

## ارتعاشات جانبی آزاد تیر تحت فشار باد شده یک سرگیردار

مسعود خیام  
کارشناس ارشد کامپیوتر گزینیه

### چکیده

نخستین بسامد طبیعی<sup>۱</sup> ارتعاشات تیر باد شده<sup>۲</sup> یک سرگیردار با کمک دستگاه سه معادله سه مجهولی حرکت ارتعاشی تیر محاسبه شده است. درباره اثرات عوامل گوناگون بحث و نشان داده شده که با افزایش فشار داخلی، نخستین بسامد طبیعی نیز افزایش می یابد. این امر نمایانگر اثر سخت کننده<sup>۳</sup> فشار داخلی است. مساله مورد تجربه قرار گرفته، بر روی یک تیر آزمایش شد که نتیجه آن با تئوری انطباق خوبی دارد.

### مقدمه

در این نشست پروفسور فری اوتو (Frei Otto) پیش کسوت این رشته (۵) اظهار داشت که مطالعات نظری سازه های بادی یا چندان ساده انجام شده است که واقعی نمی باشند یا چنان پیچیده است که کاربرد عملی ندارند. او همچنین اشاره کرد:

"من آرزو مندم اهل نظر تا بالاترین بلندای ممکن پرواز کنند اما آنان می بایست پروازهای خود را با چنان زبانی بیان کنند که اهل عمل زمینی خانواده ما قادر به درک آن باشند" (۶).

در سال ۱۹۶۹، لوچینگ هوا (Lo Ching Hua) خطای ماخذ (۳) را نشان داده، راه حلی بر مبنای روش اجزای محدود برای تعیین بسامد طبیعی صفحات باد شده که به شکل بال دلتا می باشند، ارائه کرد، او اثرات گوشه های گرد را نیز در محاسبات خود منظور داشت (۷).

ارتعاشات اجزاء باد شده از اهم مسائلی است که در طراحی سازه های بادی، از جمله سدهای قابل باد شدن یا

برای صفحات باد شده، یک تئوری خطی توسط مک کومب (Mc Comb) ارائه شده است (۱).

در سال ۱۹۶۳، استوف ماچر (Stoffmacher) یک تئوری غیرخطی برای صفحات باد شده، که بطور دلخواه شکل گرفته اند، ارائه کرد (۲).

فوئرستر (Foerster) و دیگران در گزارش خود عامل بسیار ساده ای را بصورت زیر برای توان باربری برشی هوا ارائه کرده اند.

$$G = P$$

که در آن  $G$  ضریب برش و  $P$  فشار داخلی است و بر این مبنا تیرها و صفحات باد شده مورد مطالعه قرار گرفته است (۳).

در سال ۱۹۶۷، نَش (Nash) و هو (Ho) یک تئوری غیرخطی برای ارتعاشات آزاد پوسته های باد شده کم ضخامت به اولین نشست بین المللی سازه های بادی ارائه کردند (۴).

\* Natural Frequency

$N_1, N_2, \dots$  نیروهای عمودی  
 $V_{11}, V_{22}, \dots$  انرژی تغییر شکل نسبی عمودی برواحد عرض  
 $V_{pr}, \dots$  انرژی میان تیر  
 $V, \dots$  کل انرژی تغییر شکل نسبی کشسانی برواحد عرض  
 $T, \dots$  کل انرژی جنبشی تیر برواحد عرض

## تئوری

شکل (۱) شمای مبالغه آمیز تیر باد شده را نشان می دهد. اگر تغییر مکان رویه ها را بصورت چند جمله ای در نظر بگیریم (۸).

$$w = (A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4) \sin \omega t \quad (1)$$

با روش مشابه آنچه در مرجع ۹ آمده است می توان نوشت:

$$e_1 = \frac{f}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots \quad (2)$$

$$e_2 = -\frac{f}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots \quad (3)$$

که در آن  $e_1$  و  $e_2$  تغییر شکل های نسبی خمشی در رویه ها هستند که با خم شدن هریک از آنها حول میان تار خود پدید آمده اند.

برای واحد پهنا، انرژی تغییر شکل ارتجاعی  $V_1$  و  $V_2$  که مربوط به تغییر شکل های نسبی خمشی  $e_1$  و  $e_2$  می باشند بصورت زیر بیان می شوند.

$$V_1 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-f}^0 dz \int_0^a e_1^2 dx \quad (4)$$

$$V_2 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^f dz \int_0^a e_2^2 dx \quad (5)$$

از جایگزینی معادله های قبلی و ساده کردن آن، نتیجه می شود

$$V_1 = \frac{E f^3}{8(1-\nu^2)} \left[ 4A_1^2 a + 12A_2^2 a^3 + 28.8A_3^2 a^5 + 12A_1 A_2 a^2 + 16A_1 A_3 a^3 + 36A_2 A_3 a^4 \right] \sin^2 \omega t \quad (6)$$

$$V_2 = V_1 \quad \dots \quad (7)$$

اگر  $N_1$  و  $N_2$  نیروهای عمودی وارد بر رویه ها باشند خواهیم داشت:

$$N_1 = \int_{-f}^0 \sigma dz \quad \dots \quad (8)$$

$$N_2 = \int_0^f \sigma dz \quad \dots \quad (9)$$

کوسنهای فضائی باید در نظر گرفته شوند. هیچیک از محاسبات یاد شده بالا، بسامد طبیعی تیر باد شده یک سرگردار را که ساده ترین جزء سازه های بادی محسوب می شود، بطور رضایت بخش بیان نکرده است. این مساله از اهمیت بسیار عمده علمی و فنی برخوردار می باشد و از اینرو موضوع این پژوهش قرار گرفته است.

## فرضها

- ۱- طول تیر بمراتب بزرگتر از دیگر ابعاد آن است.
- ۲- تمام تغییر مکان ها کوچکند.
- ۳- رویه های تیر صفحات کشسان، ایزوتروپیک همگن و نازک می باشد.
- ۴- میان تیر از هوا با فشار و دمای ثابت پر شده است.
- ۵- تغییر شکل رویه ها موازی یکدیگرند.
- ۶- هیچ نوع اتصال برشی بین صفحات و پارچه روپوش نیست.
- ۷- تغییر شکل تیر را می توان بصورت چند جمله ای نوشت.
- ۸- جرم هوا و پارچه روپوش در مقایسه با جرم رویه ها قابل چشم پوشی است.
- ۹- ارتعاشات بدون هرنوع میراگر انجام شده و نیروئی جز جاذبه وجود ندارد.

## نمادها

- $a, \dots$  طول تیر باد شده  
 $c, \dots$  عمق تیر  
 $f, \dots$  ضخامت رویه ها  
 $E, \dots$  ضریب کشسانی رویه ها  
 $\nu, \dots$  نسبت پواسان برای رویه ها  
 $\rho, \dots$  جرم مخصوص تیر باد شده  
 $P, \dots$  فشار داخلی  
 $W, \dots, Z$  تغییر مکان تیر در جهت  
 $A_1, A_2, A_3, \dots$  ثابت ها  
 $\omega, \dots$  بسامد ارتعاشات  
 $t, \dots$  زمان  
 $\sigma, \dots$  تنش عمودی در رویه ها  
 $e_1, e_2, \dots$  تغییر شکل نسبی خمشی در رویه ها  
 $V_1, V_2, \dots$  انرژی تغییر شکل نسبی خمشی برواحد عرض

و با بهره‌گیری از معادله (۱)

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left[ \frac{a^5}{5} A_1^2 + \frac{a^7}{7} A_2^2 + \frac{a^9}{9} A_3^2 + \frac{a^6}{3} A_1 A_2 + \frac{2a^7}{7} A_1 A_3 + \frac{a^8}{4} A_2 A_3 \right] \cos^2 \omega t \quad (22)$$

با فرض آنکه دستگاه در زیر نیروی جاذبه، مانده‌گار (Conservative) باشد می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} (V_{\max} - T_{\max}) = 0 \quad n = 1, 2, 3 \quad (23)$$

جایگزینی معادله‌های (۲۰) و (۲۲) در بسط معادله (۲۳) به دستگاه معادله‌های زیر منجر خواهد شد.

$$(X1 - \alpha \frac{2a^5}{5}) A_1 + (X2 - \alpha \frac{a^6}{3}) A_2 + (X3 - \alpha \frac{2a^7}{7}) A_3 = 0 \quad (24)$$

$$(Y1 - \alpha \frac{a^6}{3}) A_1 + (Y2 - \alpha \frac{2a^7}{7}) A_2 + (Y3 - \alpha \frac{a^8}{4}) A_3 = 0 \quad (25)$$

$$(Z1 - \alpha \frac{2a^7}{7}) A_1 + (Z2 - \alpha \frac{a^8}{4}) A_2 + (Z3 - \alpha \frac{2a^9}{9}) A_3 = 0 \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \quad \dots \quad (27)$$

$$X1 = Pc \frac{4a^3}{3} + 8a\beta \quad \dots \quad (28)$$

$$X2 = Pc \frac{3a^4}{2} + 12a^2\beta \quad (29)$$

$$X3 = 16a^3\beta \quad \dots \quad (30)$$

$$Y1 = Pc \frac{3a^4}{2} + 12a^2\beta \quad (31)$$

$$Y2 = 24a^3\beta \quad \dots \quad (32)$$

$$Y3 = 36a^4\beta \quad \dots \quad (33)$$

$$Z1 = 16a^3\beta \quad \dots \quad (34)$$

$$Z2 = 36a^4\beta \quad \dots \quad (35)$$

$$Z3 = 57.6a^5\beta \quad \dots \quad (36)$$

$$\beta = \frac{Ef^3}{4} * \frac{2-v^2}{1-v^2} \quad \dots \quad (37)$$

که در آن  $\sigma$  تنش عمودی رویه‌هاست که چنین نوشته می‌شود:

$$\sigma = -Ez \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10)$$

انرژی تغییر شکل نسبی ناشی از نیروی عمودی چنین است.

$$V11 = \frac{1}{2} \int_0^a N1 e1 dx \quad (11)$$

$$V22 = \frac{1}{2} \int_0^a N2 e2 dx \quad (12)$$

با بهره‌گیری از معادله‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۸)، (۹) و (۱۰) معادله‌های زیر بدست خواهد آمد:

$$V11 = \frac{Ef^3}{8} \left[ 4A_1^2 a + 12A_2^2 a^3 + 28.8A_3^2 a^5 + 12A_1 A_2 a^2 + 16A_1 A_3 a^3 + 36A_2 A_3 a^4 \right] \sin^2 \omega t \quad (13)$$

$$V22 = V11 \quad (14)$$

انرژی فشاری را می‌توان چنین بیان کرد:

$$V_{pr} = Pc(l - a) \quad (15)$$

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx \quad (16)$$

اگر معادله (۱) را در معادله (۱۶) جایگزین کرده، چهارجمله از بسط تیلور را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$l = \int_0^a \{ 1 + (2A_1^2 \sin^2 \omega t) x^2 + (6A_1 A_2 \sin^2 \omega t) x^3 \} dx \quad \dots \quad (17)$$

$$V_{pr} = Pc \left[ \frac{2}{3} a^3 A_1^2 + \frac{3}{2} a^4 A_1 A_2 \right] \sin^2 \omega t \quad (18)$$

کل انرژی ارتجاعی تیر یک سرگیردار چنین است:

$$V = V_{pr} + V1 + V2 + V11 + V22 \quad (19)$$

$$V = Pc \left[ \frac{2}{3} a^3 A_1^2 + \frac{3}{2} a^4 A_1 A_2 \right] \sin^2 \omega t + \frac{Ef^3}{4}$$

$$* \frac{2-v^2}{1-v^2} \left[ 4A_1^2 a + 12A_2^2 a^3 + 28.8A_3^2 a^5 + (20)$$

$$12A_1 A_2 a^2 + 16A_1 A_3 a^3 + 36A_2 A_3 a^4 \right] \sin^2 \omega t$$

با چشم پوشی از جرم هوا، انرژی جنبشی بصورت زیر نوشته خواهد شد:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx \quad (21)$$

رفع اسیام و حل واقعی معادله‌های (۲۴)، (۲۵)، و (۲۶) ایجاب می‌کند که در مینان ضرایب صفر باشد.

$$\begin{cases} X1 - \frac{2a^5}{5} \alpha & X2 - \frac{a^6}{3} \alpha & X3 - \frac{2a^7}{7} \alpha \\ Y1 - \frac{a^6}{3} \alpha & Y2 - \frac{2a^7}{7} \alpha & Y3 - \frac{a^8}{4} \alpha \\ Z1 - \frac{2a^7}{7} \alpha & Z2 - \frac{a^8}{4} \alpha & Z3 - \frac{2a^9}{9} \alpha \end{cases} = 0 \quad (28)$$

با استفاده از معادله (۳۸) بسامد طبیعی تیر بکمک کامپیوتر ICL و زبان ترجمه ALGO1 68-R در شرایط مختلف محاسبه شده و نتیجه این محاسبات در شکل (۴) نمایش داده شده است.

آزمایش

اشکال (۲) و (۳) به ترتیب تیر باد شده و دستگاه‌های آزمایش را نمایش می‌دهد.

رویه‌ها از صفحات نازک فولادی بوده، پارچه روپوش آن از جنس Plain Woven Nylon Fabric است. به روپوش در طول لبه چین خوردگی داده شده تا تنش برشی از رویه‌ها به گوشه‌های گرد منتقل نشود. در دامنه تغییرات فشار، از صفر تا ۳۴/۵ کیلو نیوتن بر متر مربع، نخستین بسامد طبیعی تیر اندازه‌گیری شد و نتیجه آن در شکل (۴) نمایش داده شده است. قطعه مورد آزمایش (تیر باد شده یک سر گیردار) توسط مؤلف و یادست ساخته شد و بنابراین برخی خطاهای آزمایش قابل انتظار است.

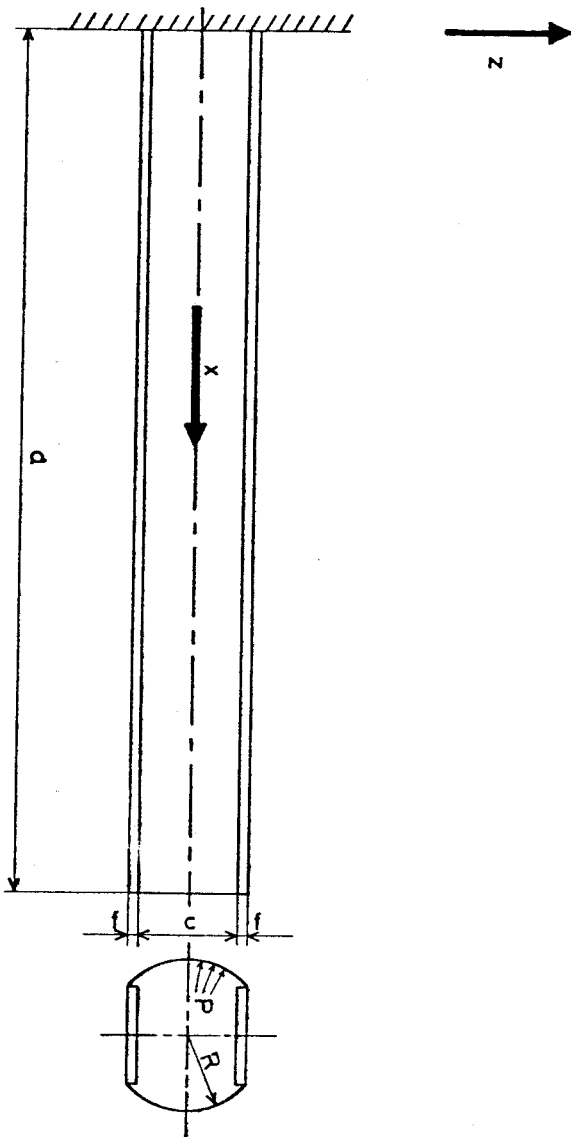
### بحث و نتیجه‌گیری

معلوم شد که نخستین بسامد طبیعی تیر باد شده، تابعی از سختی، جرم مخصوص و طول رویه‌هاست. می‌توان دید که برای  $P/P_{max} > 0.2$  نتایج تجربی کمتر از پیش‌بینی‌های نظری است. علل عمده این اختلاف بعلت: الف - فرضیات ساده‌کننده در تحلیل نظری. ب - محدودیت‌های روش انرژی در حل مسائل دینامیک ساختمان می‌باشد.

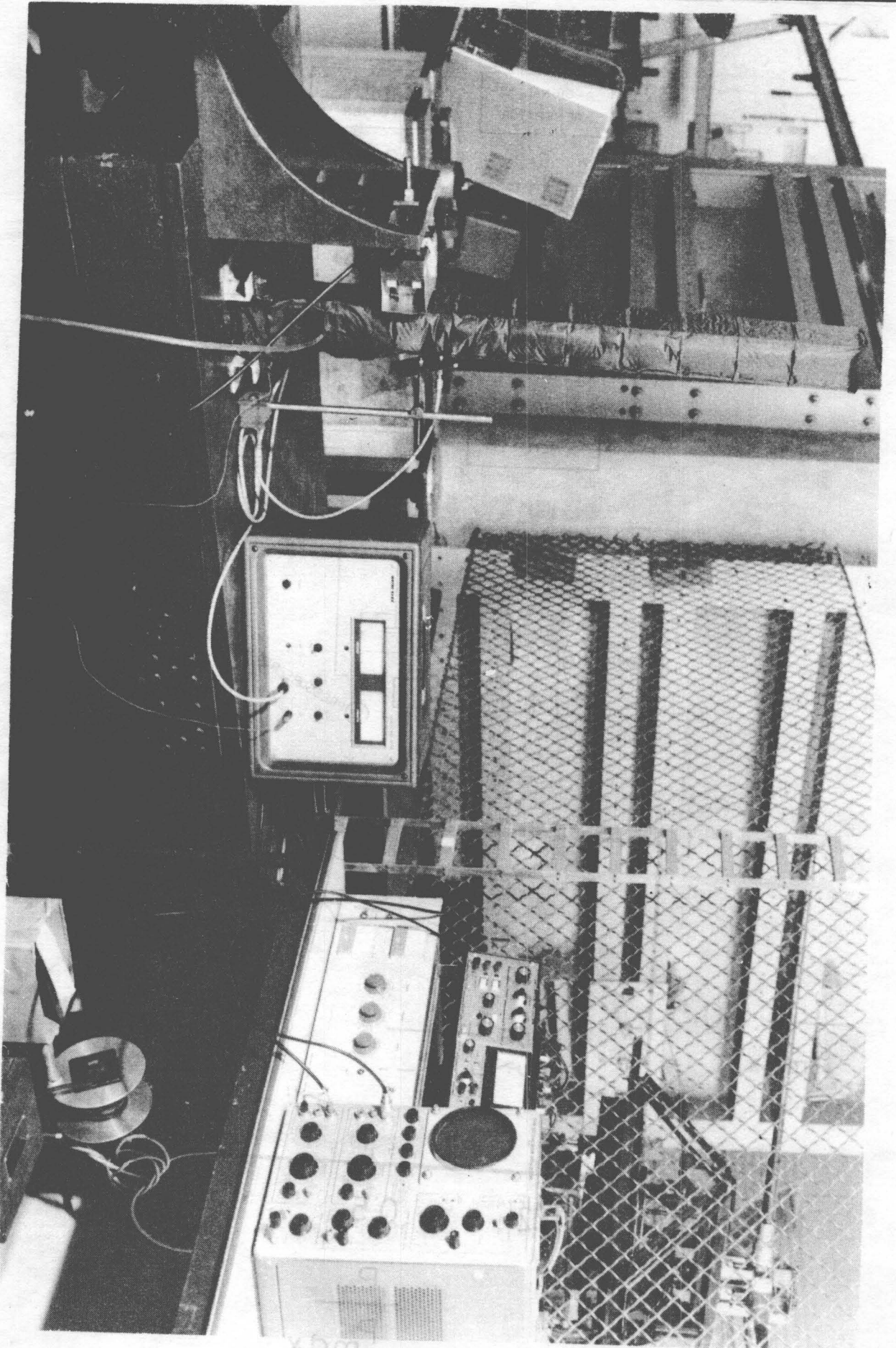
قبلا" این مسئله مورد توجه قرار گرفته و چنین گفته شده است که:

" این کمبود عمومی روش انرژی است و معمولاً بعنوان یک قاعده سرانگشتی، می‌توان تعداد بسامدها و اشکال ارتعاشات را (که از نظر فیزیکی واقعی باشند) کوچکتر یا مساوی نصف تعداد ضرایب مجهول در تابع چند جمله‌ای مفروض تغییر شکل تیر دانست" (۹).

دیگر آنکه بمنظور دستیابی به پیش‌بینی نظری دقیق‌تر باید جمله‌های بیشتری از بسط تایلور انرژی میانی را بکار گرفت.



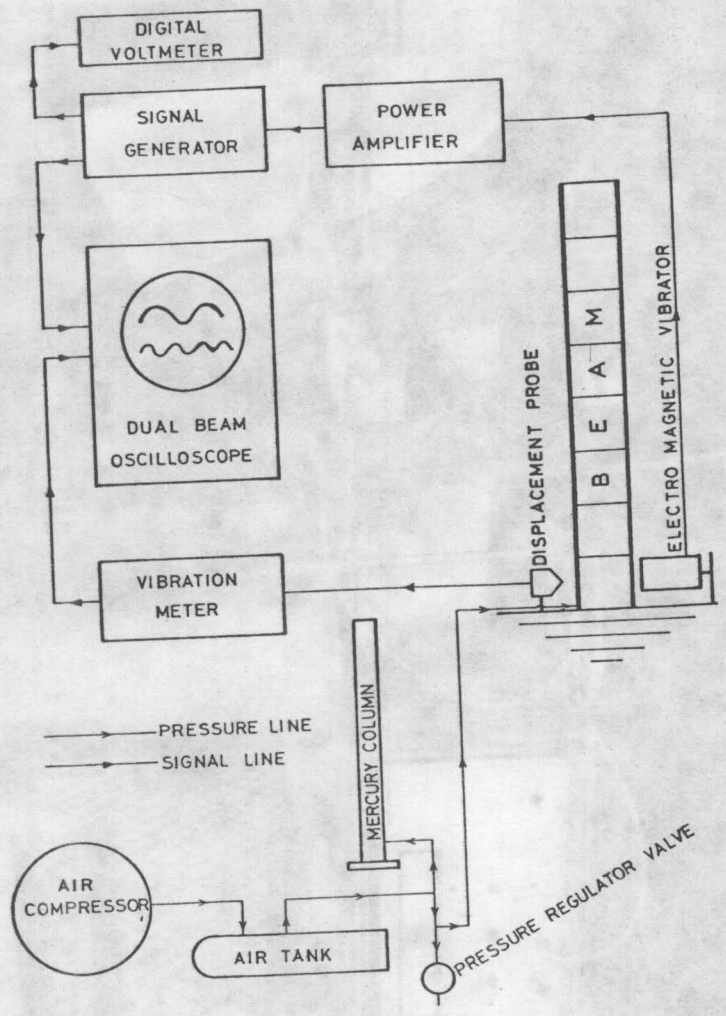
شکل (۱) - تیر تحت فشار باد شده



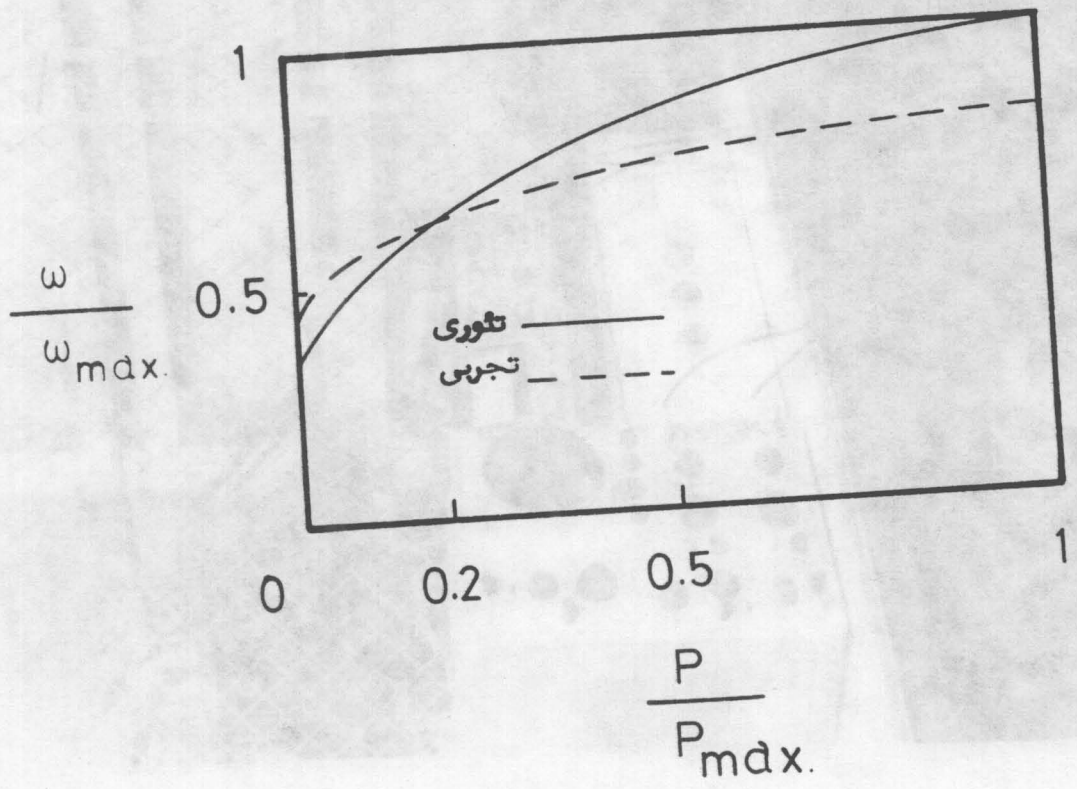
شکل (۲) - دست‌گام‌های آزمایش

مخ

مجله علمی و فنی - شماره ۱۱ - ۱۳۸۵



شکل (۳) - شیوه آزمایش



شکل (۴) - بسامد طبیعی

## فهرست منابع

1. McComb, H.G. A Linear Theory for Inflatable Plates of Arbitrary Shape. NASA TN D-930. October 1961. 55 Pages.
2. Stoffmacher, G. A Non-linear Theory for Arbitrary Shaped Inflatable Plates of Uniform Initial Thickness- Part 1. Report No.SM-42807, Douglas Aircraft Co. In Missile and Space Systems Division, Santa Monica, California. December 1963. 42 Pages.
3. Foerster, A.F., et al. Analytical and Experimental Investigation of Coated Metal Fabric Expandable Structures for Aerospace Applications., Flight Dynamics Laboratory Research and Technology Division, Air Force Command, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. Technical Documentary Report ASD-TDR-63-542. November 1963.
4. Nash, W.A. and Ho, F.H. Non-linear Free Transverse Vibrations of Inflatable Shallow Shells. proceedings of the first International Colloquium on Pneumatic Structures, International Association for Shell Structures. May 11 and 12, 1967. University of Stuttgart, Germany. pp. 108-117.
5. Frei Otto, et al, Tensile Structures, Vol. 1 and 2. M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1967.
6. Otto, F. Closing Remarks, proceedings of the first International Colloquium on Pneumatic Structures, IASS May 11 and 12, 1967. University of Stuttgart, Germany. pp. 179.
7. Lo-Ching Hua. Natural Frequency of Vibration of a Triangular Inflatable Wing Model. Ph.D. Dissertation, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, 1969.
8. Leissa, A.W. Vibrations of Plates. NASA SP-160. 1969 . pp. 44.
9. Rubayi, N.A. and Charoenree, S. Natural Frequencies of Vibration of Cantilever Sandwich Beams. Int. Journal Computers and Structures. pp. 345-353. Vol. 6 1976.