فرض میشود که u , v , w و مشتقات اول و دوم آنها ، که همگی توابعی از x , y , z (مختصات نقطه) هستند ، بینهایت کوچک باشند.

باید دانست که در محاسبات بعد، هنگامیکه مختصات نقطه را دخالت میدهیم ، منظور همان مختصات نقطه‌بعد ازتغییرشکل (متغیرهای لاگرانژ Lagrange) است. ولی، چون تغییرمکان‌نقطه ومشتقات اول و دوم آن بینهایت کوچک‌فرض‌شده‌اند، میتوان بجای مختصات بعد از تغییرشکل مختصات قبل ازتغییر شکل (متغییرهای اولر Euler) را بکار برد. در سطرهای زیر این موضوع را برای مشتق گیری از یک تابع اثبات میکنیم. تابعی مانند F(x , y , z) را درنظر میگیریم. میتوان نوشت :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}$$

با توجه برابطه (۱) داریم :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial x}$$

ولی $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ بینهایت کوچک درجه اولند؛ پس :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \qquad (۲)$$

یعنی میتوان بجای مختصات بعد از تغییرشکل مختصات قبل از تغییرمکان را بکار برد.

حال نقطه B ، بینهایت نزدیک بنقطه A ، که دارای مختصات

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

است ، را درنظر میگیریم. این نقطه ، پس از تغییرشکل ، به نقطهٔ B′ میرود بطوریکه مولفه‌های تغییر- مکان این‌نقطه مساوی $\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix}$ است. مختصات نقطهٔ B′ مساوی $\begin{Bmatrix} x'+u' \\ y'+v' \\ z'+w' \end{Bmatrix}$ است. میتوان نوشت [۱] :

---

[۱] - t علامت ماتریس وارونه است.

$$(۳)\qquad \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

ماتریس مربع

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

را میتوان بصورت زیر بدو ماتریس ، یکی ماتریس قرینه $\boxed{e}$ و دیگری ضد قرینه $\boxed{P}$ ، تبدیل کرد [۱] . این دو ماتریس بشکل زیرند :

$$(٤)\qquad \boxed{e} = \begin{vmatrix} e_۱ & g_۳ & g_۲ \\ g_۳ & e_۲ & g_۱ \\ g_۲ & g_۱ & e_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$(۵)\qquad \boxed{P} = \begin{vmatrix} 0 & -P_۳ & P_۲ \\ P_۳ & 0 & -P_۱ \\ -P_۳ & P_۱ & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

ماتریس $\boxed{e}$ را تانسور کرنش (تغییرشکل خالص نسبی) و ماتریس $\boxed{P}$ را تانسور دوران نامند. این دو ماتریس دارای خاصیت تانسوری درجه دوم (یک بار گرا Covariant و یک بار همگرا Contravariant) هستند .

در محیطهای پیوسته ، بکمک خواص فیزیکی جسم ، میتوان مولفه های تانسور کرنش (ماتریس

---

[۱] - برای توضیح بیشتر بکتاب مقاومت مصالح عالی (نوشته خسرو کریم پناهی) چاپ دانشگاه تهران مراجعه کنید .

$\boxed{e}$) را بدست آورد . با شناختن توابع مولفه های تانسور کرنش میتوان توابع مولفه های تغییر مکان $\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$ را با انتگرال گیری ، بدست آورد . برای آنکه این عمل ممکن باشد لازمست روابطی بین توابع مولفه های تانسور کرنش موجود باشد. این روابط را شرایط انتگرال گیری نامند. چنانکه دیدیم داریم:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \left(\boxed{e} + \boxed{P} \right) \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \qquad (٦)$$

رابطه (٦) درصورتیقابل انتگرال گیری است که du , dv , dw دیفرانسیل های کامل باشند. بطور کلی برای آنکه

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \boxed{A} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

دیفرانسیل های کامل یک تابع باشند لازم و کافیست که :

$$\boxed{A} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \boxed{0}$$

باشد. علامت اختصاری زیر را میپذیریم :

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}}$$

$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}}$ را تانسور روتاسیونل (Rotationnel) مینامیم . این ماتریس نیز مولفه های یک تانسور درجه دوم است .

پس شرایط لازم برای قابل انتگرال گیری بودن روابط (٦) بصورت زیر هستند :

$$\left(\boxed{e} + \boxed{P} \right) \boxed{\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}} = \boxed{0}$$

و یا :

$$\boxed{e}\ \left|\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}\right| = -\boxed{P}\ \left|\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}\right| \tag{۷}$$

رابطه (۷) پس از عملیات بصورت زیر درمیآید :

$$\begin{Bmatrix} dP_۱ \\ dP_۲ \\ dP_۳ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_۱ \\ P_۲ \\ P_۳ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t \left(\boxed{m}\,\boxed{e}\,\boxed{m}^{-۱} - \boxed{m}^{-۱}\,\boxed{e}\,\boxed{m} \right) \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \tag{۸}$$

که در آن :

$$\boxed{m} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & ۱ \\ ۱ & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 \end{vmatrix}$$

گرفته شده است.

در اینجا نیز برای آنکه رابطه‌ی (۸) دیفرانسیل های کامل را نشان دهد لازمست که :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t \left(\boxed{m}\,\boxed{e}\,\boxed{m}^{-۱} - \boxed{m}^{-۱}\,\boxed{e}\,\boxed{m} \right) \left|\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}\right| = \boxed{0}$$

و یا :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t \boxed{m}\,\boxed{e}\,\boxed{m}^{-۱} \left|\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}\right| = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}^t \boxed{m}^{-۱}\,\boxed{e}\,\boxed{m} \left|\frac{\partial}{\partial \mathscr{R}}\right| \tag{۹}$$

روابط (۹) شرایط انتگرال گیری هستند. درصورت وجود این رابطه میتوان، پس از انتگرال گیری از روابط (۸)، ماتریس $\boxed{P}$ را بدست آورد وبکمک رابطه‌ی (۶) مولفه های تغییرمکان را معین کرد.