تعمیم تبدیل ستاره به‌مثلث

دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی

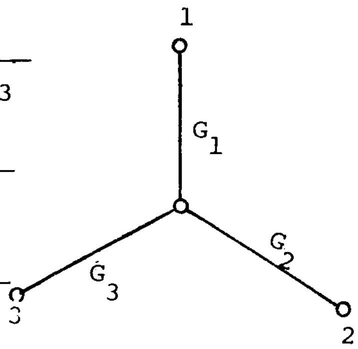
دانشیار دانشکده فنی ـ دانشگاه تهران

چنانکه‌می‌دانیم اگرمقاومتهای R_1، R_2، R_3 با رسانائیهای G_1 و G_2 و G_3 میان سرهای ۱ و ۲ و ۳ مانند شکل ۱ ـ الف ستاره‌وار بسته شده باشند می‌توان به‌جای آنها اتصال مثلثی شکل ۱ ـ ب را نشاند که درآن رسانائیهای وصل‌شده G_{12} و G_{23} و G_{31} میان سرهای ۱ و ۲ و ۳ از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند که به‌تبدیل ستاره به مثلث معروف است .

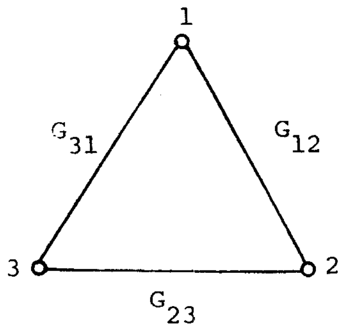
$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1+G_2+G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1+G_2+G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1+G_2+G_3}$$



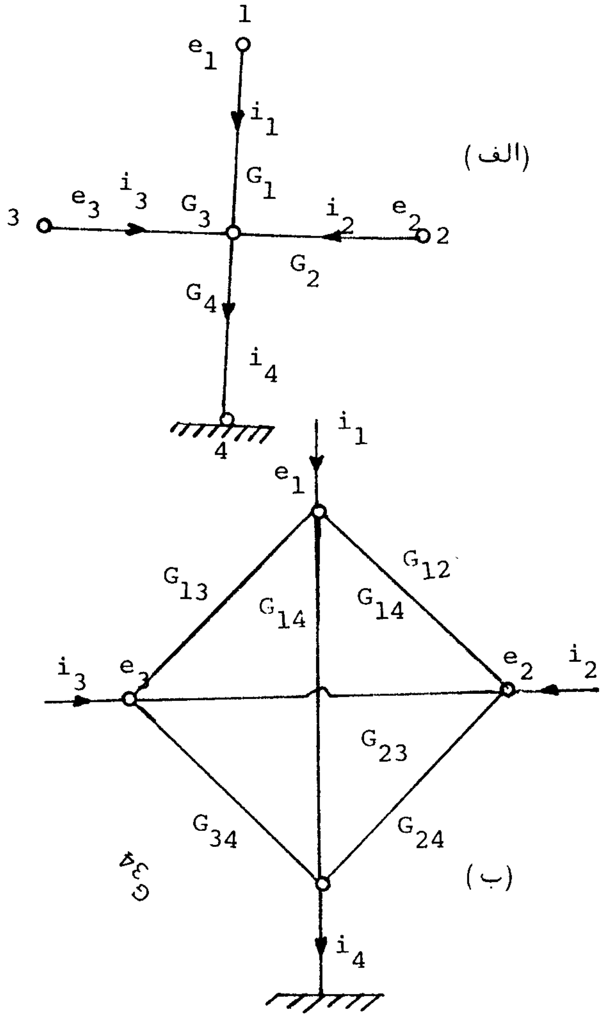
(الــف)



(ب)

شــــــکل (۱)

اکنون میخواهیم تبدیل بالا را به‌اتصالهای‌ستاره‌ای بیش از سه سر، مثلا" به‌اتصال ستاره‌ای ۴ـ سر، مانـــــــد شکل ۲ ـ الف ویا درحالت‌کلی‌به‌اتصال‌ستاره‌ای n ـ سرمانند شکل ۳ الف تعمیم داده‌نشان‌دهیم‌که می‌توان چهارضلعی‌کامل شکل ۲ ـ ب ، و درحالت کلی n‌ـضلعی کامل شکل ۳ ـ ب را بترتیب به‌عنوان شبکه‌های هم‌ارز شبکـــه‌هـــای ستـــاره‌ای شکلهای۲ـ الف‌و۳ الف‌جایگزین‌کرد . به‌سخن‌دیگر می‌خواهیم نشان‌دهیم‌که اگر یک‌شبکه ۱ + n‌ـسر ستاره‌وار بسته شده‌باشد می‌توان همواره گره مرکز اتصال ستاره را حذف و شبکه فوق را با یک‌شبکه n‌ـسر که‌سرهای آن بطورکامل‌به‌هم بسته شده است جایگزین‌کردبی‌آنکه‌روابط میان‌ولتاژها‌وجریانهای‌سرتغییرکند . برای‌نشان دادن این مطلب‌ابتدا با اتصال ستاره‌ای چهارسر شکل ۲ ـ الف و شبکهٔ هم‌ارز آن شکل ۲ ـ ب آغاز می‌کنیم .



شــــــکل (۲)

اگر e_1 و e_2 و e_3 ولتاژهای سرهای ۱ و ۲ و ۳ نسبت به‌سر ۴ باشند معادله‌های‌اتصال ستاره به‌صورت ماتریسی چنیـــن می‌شـــود :

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{i} \qquad (1)$$

و یا به‌صورت گسترده‌ء آن :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_4 & R_4 & R_4 \\ R_4 & R_2+R_4 & R_4 \\ R_4 & R_4 & R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

که در آن R_1 و R_2 و R_3 و R_4 مقاومت شاخه‌های اتصال ستاره هستند. فرض می‌کنیم بتوان یک شبکه چهارسر (بدون گره مرکزی) که گرههای آن بطور کامل طبق شکل ۲ ــ ب به‌هم بسته‌شده باشد، چنان پیدا کرد که هم‌ارز شبکه‌ء اتصال ستاره‌ای شکل ۲ ــ الف باشد. در این صورت برای شبکه شکل ۲ ــ ب معادله‌های ماتریسی زیر را داریم :

$$\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{G}\underset{\sim}{e} \quad (۳)$$

یا به صورت گسترده‌ء آن :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{12}+G_{13}+G_{14} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{12} & G_{12}+G_{23}+G_{24} & -G_{23} \\ -G_{13} & -G_{23} & G_{13}+G_{23}+G_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (۴)$$

اگر بنا باشد که شبکه‌شکلهای ۲ ــ الف و ۲ ــ ب هم‌ارز یکدیگر باشند یعنی روابط میان ولتاژها و جریانهای سر یکسان باشد می‌بایست رابطه‌ء زیر میان ماتریسهای $\underset{\sim}{G}$ و $\underset{\sim}{R}$ برقرار گردد.

$$\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{R}^{-1} \quad (۵)$$

با توجه به شکل متقارن ماتریس $\underset{\sim}{R}$ در رابطه‌ء (۲) بسادگی می‌توان نشان داد که عکس ماتریس $\underset{\sim}{R}$ چنین است :

$$\underset{\sim}{R}^{-1} = \frac{1}{|\underset{\sim}{R}|} \begin{bmatrix} R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4 & -R_3R_4 & -R_2R_4 \\ -R_3R_4 & R_1R_3+R_1R_4+R_3R_4 & -R_1R_4 \\ -R_2R_4 & -R_1R_4 & R_1R_2+R_1R_4+R_2R_4 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

که در آن :

$$|\underset{\sim}{R}| = R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2$$

از برابر گذاشتن ماتریسهای $\underset{\sim}{G}$ و $\underset{\sim}{R}^{-1}$ در رابطه‌های (۴) و (۶) رسانائیهای شبکه‌ء چهارضلعی را برحسب رسانائیهای شبکه‌ء اتصال ستاره زیر به‌دست می‌آوریم :

$$G_{12} = \frac{R_3R_4}{|\underset{\sim}{R}|} = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

$$G_{13} = \frac{R_2R_4}{|\underset{\sim}{R}|} = \frac{G_2G_4}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

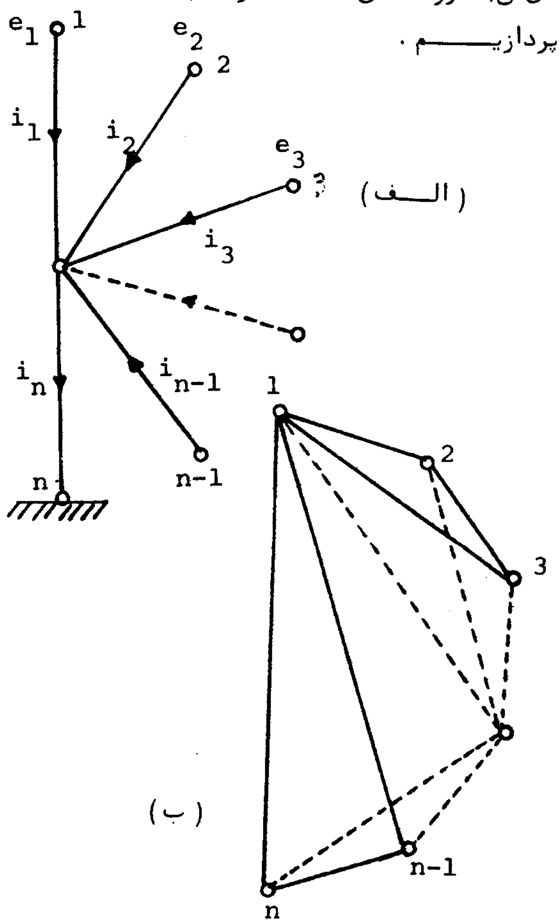
$$G_{23} = \frac{R_1R_4}{|\underset{\sim}{R}|} = \frac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

$$G_{14} = \frac{R_2R_3}{|\underset{\sim}{R}|} = \frac{G_1G_4}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

$$G_{24} = \frac{R_1R_3}{|\underset{\sim}{R}|} = \frac{G_2G_4}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

$$G_{34} = \frac{R_1R_2}{|\underset{\sim}{R}|} = \frac{G_3G_4}{G_1+G_2+G_3+G_4}$$

اکنون که با نحوه عمل و هم‌ارز کردن شبکه ستاره‌ای ۴ ــ سر و شبکه‌چهارضلعی کامل آشنائی پیدا کردیم به‌استخراج روابط مربوط به‌شبکه‌ستاره‌ای n ــ سر و شبکه n ــ ضلعی کامل معادل آن به‌صورت نشان داده‌شده در شکلهای ۳ الف و ۳ ــ ب ، می‌پردازیــــم .



شـــــــــکل (۳)

اگر e_1 و e_2 . . e_{n-1} ولتاژ سرهای ۱ و ۲ و . . . ، $n-1$ نسبت به سر n باشند معادله‌های اتصال ستاره در شکل ماتریسی چنین می‌شود:

$$\underset{\sim}{e} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{i}$$

یا به‌صورت گسترده‌ٔ آن:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+R_n & R_n & R_n & \cdots & R_n \\ R_n & R_2+R_n & R_n & \cdots & R_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_n & R_n & R_n & & R_{n-1}+R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

فرض می‌کنیم شبکه n ـ سر بدون گره مرکزی اتصال ستاره که سرهای آن بطور کامل مانند شکل ۳ ـ ب به‌هم بسته شده باشند را بتوان چنان پیدا کرد که هم‌ارز شبکهٔ اتصال ستاره‌ای شکل ۳ ـ الف باشد در این صورت برای شبکهٔ شکل ۳ ـ ب معادله‌های ماتریسی زیر را داریم:

$$\underset{\sim}{i} = \underset{\sim}{G}\,\underset{\sim}{e}$$

یا به‌صورت گسترده‌ٔ آن:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} G_{1j} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1,n-1} \\ -G_{12} & \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} G_{2j} & -G_{23} & \cdots & -G_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -G_{1,n-1} & -G_{2,n-1} & -G_{3,n-1} & \cdots & \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n-1}}^{n} G_{n-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۹)$$

بطوری که اثبات خواهیم کرد دترمینان ماتریس $\underset{\sim}{R}$ به‌صورت زیر است:

$$|\underset{\sim}{R}| = R_1R_2\cdots R_n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)$$

و از اینرو می‌توان نشان داد که عکس ماتریس $\underset{\sim}{R}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$R^{-1} = \frac{1}{\Sigma G}\begin{bmatrix} G_1(\Sigma G-G_1) & -G_1G_2 & \cdots & -G_1G_{n-1} \\ -G_1G_2 & G_2(\Sigma G-G_2) & & -G_2G_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -G_1G_{n-1} & -G_2G_{n-1} & & G_{n-1}(\Sigma G-G_{n-1}) \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

که در آن $G_j = \frac{1}{R_j}$ و $\Sigma G = G_1+G_2+\cdots\cdots+G_n$

از برابر گذاشتن ماتریسهای $\underset{\sim}{G}$ و $\underset{\sim}{R}^{-1}$ در رابطه‌های ۹ و ۱۰ رسانایی‌های شبکه n- ضلعی کامل را برحسب رسانایی‌های شبکه اتصال ستاره‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$G_{ij} = \frac{G_iG_j}{\Sigma G} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n \\ i\neq j \end{matrix} \qquad (۱۱)$$

و این همان تعمیم رابطه‌های (۷) است.

تبصره: باتوجه به‌نتایج بالا دربارهٔ شبکه‌های مقاومتی می‌توان به‌سادگی دریافت که این نتایج درمورد هر شبکه ستاره‌ای با شاخه‌هائی با امپدانس Z_k یا ادمیتانس Y_k که همان مشابه مقاومت R_k یا رسانایی G_k است نیز معتبر می‌باشد.

محاسبه دترمینان ماتریس $\underset{\sim}{R}$

می‌خواهیم نشان دهیم که دترمینان ماتریس $\underset{\sim}{R}$ به‌صورت زیر است:

$$R = \begin{vmatrix} R_1+R_n & R_n & \cdots\cdots & R_n \\ R_n & R_2+R_n & & \\ R_n & R_n & & R_{n-1}+R_n \end{vmatrix} = R_1R_2\cdots R_n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} R_j\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j}$$

برای اختصار

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \qquad \prod_{j=1}^{n} R_j = R_1R_2\cdots R_n$$

را بکاربرده‌ایم.

برای محاسبه دترمینان بالا از روش استقرا ریاضی استفاده می‌کنیم. برای $n=3$ و $n=4$ به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$\begin{vmatrix} R_1+R_3 & R_4 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{vmatrix} = R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3 = R_1R_2R_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\begin{vmatrix} R_1+R_4 & R_4 & R_4 \\ R_4 & R_2+R_4 & R_4 \\ R_4 & R_4 & R_3+R_4 \end{vmatrix} = R_1R_2R_3+R_1R_2R_4+R_1R_3R_4+R_2R_3R_4 = R_1R_2R_3R_4\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)$$

توجه کنید که اگر در دترمینان بالا مقـــدار R_j، $j=1,2,3,4$، برابرصفرباشددترمینان‌برابر $\frac{R_1R_2R_3R_4}{R_j}$ خواهدبود و درحالت کلی در ماتریس $\underset{\sim}{R}$ اگرهر R_j صفر باشد، دترمینان به‌صورت $\frac{\pi \underset{\sim}{R}}{R_j}$ نوشته می‌شود.

اکنون فرض‌می‌کنیم که رابطه دترمینانی بالا بـــرای $n = K$ برقرار است یعنی:

$$\begin{vmatrix} R_1+R_k & R_k & \cdots\cdots & R_k \\ R_k & R_2+R_k & \cdots\cdots & R_k \\ R_k & R_k & & R_{k-1}+R_k \end{vmatrix} = R_1R_2\cdots R_k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots+\frac{1}{R_k}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} R_j\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{R_j}$$

دراینجا نیز ملاحظه می‌کنیم که‌اگر R_j برابرصفرباشد مقدار دترمینان به‌صورت $\frac{\prod_{j=1}^{k} R_j}{R_j}$. درمی‌آیدازایـــن خاصیت بعدا "درمحاسبهٔ‌کوفاکتورهای‌ماتریس $\underset{\sim}{R}$ بهره‌خواهیم گرفت. اکنون اثبات می‌کنیم که رابطهٔ دترمینانی بالا بـرای $n = k + 1$ نیز برقرار است یعنی:

$$|R| = \begin{vmatrix} R_1+R_{k-1} & R_{k+1} & \cdots & R_{k+1} \\ R_{k+1} & R_2+R_{k+1} & \cdots & R_{k+1} \\ R_{k+1} & R_{k+1} & \cdots & R_k+R_{k+1} \end{vmatrix} = \left(\prod_{j=1}^{k+1} R_j\right)\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{R_j}$$

دترمینان فوق‌را برحسب ستون اول گسترش می‌دهیم و در محاسبه کوفاکتورهای آن نکات زیر را توجه می‌کنیم:

۱ – در Δ_{11} یعنی دترمینان‌حاصل از حذف سطـر و ستون‌اول ملاحظه‌می‌کنیم‌که طبق فرض استقرا مقدارآن چنین اســت $\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1}\left(\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{R_j}-\frac{1}{R_1}\right)$ که این جمله باید در (R_1+R_{k+1}) نیز ضرب شود.

۲ – درمحاسبه Δ_{21} ملاحظه می‌کنیم که عناصر ستون اول همه R_{k+1} است یعنی مقدار R_2 برابر صفر گذاشتـه شده است. (R_1 هم دراین رابطه ظاهر نمی‌شود پس مقدار آن برابر $\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1R_2}$ می‌باشد که بایـــد در ضریب $-R_{k+1}$ نیز ضرب شود.

۳ – درمحاسبه کوفاکتورهای Δ_{j1} $(j>2)$ ملاحظـه خواهیم می‌کنیم که‌همواره‌یک‌ستون‌که‌تمام عناصرآن R_{k+1} است ظاهر می‌شود که اگر آن ستون را به‌ستون اول انتقال دهیـم متوجه می‌شویم که R_j و R_1 ظاهر نمی‌شود و با درنظر گرفتـن علامتی‌که‌ازاین‌انتقال‌وعلامت‌جمله‌های‌فرد و زوج کوفاکتورهـا حاصل می‌شود دیده می‌شود که همه جمله‌ها بجز جملهٔ اول دارای علامت منفی خواهند بود.

بادرنظرگرفتن‌مطالب‌بالامقدار دترمینان $\underset{\sim}{R}$ که از گسترش آن برحسب ستون اول حاصل می‌شود به‌صورت زیـر نوشتـــه می‌شـــود:

$$|R| = (R_1+R_{k+1})\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1}\left(\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{R_j}-\frac{1}{R_1}\right) - R_{k+1}\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1R_2}$$

$$- R_{k+1}\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1R_3}\cdots\cdots - R_{k+1}\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1R_k}$$

$$= (R_1+R_{k+1})\frac{\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1}\left(\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{R_j}-\frac{1}{R_1}\right) - \frac{R_{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} R_j}{R_1}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{R_j}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_{k+1}}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{k+1} R_j \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{R_j}$$