

مسعود خیام

کارشناس ارشد کامپیوتر گزینیه

چکیده

معادله ارتعاشات جانبی تیر یک سرگیردار و شرایط حدی در حالت‌های مختلف بارگذاری، و حل این معادله ارائه شده است. بسامدهای تیر و شکل ارتعاشات در یک مثال عددی محاسبه شده است.

دیباچه

کششی مطالعه کرده، نشان داده‌اند که باز یاد شدن نیروهای محوری کششی بسامدهای دوم به بالا افزایش می‌یابد. اما بسامد اصلی بصورت مجانب بسوی صفر میل می‌کند. از اینرو مقدار قدر مطلق نیروی تعقیب‌کننده هر چه باشد، سازه نمی‌تواند نه از دیدگاه استاتیکی و نه از دیدگاه دینامیکی ناپایدار شود. روش انرژی توسط لوینسون (۵) بکار گرفته شد، او طرز عمل و کاربرد روش رایلی - ریتز (Raily-Ritz) را در حل این مساله نشان داد. بورگر و لوینسون (۶) ارتعاشات بعد از لرزش سیستم‌های نامبرای متقارن را با بهره‌گیری از روش اغتشاش (Perturbation) مورد بحث قرار دادند. آندرسون (۷) اثرات چرخش، جرم انتهایی و خارج از مرکز را به پژوهش‌نشست. لختی‌های برشی و چرخشی توسط کونادیس و کاتسی کادلیس مورد ملاحظه قرار گرفت (۸).

سؤال یک بروش تجربی توسط ویلمز (۹) مورد بررسی و پژوهشی قرار گرفت و او مقدار بار تجربی بحرانی را چنین گزارش کرد:

$$P_{cr}(exp) = \frac{1.886\pi^2 EI}{l^2}$$

از آنجاکه او با تقریب ۶ درصد، به نتایج تئوری نزدیک شده، ۹۴ درصد از مقادیر محاسبات را بدست آورده بود، این امر را اثبات کافی برای تحلیل خود دانست. این عقیده از دیدگاه تحلیلی و ریاضی بررسی و با مخالفت برخی پژوهشگران روبرو شد (۱۰ و ۱۱). در مقاله (۱۰) نشان داده شده است که چهارمین شرط حدی در آنالیز ویلمز با شرط حدی یک تفاوت دارد، از اینرو دستگاه نیروهای ماندگار (Conservative) ویلمز نمی‌تواند جایگزین دستگاه نیروهای ناماندگار بک گردد.

ارتعاشات جانبی تیر یک سرگیردار، در حالت‌های پیش‌بارگذاری شده (Preload) یا پیش‌تنیده (Prestress)، بعلا کاربردهای فنی و صنعتی متعدد و گسترده این تیرها در بخش‌های مختلف مکانیک و ساختمان، بطور قابل ملاحظه‌ای مورد توجه و بررسی قرار گرفته است، نتیجه این مطالعات، بویژه در طراحی برخی اجزاء سفینه‌های فضائی و راکتها، محاسبه لوله‌های بالابر و طراحی ستونهای ساختمانهای دریائی و جزایر مصنوعی، مورد استفاده بوده و به‌کار می‌رود. تاریخچه جاری این بخش از تئوری دینامیک ساختمان، با مطالعه ارتعاشات تیر یک سرگیردار، زیر تاثیر نیروی انتهایی تعقیب‌کننده مماسی فشاری آغاز می‌شود (۱، ۲، ۳)، این پژوهشها نشان می‌دهد که، طبیعت دستگاههای ارتجاعی، زیر تاثیر نیروهای تعقیب‌کننده، ناماندگار، (Non-Conservative) می‌باشد. در اجسام ارتجاعی، زیر تاثیر نیروهای تعقیب‌کننده، هردو ناپایداری استاتیکی و دینامیکی می‌تواند بروز کند. این ناپایداریها بترتیب کماتش و لرزش (پر زدن = Flutter) نامیده می‌شود. پیش فرض اصلی پژوهشهای یاد شده در بالا، تغییر مکانهای کوچک است، و با این پیش فرض، پژوهشها نشان داده است که مقدار نیروی تعقیب‌کننده هر چه باشد به هیچ‌روی امکان پدید آمدن ناپایداریهای استاتیکی وجود ندارد. در هر صورت با افزایش بارهای محوری فزاینده، سازه از دیدگاه دینامیکی ناپایدار خواهد شد. سر آندرسون و کینگ (۴) ارتعاشات آزاد جانبی تیر یک گیردار لاغر را زیر تاثیر نیروی انتهایی مماسی تعقیب‌کننده

نیرو مشخص است. در این حالت معادله حرکت با بهره‌گیری از تئوری تغییرات کوچک چنین می‌شود:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

در این معادله علائم \pm به ترتیب برای نیروی انتهایی فشاری یا کششی است

اگر حل کلی این معادله چنین فرض شود:

$$y = A_0 f(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل معمولی زیر بدست می‌آید:

$$f''''(x) \pm K^2 f''(x) - a\omega^2 f(x) = 0 \quad (3)$$

$$K^2 = \frac{T}{EI}, \quad a = \frac{m}{EI} \quad \text{که در آن}$$

پاسخ کلی معادله چنین است:

$$f(x) = A \cosh Qx + B \sinh Qx + C \cos Rx + D \sin Rx \quad (4)$$

$$f(x) = A \cosh Rx + B \sinh Rx + C \cos Qx + D \sin Qx$$

$$\sin Qx$$

در کش

در این معادله‌ها

$$\begin{cases} Q = \left[\left(a\omega^2 + \frac{K^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{K^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ R = \left[\left(a\omega^2 + \frac{K^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{K^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (5)$$

بررسی شکلهای ارتعاشات (Mode-Shapes) پیش‌گفته بطور خاص، و نیز ارتعاشات تیرهای یک سرگیردار تحت اثر بارگذاری نامشخص و عمومی، بسیار مهم و مورد نظر و علاقه می‌باشد. این بخش از پژوهش تاکنون مطالعه نشده است و بررسی درباره آن موضوع این مقاله است.

بدیهی است که حل کلی مساله بدون بهره‌گیری از حسابگرهای الکترونیک سریع مقدور نیست. برای حل این مساله و بدست آوردن نتایج کلی، که نمونه‌ای از آنها در اینجا آمده است، از کمپیوتر ICL و زبان ترجمه ALGOL 68-R استفاده شده است.

نمادها

| نماد | مفهوم فیزیکی |
|------------------------|--------------------------------|
| $P_{cr}(\text{exp})$ | نیروی بحرانی تجربی |
| E | ضریب کشسانی |
| I | ممان دوم مساحت |
| l | طول تیر |
| l' | طول سیم نازک |
| x, y | محورهای مختصات |
| t | زمان |
| T | نیروی انتهایی |
| m | جرم |
| A_0 | ضریب کلی معادله تغییر شکل |
| $f(x)$ | تابع شکل تیر در زمان مشخص |
| f', f'', f''', f'''' | مشتقات متوالی تابع شکل |
| A, B, C, D | ضرایب تابع شکل |
| α | زاویه خط مماس بر انتهای تیر |
| β | زاویه نیروی وارد بر انتهای تیر |
| φ | نسبت دو زاویه |
| ω | تواتر |
| $g(\omega)$ | توابع محاسبه شده بر حسب |
| $h(\omega)$ | تواتر در معادله تواتر |

تعریف دیگر نمادها در متن آمده است.

تئوری

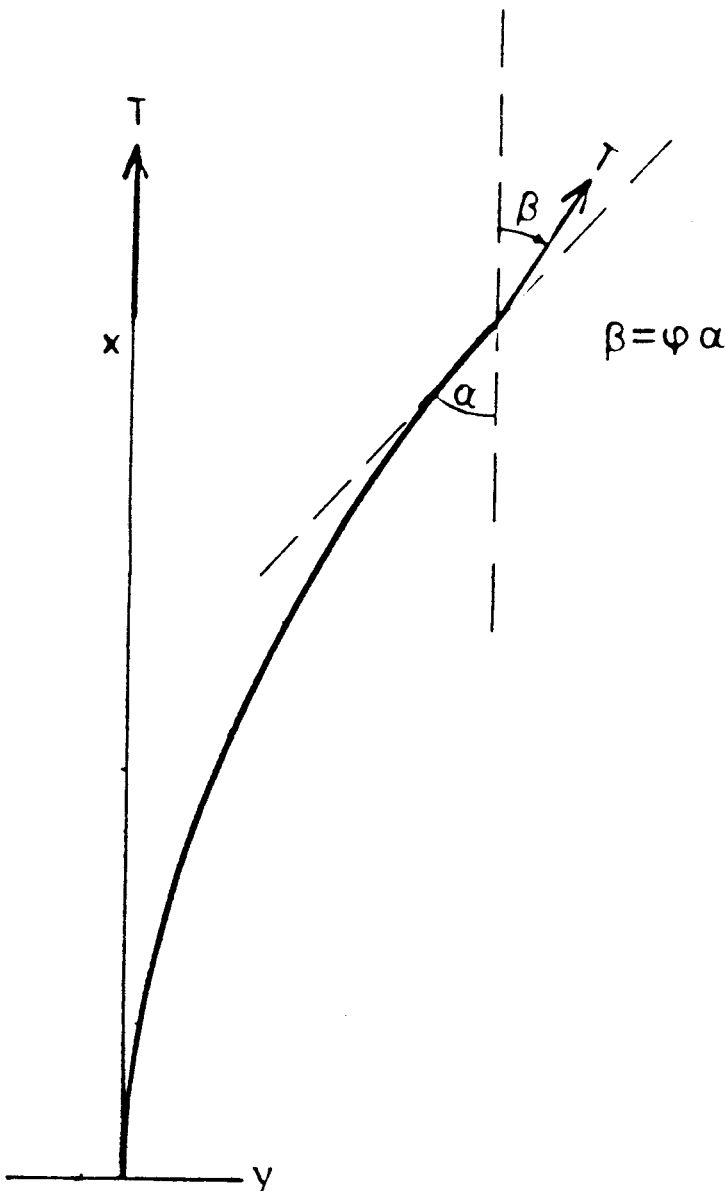
تیر یک سرگیردار شکل (۱) تحت تاثیر نیروی فشاری یا کششی در انتهای آزاد خود می‌باشد که اندازه و زاویه این

و برای سیم بلند $f(\ell) > 0$ این شرایط بصورت زیر ساده می شود.

$$f'''(\ell) - K^2 \left[f'(\ell) + \frac{f(\ell)}{\ell} \right] = 0 \quad (10)$$
 ب - فشار

۴ - $\beta = 0$ نیروی فشاری ماندگار (۱۲)
 ۵ - $\beta = \alpha$ نیروی فشاری مماسی ناماندگار (۱)
 برای معادله های بسامد و شکل ارتعاشات حالت های
 بالا به جدول های (۱) و (۲) و شکل های (۳) تا (۶) مراجعه شود.
 در حالت سه $\frac{\ell}{l} = 10$ فرض شده است.
 جالب توجه است که هنگامی که طول نخ افزایش یافته به بینهایت
 میل کند معادله (۹) به

$$f'''(\ell) - K^2 f'(\ell) = 0$$



و شرایط حدی چنین است:
 $f(0) = 0$
 $f''(\ell) = 0$
 $f'(0) = 0$ (6)

$$f'''(\ell) \pm K^2 [f'(\ell) - \sin \beta] = 0$$

در اینجا نیز علائم \pm به ترتیب برای نیروهای فشاری و کششی است.
 دو جفت مختلف بسامد و شکل ارتعاش چنین تعریف می شود.

$$\begin{matrix} \omega_m & \dots & \dots & \dots & f_m \\ \omega_n & \dots & \dots & \dots & f_n \end{matrix}$$

این رابطه ها، معادله (۳) و شرایط حدی را اضااء کرده با
 جایگزین کردن در رابطه (۳) و (۴) معادله زیر بدست می آید.

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^\ell a f_m f_n dx = \mp \frac{K^2 (f_m - f_n) \sin \beta}{\dots} \quad (v)$$

علائم \pm به ترتیب برای حالات فشاری و کششی است.

$$K \neq 0 \begin{cases} \beta = 0 & * \text{ متعامد} \\ \beta \neq 0 & ** \text{ نامتعامد} \end{cases}$$

شرایط حدی را در معادله های (۴) بکار می بندیم در نتیجه
 چهار معادله خطی بدست می آید. از حل این دستگاه معادله ها
 معادله بسامد ارتعاشات بدست می آید.

$$g(\omega) \cdot A + \text{Sin} [\varphi \cdot h(\omega) \cdot A] = 0 \quad (A)$$

 برای مقادیر $|\varphi| > 1$ بسامدی که مستقل از دامنه ارتعاشات
 باشد وجود ندارد، این امر نمایشگر ایجاد و بسط حرکت
 ارتعاشی غیرخطی است. چنین حرکتی را بطور کلی نمی توان
 در میدان تئوری تغییرات کوچک بررسی کرد.

برای مقادیر $|\varphi| < 1$ می توان رابطه تواترها را خطی
 کرد که در نتیجه، محاسبات به پنج حالت زیر خواهد رسید:

الف - کشش

- ۱ - $\beta = 0$ نیروی کششی ماندگار
- ۲ - $\beta = \alpha$ نیروی کششی مماسی ناماندگار (۴)
- ۳ - تیر یک سرگیردار زیر تاثیر نیروی کششی مشابه
 سیم نازک بلند. (شکل ۲) در این حالت آخرین شرط حدی

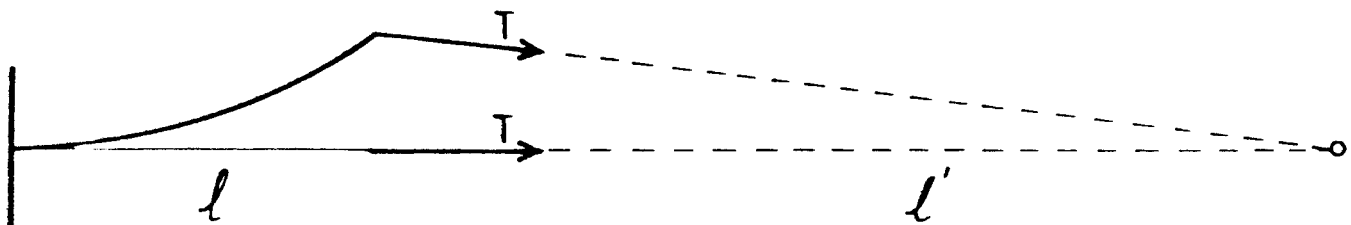
$$f'''(\ell) - K^2 \left\{ f'(\ell) + \frac{f(\ell)}{[\ell'^2 + (f(\ell))^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} = 0 \quad (9)$$

جدول (۱) تواتر

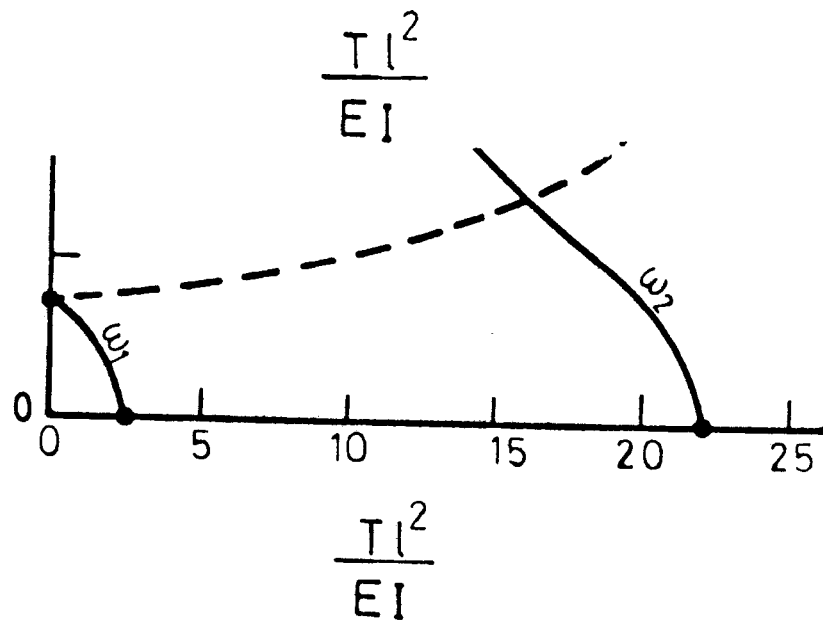
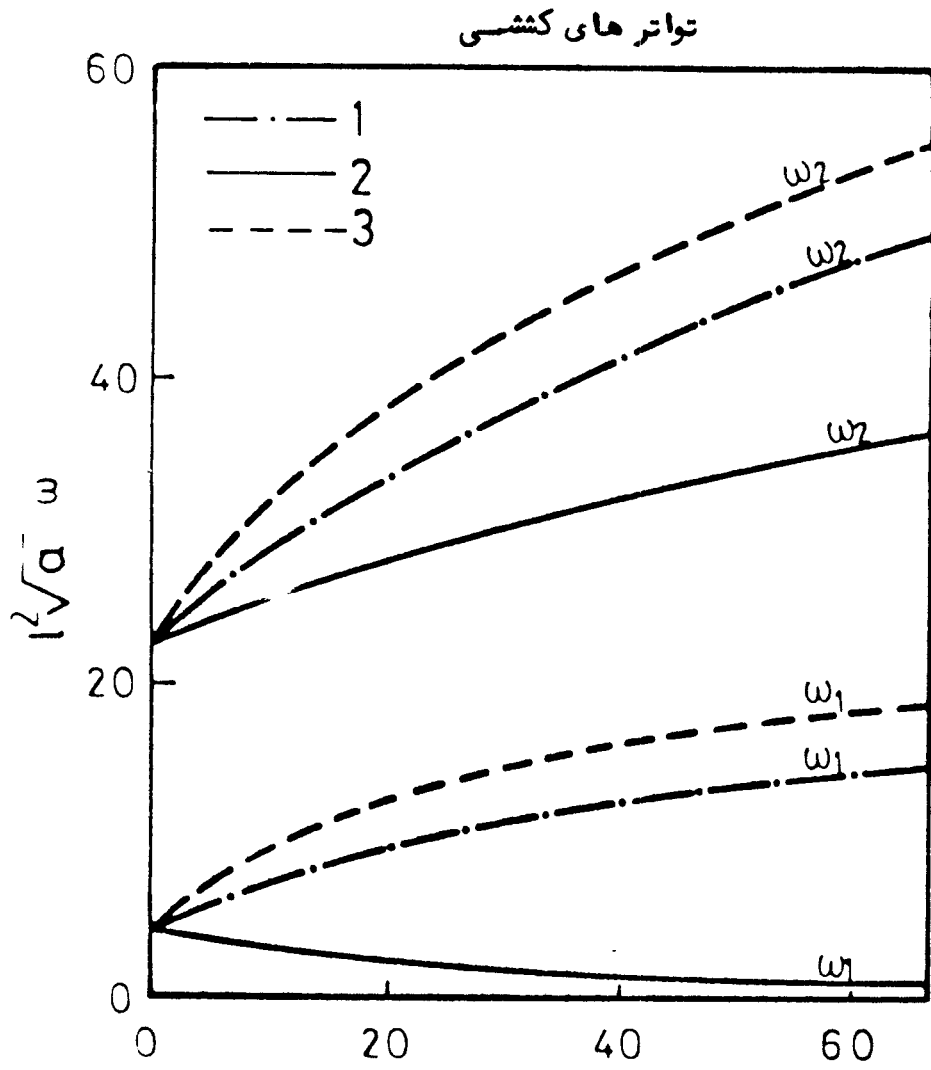
| نوع بار | حالت | معادله بسامد | شماره |
|---------|------|---|-------|
| کشش | 1 | $2Q^2R^2 + QRK^2 \sin Ql \sinh Rl + (Q^4 + R^4) \cos Ql \cosh Rl = 0$ | (11) |
| کشش | 2 | $2a\omega^2 + K^4 - K^2 \sqrt{a\omega^2} \sin Ql \sinh Rl + 2a\omega^2 \cos Ql \cosh Rl = 0$ | (12) |
| کشش | 3 | $R^3Q^3 + RQ^4(Q + K) + 3aK^2\omega^2 \sin Ql \sinh Rl + QR(2a\omega^2 + K^4) \cos Ql \cosh Rl + \frac{K^2}{l^2}(R^2 + Q^2)(R \sin Ql \cosh Rl - Q \cos Ql \sinh Rl) = 0$ | (13) |
| فشار | 4 | $2Q^2R^2 - QRK^2 \sin Rl \sinh Ql + (Q^4 + R^4) \cos Rl \cosh Ql = 0$ | (14) |
| فشار | 5 | $2a\omega^2 + K^4 + \sqrt{a\omega^2}K^2 \sin Rl \sinh Ql + 2a\omega^2 \cos Rl \cosh Ql = 0$ | (15) |

جدول (۲) شکل ارتعاش

| نوع بار | معادله شکل ارتعاش | شماره |
|---------|---|-------|
| کشش | $\frac{f(x)}{A} = \cosh Rx - \cos Qx - \lambda_1 \left(\frac{\sinh Rx}{R} - \frac{\sin Qx}{Q} \right)$ | (۱۶) |
| | $\lambda_1 = \frac{R^2 \cosh Rl + Q^2 \cos Ql}{R \sinh Rl + Q \sin Ql}$ | |
| فشار | $\frac{f(x)}{A} = \cosh Qx - \cos Rx - \lambda_2 \left(\frac{\sinh Qx}{Q} - \frac{\sin Rx}{R} \right)$ | (۱۷) |
| | $\lambda_2 = \frac{Q^2 \cosh Ql + R^2 \cos Rl}{Q \sinh Ql + R \sin Rl}$ | |

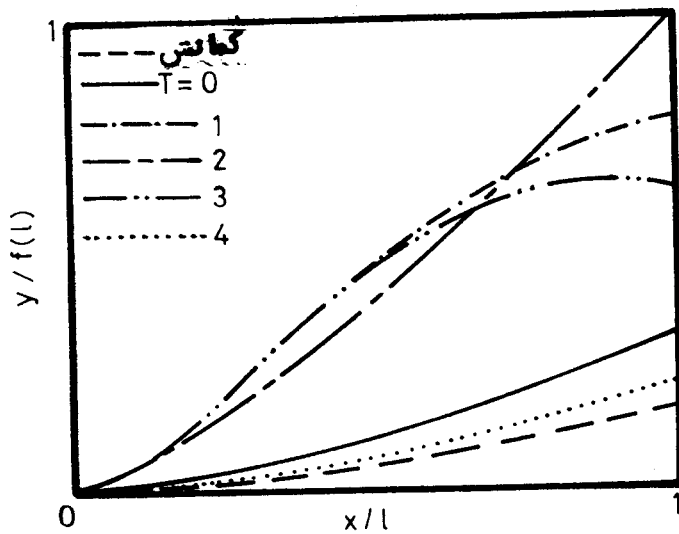


شکل (۲) - تیر یکسر گیردار و کشش سیم نازک بلند

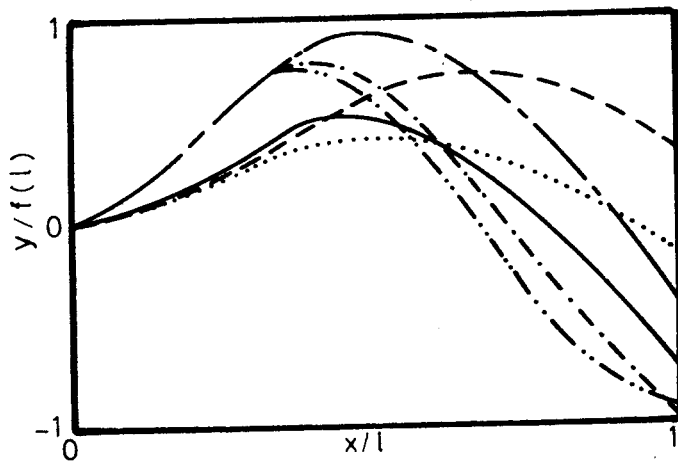


شکل (۴)

شکل تواتر اول



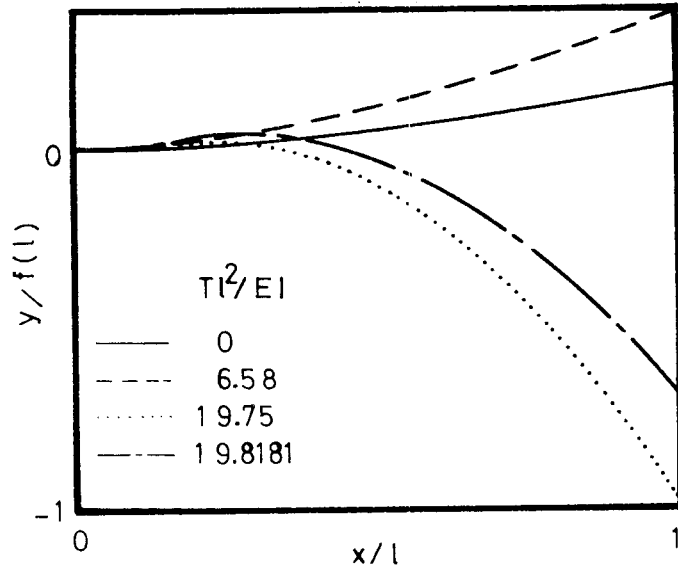
شکل تواتر دوم



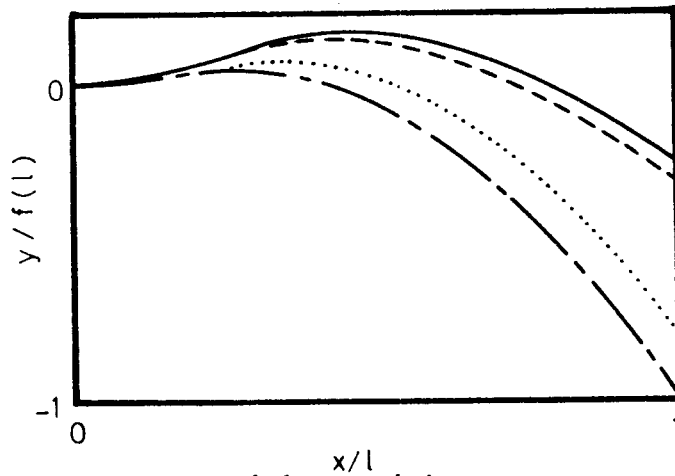
شکل (۵) حالات (۱) تا (۴)

شکل تواتر اول

منحنی های اشکال
ارتعاشات



شکل تواتر دوم



شکل (۶) حالت (۵)

فهرست منابع

- 1) Beck, M., "Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes," Z. Angew. Math. u. Physik, Vol. 3, 1952, pp. 225-228.
- 2) Bolotin, V.V., Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, 1st Ed., Pergamon Press, Oxford, England, 1963, pp. 90-93.
- 3) Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., Mc GRAW-HILL KOGAKUSHA, Ltd., Tokyo, Japan, 1961, pp. 153-156.
- 4) Anderson, J.M., and King, W.W., "Vibration of a Cantilever Subjected to a Tensile Follower Force," AIAA journal, Vol. 7, April 1969, pp. 741-742.
- 5) Levinson, M., "Application of the Galerkin and Ritz Method to Nonconservative Problems of Elastic Stability," Z. Angew. Math. u. Physik, Vol. 17, 1966, pp. 431-442.
- 6) Burgess, I.W., and Levinson, M., "The Post-Flutter Oscillations of Discrete Symmetric Structural Systems with Circulatory Loading," Int. Jour. Mech. Sci. Vol. 14, 1972, pp. 471-488.
- 7) Anderson, G.L., "The Effects of Rotation, Tip Mass, and Hub Radius on the Stability of Beck's Column," Journal of Sound and Vibration, Vol. 43(3), 1975, pp. 529-542.
- 8) Kounadis, A. and Katsikadelis, J.T., "Shear and Rotatory Inertia Effect on Beck's Column," Journal of Sound and Vibration, Vol. 49(2), 1976, pp. 171-178.
- 9) Willems, N., "Experimental Verification of the Dynamic Stability of a Tangentially Loaded Cantilever Column," Jour. of Appl. Mech. Vol. 33, June 1966, pp. 460-461.
- 10) Huang, N.C., Nachbar, W., and Nemat-Nasser, S., "On Willems' Experimental Verification of the Critical Load in Beck's Problem," Jour. of Appl. Mech., Vol. 34 March 1967, pp. 243-245.
- 11) Augusti, G. Roorda, J., and Herrmann, G. Levinson, M. "Discussion," Jour. of Appl. Mech. Vol. 34, June 1967, pp. 523-524.
- 12) Shaker, F.J., "Effect of Axial Load on Mode Shapes and Frequencies of Beams," NASA TN-D-8109, Lewis Research Center, Cleveland, Ohio, 44135.