تعیین تغییر شکل جانبی و تنش ستون‌ها
بر اثر بار منتقل شده از یک بالکون

نوشتهٔ :

محمدحسین کاشانی ثابت

استاد دانشکدهٔ فنی

خلاصهٔ مقاله ـ دراین‌مقاله تغییر شکل جانبی ولنگر خمشی درستونی که تحت تأثیر بار منتقل شده از یک بالکون باشد بدست‌آمده‌است. نخست معادلهٔ دیفرانسیل تغییر شکل جانبی ستون ذکر شده ، سپس با استفاده از شرایط حدی و پیوستگی درقطعه هـای بالائی و پائینی ستون ، عبارت تغییر شکل جانبی و لنگر خمشی درمقاطع مختلف ستون محاسبه شده است . با داشتن این مقادیر محاسبهٔ تنش درهرمقطعی از ستون امکان‌پذیر میباشد. درپایان مقاله حالات خاصی نیز مورد بحث و بررسی قرارگرفته است .

۱ـ مقدمه ـ ستونی‌را درنظرمیگیریم که دربالا برتکیه گاهی ساده قرار داشته ودرپائین برتکیه گاهی مفصلی متکی باشد. درنقطه‌ای واقع بین سرو ته این ستون فرض میشودکه بالکنی متصل بآن است . اگر برانتهای آزاد بالکن باری بکمیت P اثرکند وطول این بالکن با توجه بشکل (۱) برابر e باشد دراینصورت ستون‌را تحت اثر بار منتقل شده از بالکن گویند. اثر بار این بالکن برروی ستون درمحل اتصال آن با بالکن قابل تبدیل به نیروی P و لنگر Pe میباشد.

حل این مسئله با آنکـه چندان مشکل نبوده است تـا آنجائیکه نگارنـده اطلاع دارد درکتابها و مقالات فنی ذکر نشده است وشاید علت این‌امر آن باشد که سابقاً با استفاده از فرمول تقریبی وسادهٔ ترکیب تنش خمشی و تنش عمودی دراین‌حالت وبا رعایت ضریب اطمینان محافظه‌کارانه‌ای مقطع ستون‌را محاسبه میکردند. زیرا ازطرفی‌ماشین های حسابگر الکترونیکی مانند امروز در دسترس محاسبان نبوده است تاحداکثر صرفه‌جوئی را درطرح ستونها بدست آورند[۱] و از طرف دیگر اگر قرار میبود طراحان با خط‌کش محاسبه حل

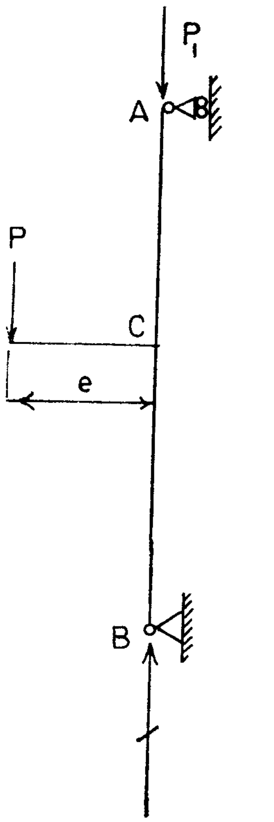
۱ — Optimum Design

مسئله را بدست میآوردند مستلزم صرف وقت بیشتری میبود که شاید مصلحت طراح درآن بود که مقطع ستون را بزرگتر درنظر بگیرد تاجبران عدم دقت محاسبه شده باشد. بدین ملاحظات حل دقیق این‌مسئله تاکنون بعهدهٔ تعویق افتاد .

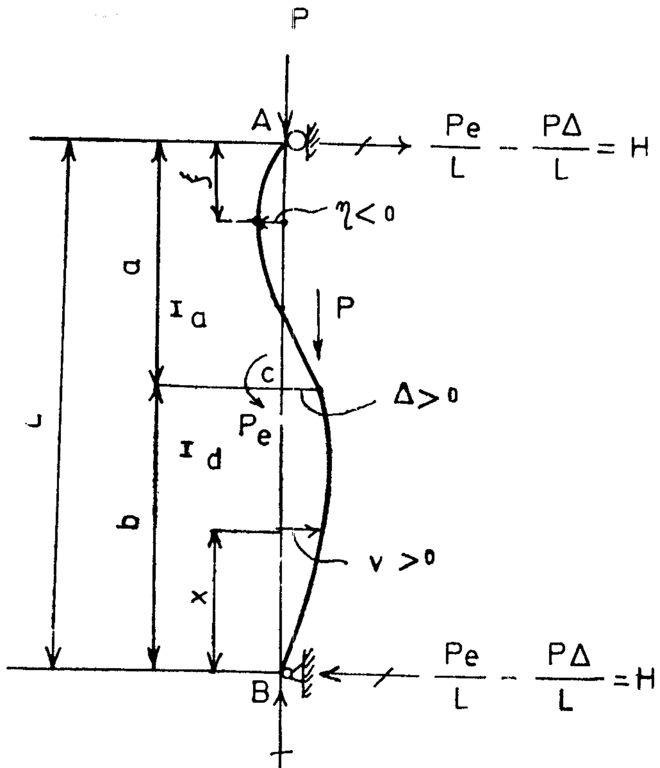
چون محاسبهٔ تقریبی گاهی ممکن است طراح را به نتایج نادرستی برساند لذا این امر نگارنده این مقاله را برآن داشت که حل دقیق این مسئله را بدست آورد . نتایج بدست آمده از این بررسی درصفحات بعدذکر شده است .

طبیعت این مسئله طوریست که آنرا داخل دردستهٔ مسائل « تیر ـ ستونی[۱]» قرار میدهد. چنین ستونی تحت اثر بار منتقل شده از بالکن از لحاظ ایستائی معین میباشد .

برای حل مسأله دو دستگاه مختصات (ξ , η) و (x , v) برای قطعهٔ فوقانی و قطعهٔ تحتانی ستون درنظرگرفته شده است و سایر مفروضات ستون درشکل (۲) دیده میشود .



شکل ۱ ـ ستون تحت‌تأثیر بار منتقل شده از بالکن



شکل ۲ ـ مشخصات ستون

تبصره ـ درشکل(۲) بجای p_e نوشته‌شود pe ، بجای I_d نوشته‌شودI_b ، بجای p درتکیه گاه A نوشته‌شود p_1 .

۱ --Beam-Column

ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل **اولر ـ برنولی** برای قطعهٔ فوقانی و تحتانی ستون نوشته شده و سپس تابع اولیه بدست آمده و درپایان کار با استفاده ازشرایط حدی و پیوستگی ثابت‌های انتگرال گیری محاسبه گردید. با داشتن این ثابتها تغییر شکل جانبی ، لنگر خمشی (بالنتیجه تنش) ، نیروی برشی برای مقاطع مختلفهٔ ستون درقسمت فوقانی و تحتانی آن قابل محاسبه است .

۲ـ علائم واصطلاحات فنی :

$P_1 =$ بار مؤثر درسرستون

$P =$ بار مؤثر درانتهای آزاد بالکن

$e =$ طول بالکن

$Pe = M_0 =$ لنگر منتقل شده از بالکن براثر خروج از مرکز بار P

$a =$ طول قطعهٔ بالائی ستون

$b =$ قطعهٔ پائینی ستون

$L =$ طول کل ستون

$R = P + P_1$

$I_a =$ لنگر ماند قطعهٔ بالائی ستون

$I_b =$ لنگر ماند قطعهٔ پائینی ستون

$$m^2 = \frac{R}{EI_b}$$

$$k^2 = \frac{P_1}{EI_a}$$

$$ka = \Phi$$

$$mb = \Psi$$

$\xi =$ طول مقطعی از قطعهٔ بالائی‌ستون

$x =$ طول مقطعی از قطعهٔ پائینی ستون

$\eta =$ تغییرشکل مقطع بطول ξ

$v =$ تغییر شکل مقطع بطول x

$\Delta =$ تغییر شکل جانبی ستون درمحل اتصال با بالکن

$M_t(\xi) =$ لنگر خمشی درمقطع بطول ξ

$M_b(x) =$ لنگر خمشی درمقطع بطول x

$V_t(\xi) =$ نیروی برشی درمقطع بطول ξ مؤثر درمقطعی عمود برمحور ξ

$V_b(x) =$ نیروی برشی درمقطع بطول x مؤثر درمقطعی عمودبرمحور x .

۳ـ معادله‌های تغییرشکل قطعهٔ بالائی و پائینی ستون :

با توجه بآنچه که در مراجع [۱ تا ٤]* ذکر شده است معادله‌های دیفرانسیل تغییر شکل قطعهٔ بالائی و پائینی ستون بصورت زیر نوشته میشود :

$$EI_a \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -M_t(\xi) = -P_1\eta + \frac{(Pe-P\triangle)\xi}{L} \qquad (1)$$

$$EI_b \frac{d^2v}{dx^2} = -M_b(x) = -Rv - \frac{(Pe-P\triangle)\xi}{L} \qquad (2)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را بصورت دو معادله دیفرانسیل زیر میتوان نوشت :

$$\eta'' + k^2\eta = \frac{(Pe-P\triangle)\xi}{EI_aL} \qquad (1')$$

$$v'' + m^2v = -\frac{(Pe-P\triangle)x}{EI_bL} \qquad (2')$$

که درآن :

$$R = P_1 + P \quad , \quad k^2 = \frac{P_1}{EI_a} \quad , \quad m^2 = \frac{R}{EI_b} \qquad \text{(۳ - الف تا ج)}$$

میباشد .

جواب معادله‌های دیفرانسیل (′۱) و (′۲) که نامتجانس و از رستهٔ دوم با ضرائب ثابت است ، بعبارتهای زیر خواهد بود :

$$v = A\sin mx + B\cos mx + \frac{P(\triangle-e)x}{RL} \qquad (4)$$

$$\eta = C\sin k\xi + D\cos k\xi - \frac{P(\triangle-e)\xi}{P_1L} \qquad (5)$$

درعبارتهای(۳) و (٤) کمیت‌های A ، B ، C و D ثابتهای انتگرال گیری میباشد که بکمک شرایط حدی و پیوستگی محاسبه میگردد .

تبصره ـ با توجه بمعادله‌های (۱) و (۲) ، درمقطع C یعنی بازای $a=\xi$ و $b=x$ خواهیم داشت :

$$M_t(a) = +P_1\triangle - \frac{(Pe-P\triangle)a}{L}$$

و

$$M_b(b) = R\triangle + \frac{(Pe-P\triangle)b}{L}$$

---

* ـ اعداد داخل ابروها نمرهٔ مرجع را درفهرست مراجع نشان میدهد .

از حذف Δ بین ایندو رابطه نتیجه میشود :

$$M_b(b)-M_t(a)=Pe \tag{۶}$$

معادلهٔ (۶) شرط جهش لنگر خمشی درمقطع C ستون میباشد .

این شرط را با توجه بطرف چپ معادله‌های (۱) و (۲) بصورت زیر میتوان نوشت :

$$Pe+EI_b\frac{d^2v(b)}{dx^2}=EI_a\frac{d^2\eta(a)}{dx^2} \tag{۶'}$$

این رابطه مبین ناپیوستگی درانحناء ستون درمقطع C یعنی محل تأثیر بار P و لنگر $M_0=Pe$ میباشد .

۴ـ شرایط حدی و پیوستگی :

از شرط حدی :

$$v=(0)=0 \tag{الف}$$

و :

$$\eta(0)=0 \tag{ب}$$

لازم میآید که :

$$B=0=D \tag{۷}$$

باشد .

از شرط پیوستگی :

$$v(b)=\eta(a) \tag{ج}$$

و :

$$v(b)=\Delta \longrightarrow \eta(a)=\Delta \tag{د}$$

ثابتهای A و C بعبارتهای زیر بیان خواهد شد :

$$A=\frac{\Delta+\frac{Pb}{RL}(e-\Delta)}{\sin mb} \tag{۸ ـ الف}$$

و :

$$C=\frac{\Delta-\frac{Pa}{P_1L}(e-\Delta)}{\sin ka} \tag{۸ ـ ب}$$

همچنین از شرط پیوستگی :

$$v'(b)=-\eta'(a) \tag{ه}$$

عبارت Δ بشرح زیر محاسبه میگردد :

$$\Delta=e\frac{\frac{P}{P_1}\Phi\cot\Phi-\frac{P}{R}\Psi\cot\Psi+\frac{P}{R}-\frac{P}{P_1}}{kL\cot\Phi+mL\cot\Psi+\frac{P}{P_1}\Phi\cot\Phi-\frac{P}{R}\Psi\cot\Psi+\frac{P}{R}-\frac{P}{P_1}}$$

که پس از ترکیب جملات ، Δ بعبارت زیر نوشته میشود :

$$\Delta = e \frac{\frac{P}{R}(1-\Psi\cot\Psi) - \frac{P}{P_1}(1-\Phi\cot\Phi)}{\frac{L}{a}\Phi\cot\Phi + \frac{L}{b}\Psi\cot\Psi + \frac{P}{R}(1-\Psi\cot\Psi) - \frac{P}{P_1}(1-\Phi\cot\Phi)} \quad (۹)$$

درعبارت (۹) ، Φ و Ψ بترتیب برابر:

$$\Phi = ka \quad , \quad \Psi = mb \quad (\text{۱۰ - الف و ب})$$

میباشد .

با توجه بروابط ٤ و (۸ ـ الف) و (٥) و (۸ ـ ب) عبارت v و η بشرح زیر است :

$$v = \frac{Pb}{RL}\left(\frac{\sin\Psi x/b}{\sin\Psi} - \frac{x}{b}\right)e + \Delta\left[\frac{\sin\Psi x/b}{\sin\Psi}\left(1 - \frac{Pb}{RL}\right) + \frac{Px}{RL}\right] \quad (۱۱)$$

$$\eta = -\frac{Pa}{P_1L}\left(\frac{\sin\Phi\xi/a}{\sin\Phi} - \frac{\xi}{a}\right)e + \Delta\left[\frac{\sin\Phi\xi/a}{\sin\Phi}\left(1 + \frac{Pa}{P_1L}\right) - \frac{P\xi}{P_1L}\right] \quad (۱۲)$$

پس از محاسبهٔ Δ ، v و η بکمک معادله های (۱) و (۲) ، عبارات $M_t(\xi)$ و $M_b(x)$ وهمچنین ازروابط زیر* :

$$V_t(\xi) = \frac{dM_t(\xi)}{d\xi} - P_1\frac{d\eta(\xi)}{d\xi} = -EI_a\eta'''(\xi) - P_1\eta'(\xi) \quad (۱۳)$$

$$V_b(x) = \frac{dM_b(x)}{dx} - R\frac{dv(x)}{dx} = -EI_bv'''(x) - Rv'(x) \quad (۱٤)$$

نیروی برشی $V_t(\xi)$ و $V_b(x)$ درمقطعی واقع درقطعهٔ بالائی و پائینی ستون بدست میآید .

۵ـ بحث وحالات خاص :

۵ـ۱ـ نخست حالتی را درنظر میگیریم که $e=0$ و $P\neq 0$ باشد دراینصورت مسأله برمیگردد به ستونی با نیروی فشاری P_1 که برسر آن وارد میشود و در مقطعی واقع بین سر و ته ستون نیز بار P اثر میکند. دراینصورت باتوجه بمعادلهٔ (۹) صورت کسر عبارت Δ صفر میگردد و برای اینکه Δ مخالف‌صفر باشد یعنی وقتیکه چنین ستونی کمانه کند باید مخرج کسر عبارت Δ برابر صفر گردد تا $\Delta = \frac{0}{0}$ و بصورت نامعین درآید . دراینصورت از صفر قراردادن مخرج عبارت Δ داریم :

$$\frac{L}{a}\Phi\cot\Phi + \frac{L}{b}\Psi\cot\Psi + \frac{P}{R}(1-\Psi\cot\Psi) - \frac{P}{P_1}(1-\Phi\cot\Phi) = 0 \quad (۱۰)$$

---

* ـ برای اطلاع ازطرز بدست آوردن اینروابط بصفحهٔ ۲ مرجع [٤] این مقاله رجوع شود.

این معادلهٔ مثلثاتی[1] معادلهٔ مشخصه‌ایست که بکمک آن بار بحرانی $R_{cr}=(P+P_1)_{cr}$ را میتوان بدست آورد .

معادلهٔ (۱۰) بامعادلهٔ مشخصه‌ای که Jasinsky دراین حالت بدست آورده است وشرح آن درصفحهٔ ۹۸ مرجع [٤] قید شده است مطابقت دارد. برای بررسی این موضوع کافی است توجه شود که اگر علائم زیر را قائل شویم :

$$k_1^2=\frac{P_1}{EI_a} \quad , \quad k_2^2=\frac{P}{EI_b} \quad , \quad k_3^2=\frac{P_1+P}{EI_b} \quad , \quad k_4^2=\frac{P}{EI_a}$$

معادلهٔ (۱۰) بصورت معادلهٔ (۲ - ٤۲) صفحهٔ ۹۹ مرجع [٤] درخواهد آمد که بشرح زیر است :

$$\frac{k_4^2}{k_1^2}-\frac{k_1^2L+k_4^2a}{k_1\tan k_1a}=\frac{k_2^2}{k_3^2}+\frac{k_3^2L-k_2^2b}{k_3\tan k_3b} \qquad (10')$$

درهرحالت خاص ، با دانستن نسبت‌های $\frac{P_1+P}{P_1}$ ، I_a/I_b و b/a بروش خطا و آزمون کوچکترین مقدار (P_1+P) را که در معادلهٔ (′۱۰) صادق باشد میتوان بدست آورد و $(P_1+P)_{cr}=R_{cr}$ برابر این مقدار حداقل خواهد بود. بکمک این بار بحرانی میتوان طول مؤثر[2] L_{ef} ستون را از فرمول زیر بدست آورد :

$$L_{ef}=\pi\sqrt{\frac{EI_b}{R_{cr}}} \qquad (16)$$

از معادله های (۱۱) و (۱۲) عبارت‌های v و η دراین حالت چنین خواهد بود :

$$v=\Delta\left[\frac{\sin\Psi x/b}{\sin\Psi}\left(1-\frac{P}{P_1+P}\cdot\frac{b}{L}\right)+\frac{P}{P_1+P}\cdot\frac{x}{L}\right] \qquad (16')$$

$$\eta=\Delta\left[\frac{\sin\Phi\xi/a}{\sin\Phi}\left(1+\frac{P}{P_1}\cdot\frac{a}{L}\right)-\frac{P}{P_1}\cdot\frac{\xi}{L}\right] \qquad (17)$$

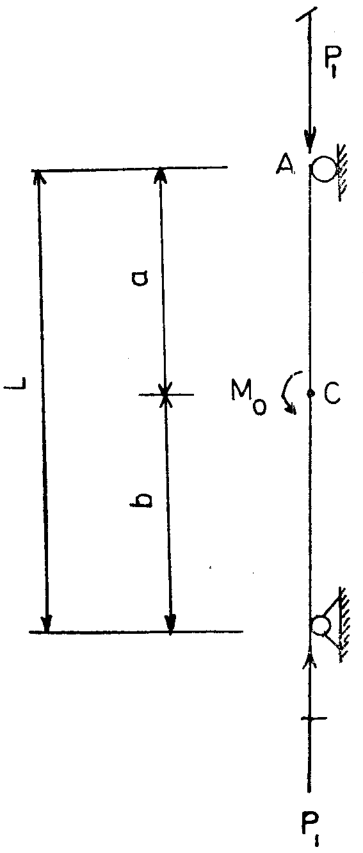
از این بحث چنین نتیجه میگردد که مسئله ستون بابارمنتقل‌شده از بالکن که ذاتاً جزء مسائل « تیر - ستونی» بوده و از لحاظ ایستائی بطوریکه دیدیم معین است دراین‌حالت خاص از جرگهٔ این نوع مسائل خارج شده و وارد در دسته مسائل مربوط بکمانه میگردد که بالنتیجه خیز و لنگر خمشی آن نامعین بوده وطرح ستونها باید بمأخذ بار بحرانی صورت گیرد.

۵-۲- اکنون حالتی را درنظر میگیریم که $p=0$ و $e=\infty$ باشد بطوریکه Pe برابر مقدار معین

---

۱ — Transcendental Equation ۲ — Effective Length

M_o باشد دراینصورت از معادله های (۹ و ۸ الف و ب ، ۱۱ و ۱۲) کمیت Δ ، A ، C ، $v(x)$ و $\eta(\xi)$ بعبارتهای زیر خواهد بود. که ازگذاردن $P=0$ و $M_o=pe$ درمعادلات بالا بدست آمده است .



شکل ۳ ـ ستون تحت تأثیر نیروی فشاری ولنگری مؤثر درنقطه‌ای واقع بین سروته آن

$$\Delta=\frac{M_o}{P_1}\cdot\frac{\Phi\cot\Phi-\Psi\cot\Psi}{\frac{L}{a}\Phi\cot\Phi+\frac{L}{b}\Psi\cot\Psi} \tag{۱۸}$$

$$A=\frac{M_o}{P_1}\cdot\frac{\Phi}{\Phi\sin\Psi+\frac{a}{b}\Psi\cos\Psi\tan\Phi} \tag{۱۹}$$

$$C=-\frac{M_o}{P_1}\cdot\frac{\Psi}{\Psi\sin\Phi+\frac{b}{a}\Phi\cos\Phi\tan\Psi} \tag{۲۰}$$

$$v=\frac{M_o}{P_1}\left(\frac{\Phi\sin\Psi x/b}{\Phi\sin\Psi+\frac{a}{b}\Psi\cos\Psi\tan\Phi}-\frac{x}{L}\right) \tag{۲۱}$$

$$\eta=\frac{M_o}{P_1}\left(\frac{-\Psi\sin\Phi\xi/a}{\Psi\sin\Phi+\frac{b}{a}\Phi\cos\Phi\tan\Psi}+\frac{\xi}{L}\right) \tag{۲۲}$$

معادله های (۲۱ و ۲۲) که دراینجا بعنوان حالت خاص این‌مسئله کلی بدست آمده است درمرجع (۲) این مقاله بطریقهٔ مستقیم و هم‌چنین با استفاده از تکنیک معادل قرار دادن اثر لنگر خمشی با دو نیروی جانبی مساوی ومختلف‌العلامه بشرحیکه درمقالات سابق اینجانب گذشت ، عیناً بدست آمد .

۵-۳- درپایان حالتی‌را مورد توجه قرارمیدهیم که $p \neq 0$ و $e \neq 0$ باشد معذلک مقدار Δ ممکن است بی‌نهایت باشد و این درموردی اتفاق میافتد که مخرج کسر معادله (۹) برابر صفر گردد یعنی بازای‌آن مقادیری از بار R که ستون کمانه میکرد اگر $e = 0$ میبود .

این نتیجه‌ایکه دراینجا بدست آمد درسایر مسائل « تیر - ستونی » نیز مصداق دارد بدین‌معنی که اگر برستونی علاوه برنیروی فشاری ، نیرو یا لنگر جانبی‌هم مؤثر باشد دراینصورت آن مقادیری از نیروهای فشاری که تغییرشکل جانبی « تیر - ستونی » را بی‌نهایت میگردانند درست برابر کمیت بارهای بحرانی همین ستون است که فقط این نیروهای فشاری برآن مؤثر بوده ولی نیرو یا لنگر جانبی آن برابر صفر باشد .

برای اطلاع از امثلهٔ دیگری دراینخصوص باید بمراجع [۲ و ٤] این مقاله رجوع شود .

بمنظور رسم نمودارهای لنگر خمشی و تغییر شکل این قبیل ستون‌ها ، از ماشین حسابگر الکترونی دانشگاه تهران کمک گرفته‌شده است ونگارنده درصدداست با استفاده ازاعدادبدست‌آمده ازاین‌ماشین درفرصت مناسبی‌این‌نمودارها را بازای‌مقادیر مختلف R/p_1 ، b/a ، Ψ و Φ ترسیم و منتشر کند تامهندسان محاسب بسهولت بتوانند چنین ستونهائی را طرح و محاسبه کنند.

فهرست مراجع

۱ - کتاب مقاومت مصالح جلد اول تألیف دکتر محمد حسین کاشانی ثابت دیماه ۱۳٤۷ .

۲ - جزوهٔ درس مقاومت مصالح عالی اینجانب در دانشکدهٔ فنی‌دانشگاه تهران .

3 — Timoshenko , S. « Strength of Materials , Part I » , 3rd Edition , D. Van Nostrand Co. INC. Princeton , New Jersey, June 1956.

4 — Timoshenko, S. « Strength of Materials, Part II » , 3rd Edition , D. Van Nostrand Co. INC. Princeton, New Jersey , June 1957.

5 — Timoshenko, S. and Gere, J. « Theory of Elastic Stability, » Second Edition , Mc Graw-Hill Book Co. , INC. , New York, 1961.

6 — Ziegler,H. «Principles of Structural Stability,» Blaisdell Publishing Co., Massachusetts, 1968.