

تأثیر تغییرات ضریب انبساط حجمی سیالات در جابجائی آزاد

نوشته‌ی :

زین العابدین نجات (Ph.D.)
آزمایشگاه انتقال حرارت و جرم
دانشکده فنی - دانشگاه تهران

خلاصه مقاله :

ضریب انبساط حجمی دارای اهمیت زیادی در محاسبه ضریب انتقال حرارت در جابجائی آزاد است. این ضریب نسبت مستقیم با نیروی غوطه‌ور بودن داشته و خود این نیرو در اثر تغییرات جرم مخصوص سیال با درجه حرارت بدست آمده است. جابجائی آزاد در سیالی بوجود می‌آید که جرم مخصوص آن با درجه حرارت تغییر نماید. تغییرات جرم مخصوص باعث تغییر ضریب انبساط حجمی است و باید درجه حرارتی را تعیین نمود که تحت آن این ضریب محاسبه گردد. در این مقاله تأثیر تغییرات این ضریب بر روی عدد نوسلت نشان داده شده است. اگر این ضریب در درجه حرارت دیوار محاسبه گردد، عدد نوسلت حاصله کمتر از مقدار اندازه‌گیری شده بوده و اگر در درجه حرارت جریان سیال اندازه‌گیری گردد تا حدود ۲۰٪ برای آب بیشتر از عدد نوسلت اندازه‌گیری شده خواهد بود. آزمایش‌ها نشان داده است که برای بدست آوردن مطابقت خوب بین نتایج ریاضی و آزمایشی، بهتر است این ضریب در درجه حرارت، مراجعه، متوسط عددی درجات حرارت دیوار گرم و جریان سیال حساب گردد.

انتقال حرارت بطریقه جابجائی آزاد در سیالی انجام میگیرد که دارای جرم مخصوص متغیر با درجه حرارت باشد. این سیال وقتی که در مجاورت یک دیوار گرم قرار میگیرد، جرم مخصوص آن در لایه نزدیک دیوار تغییر نموده و این تغییرات جرم مخصوص نیروی غوطه‌ور بودن^(۱) را بوجود میآورد. نیروی غوطه‌ور بودن در جهت بردار ثقل بوده و بمقدار آن اضافه میگردد. مقدار نیروی غوطه‌ور بودن در کتاب‌های انتقال حرارت مثلاً کتاب مرجع (۱)^(۲) با رابطه زیر داده شده است:

$$(\rho_0 - \rho)g \quad (1)$$

در رابطه (۱) ρ_0 جرم مخصوص سیال در فاصله زیادی از دیوار گرم که انتقال حرارت در آن ناحیه انجام نمیگیرد و ρ جرم مخصوص محلی سیال میباشد که در اثر انتقال حرارت از دیوار گرم، مقدار آن از مقدار ρ_0 تغییر کرده است. معمولاً در محاسبات مهندسی فرض میشود که تغییرات جرمی که در اثر تغییرات درجه حرارت بوجود میآید بصورت نیروهای حجمی است. این مسئله وقتی صحیح است که $\frac{\rho}{\rho_0} \approx 1$ باشد.

با استفاده از ضریب انبساط حجمی^(۳)، نیروی غوطه‌ور بودن که در رابطه (۱) نشان داده شده است، بصورت زیر درمیآید:

$$\rho_0 \beta \theta g \quad (2)$$

در این رابطه β ضریب انبساط حجمی سیال بوده و θ اختلاف درجه حرارت است. ضریب انبساط حجمی β ، معمولاً بصورت زیر تعریف میگردد:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

در صورتیکه دیفرانسیل جزئی را تبدیل به تفاضل محدود بکنیم میتوان β را با رابطه تقریبی زیر نشان داد:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3)$$

در این معادله T درجه حرارت محلی سیال و T_0 درجه حرارت سیال در نقطه‌ای از آنست که انتقال حرارت در آن وجود ندارد. برای سادگی محاسبات معمولاً فرض میشود که β دارای یک مقدار ثابتی است. اگر در معادله (۳) کمی دقت بکنیم، مشاهده مینمائیم که باید بجای β مقدار آن در درجه حرارت T_0 یعنی β_0 را قرار دهیم. این مسئله با توجه باین موضوع است که مبدأ تغییرات درجه حرارت و جرم مخصوص به ترتیب T_0 و ρ_0 است.

معادله مقدار حرکت با استفاده از رابطه (۲) برای حالت جابجائی آرام بصورت زیر نوشته میشود (۱):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \nabla^2 u + g \beta_0 \theta \quad (4)$$

۱ - Buoyant Force

۲ - شماره‌های داخل پارانتر اشاره به منابع مراجعه‌ای میکنند که لیست آن‌ها در آخر مقاله داده شده است.

۳ - Volumetric Expansion Coefficient

در این معادله u و v عبارت از سرعت سیال در جهات مختصات x و y بوده و ν معرف لزجت سینماتیک سیال است. از این معادله میتوان با استفاده از روش آنالیز بعدی^(۱)، گروه‌های بی‌بعد لازم برای نشان دادن آزمایش‌های مربوطه را بدست آورد. حل این معادله به‌مراه معادلات پیوستگی و انرژی، تغییرات سرعت و درجه حرارت را بدست خواهد داد که منجر به محاسبه ضریب انتقال حرارت میشود.

در حالتیکه جا بجائی آزاد از یک صفحه گرم قائم به آب باشد بارو و رانوی (۲) نشان دادند ممکن است وقتیکه $T_0 = 10$ و $\theta = 38$ درجه سانتیگراد باشند، ضریب انبساط حجمی β با ضریب چهار تغییر کند. با توجه باین موضوع باید دید که در معادله (۴) چه مقداری برای β منجر به نتایج صحیح خواهد شد.

ممکن است β در درجه حرارت دیوار T_w و درجه حرارت سراجعه $T_f = \frac{T_0 + T_w}{2}$ و یا درجه حرارت جریان سیال T_0 اندازه‌گیری گردد. صحت محاسبه β در درجات حرارت T_w و T_f بوسیله معادلات ریاضی نشان داده نشده است و همانطوریکه مشاهده شد فقط β_0 که در درجه حرارت T_0 محاسبه شده است در معادله مقدار حرکت ظاهر میگردد. گاهی برای اینکه مطابقتی بین مقادیر اندازگیری شده با محاسبات ریاضی بدست‌آید از مقادیر β_f و β_w که در درجات حرارت T_f و T_w محاسبه شده‌اند نیز استفاده میشود. حال فرض نمائید که β دارای تغییراتی با درجه حرارت بصورت رابطه زیر باشد:

$$\beta = \beta_0(1 + A\theta) \quad (5)$$

در این معادله A یک مقدار ثابت است. نشان داده شده است که این رابطه تغییرات β را برای آب بخوبی تقریب میکند. مقدار β_0 با معلوم بودن شرایط اولیه و سیال مربوطه مشخص بوده و قابل محاسبه است. حال با وارد کردن مقدار واقعی β از معادله (۵) در محاسبات می‌توان عدد نوسلت^(۲) مربوطه را بدست آورد.

معادله انتگرال مقدار حرکت در لایه مرزی با رابطه زیر داده شده است (۱):

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = g \int_0^{\delta} \beta \theta dy - \nu \left(\frac{du}{dy} \right)_w \quad (6)$$

که در آن δ ضخامت لایه مرزی بوده و ضخامت لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی با هم مساوی فرض شده‌اند. معادله انتگرال انرژی بصورت زیر میباشد (۱):

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u \theta dy = -\alpha \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_w \quad (7)$$

منحنی‌های سرعت و درجه حرارت با روابط زیر تقریب میگردند. لازم بتوضیح است که این روابط

نتایج بسیار خوبی را در حالت جابجائی آزاد بدست میدهند.

$$u = u_1 \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (8)$$

$$\theta = \theta_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (9)$$

در این روابط $\theta_w = T_w - T_o$ بوده و u_1 یک تابع اختیاری است که دارای بعد سرعت میباشد (۱). شرایط مرزی زیر در معادلات (۸) و (۹) صادق هستند:

وقتی که $y=0$ و $y=\delta$ باشد $u=0$ است

$$\text{» } \theta = \theta_w \quad \text{» } y = 0 \quad \text{«}$$

$$\text{» } \theta = 0 \quad \text{» } y = \delta \quad \text{«}$$

حال اگر معادلات تغییرات سرعت و درجه حرارت (۸) و (۹) را در معادلات انتگرال مقدار حرکت و انرژی قرار دهیم و سپس انتگرال گیری نمائیم حاصل میشود:

$$\frac{1}{1.0} \frac{d}{dx} (u_1^2 \delta) = \frac{1}{3} g \beta_o \theta_w \delta \left(1 + \frac{2}{5} A \theta_w\right) - \nu \frac{u_1}{\delta} \quad (10)$$

$$\frac{1}{3.0} \theta_w \frac{d}{dx} (u_1 \delta) = \alpha \frac{\theta_w}{\delta} \quad (11)$$

در بدست آوردن معادلات بالا، تغییرات β با درجه حرارت را از رابطه (۵) قرار داده ایم. با استفاده از روابط داده شد در صفحه ۳۳۸ کتاب انتقال حرارت، کتاب مرجع (۱)، برای مقادیر u_1 و δ ، عدد نوسلت بدست خواهد آمد:

$$Nu_x = 0.008 Pr^{\frac{1}{2}} (0.902 + Pr)^{-\frac{1}{4}} Gr_x^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{2}{5} A \theta_w\right)^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

Gr عبارت از عدد گراسهوف^(۱) است که با β_o محاسبه می گردد. رابطه برای عدد نوسلت وقتی که β مقدار ثابتی داشته باشد، در کتاب مرجع (۱) داده شده است و بقرار زیر میباشد:

$$Nu_x = 0.008 Pr^{\frac{1}{2}} (0.902 + Pr)^{-\frac{1}{4}} Gr_x^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

با تقسیم کردن دو رابطه (۱۲) و (۱۳) در همدیگر، نسبت زیر حاصل میگردد:

$$\frac{Nu_x(\beta \text{ متغیر})}{Nu_x(\beta \text{ ثابت})} = \left(1 + \frac{3}{5} A \theta_w\right)^{\frac{1}{4}} \quad (14)$$

با استفاده از این نسبت و مقادیر عددی قید شده در زیر، رانوی (۳) جدول زیر را تنظیم نمود:

$$T_o = 20 \text{ درجه سانتیگراد} \quad \theta_w = 60 \text{ درجه سانتیگراد} \quad \beta_o = 2/38 \times 10^{-4} \text{ درجه سانتیگراد}^{-1}$$

$$A = 2/98 \times 10^{-2} \text{ درجه سانتیگراد}^{-1}$$

$$a = \frac{Nu_x(\beta \text{ متغیر})}{Nu_x(\beta \text{ ثابت})} \text{ جدول تغییرات نسبت}$$

مقادیر ثابت β	a
β_o در درجه حرارت ۲۰ درجه سانتیگراد	۱/۲
» » ۵۰ » » β_f	۱/۰۲
» » ۸۰ » » β_w	۰/۹۲۹

از جدول بالا میتوان دید که برای مقادیر مختلف β نسبت a تغییرات قابل ملاحظه‌ای خواهد داشت. بهترین شرایط وقتی بوجود می‌آید که β_f مورد استفاده قرار گیرد و یا بعبارت دیگر برای محاسبه ضریب انبساط حجمی β از درجه حرارت مراجعه که متوسطی بین درجه حرارت دیوار و جریان سیال است استفاده شود. درجه حرارت دیوار اگر مورد استفاده قرار گیرد نسبت بالا کم‌تر خواهد شد. از مطالب بالا می‌توان نتیجه گرفت که ضریب انبساط حجمی β برای نشان دادن آزمایش انجام شده بر روی آب در جابجائی آزاد، باید در درجه حرارت مراجعه محاسبه گردد. بکاربردن این ضریب که در درجه حرارت جریان سیال محاسبه شده است تولید تا ۲ درصد اشتباه در نتایج بدست آمده خواهد کرد.

علائم

a - نسبت بین اعداد نوسل	α - ضریب پخش هدایت
A - ثابت	β - ضریب انبساط حجمی
T - درجه حرارت مطلق	θ - اختلاف درجه حرارت
u - سرعت سیال در امتداد محور x	ρ - جرم مخصوص سیال
v - » » » » » »	δ - ضخامت لایه مرزی
v - حجم مخصوص	
x - محور مختصات	
y - »	

زیر نویس ها

f - محاسبه شده در درجه حرارت مراجعه

o - مشخصات جریان سیال

w - دیوار گرم

x - فاصله در امتداد محور مشخصات

منابع مراجعه

۱ - کتاب انتقال حرارت - نوشته پروفیسور اکرت و ترجمه زین العابدین نجات سال ۱۳۵۰

۲) - H. Barrow & T. L. S. Rao : A Note On The Volumetric Expansion Coefficient in Free Convection , Mechanical Engineering Department , The University of Liverpool , March 1969 .

۳) - T. L. S. Rao : Ph. D. Thesis, Mechanical Engineering Department, The University of Liverpool , January 1969.