روش تشبیهی جدید برای مطالعه هدایت حرارت در مختصات دوبعدی

نوشته :

زین‌العابدین نجات (Ph. D.)

استادیار

و

محمدرضا هوشنگی

دانشجوی دوره فوق‌لیسانس

آزمایشگاه انتقال حرارت و جرم ـ دانشکده فنی

خلاصه مقاله

برای نشان دادن میدان درجه حرارت برای حالت هدایت حرارت درمختصات دوبعدی و دراجسام جامد از یک مدل الکتریکی تشکیل شده از مقاومت‌های الکتریکی استفاده می‌شود . بکمک این شبکهٔ مقاومت‌ها معادله فوریه که بصورت معادله دیفرانسیل نسبی نوشته شده به‌یک‌معادله تفاضل محدودتبدیل میگردد . محل تلاقی مقاومت‌ها را به فیش هائی که در روی‌صفحه مقاومت‌ها نصب شده‌اند اتصال‌میدهیم . اشکال مختلف هندسی‌را که مقاطع اجسام جامد را تشکیل‌میدهند می‌توان با اتصالی بین این فیش ها بدست آورد . یک‌جریان برق‌دائم میدان الکتریکی مشابه میدان حرارتی‌را در داخل این سطح مقطع تولید خواهد کرد .

آزمایش‌های انجام شده برروی سطح مقطع یک پره چهارگوش و یک دودکش در این گزارش شرح داده شده است . مزیت این روش به روش‌های حمام الکترولیتی و کاغذ هادی بیان شده است . برای اجسامیکه ضریب هدایت حرارت آنها در دوجهت محورهای مختصات باهم مساوی نیستند می‌توان از این مدل استفاده نمود . این روش قابل تعمیم به‌حالات هدایت حرارت ناپایدار نیز میباشد .

وسیله آزمایشگاهی که در زیر شرح آن توأم با آزمایش های انجام شده گزارش می‌شود درآزمایشگاه انتقال حرارت و جرم دانشکده طرح وساخته شده است . منظور ازاین آزمایش ها مطالعه هدایت حرارت دو بعدی در اجسام جامد میباشد . هدایت حرارت دو بعدی در وسایل مهندسی حائز اهمیت فراوانی است . بعنوان مثال ، برای خنک کردن پره‌های توربین گاز ازسیالی که در مجرای داخل پره درحرکت استاستفاده می‌نمایند . این عمل باعث ایجاد یک میدان درجه‌حرارت‌دوبعدی درمقطع پره خواهد شد ، تغییرات درجه حرارت درپره‌هائی که جهت ازدیاد سطح تبادل حرارت درمبدل‌های حرارتی بکار میروند نیز یک میدان دو بعدی است . مثالهای دیگر دراین زمینه را میتوان میدان حرارتی تولید شده درحول یک کابل برق یالوله مدفون شده درخاك ویا همچنین در داخل عایق کابلهای برق چند سیمه را متذکر شد .

اگر فرض نمائیم که جسم موردنظر دارای ضریب هدایت حرارت ثابتی است و خود جسم تولید یا جذب حرارت نکند ، معادل فوریه برای تغییرات درجه حرارت درمختصات دو بعدی را میتوان بصورت‌زیر نوشت :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \qquad (۱)$$

$$\text{مفروضات} \begin{cases} k_x = k_y = k \\ \pm H^{\circ\prime\prime\prime} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

دراین معادله t عبارت از درجه حرارت جسم است که تابعی ازدوبعد مختصاتی x و y میباشد. با حل این معادله درجه حرارت جسم درمختصات دو بعدی بدست خواهد آمد .

حل عمومی معادلـه (۱) با استفاده ازطریق جدا کـردن متغیرها[1] درکتابهای انتقال حرارت ذکر گردیده است ، **(۱)** و **(۲)**[2] . این حل بصورت زیر است :

$$t = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) \qquad (۲)$$

A و B و C و D و λ مقادیر ثابتی هستند که باید با استفاده ازشرایط مرزی بدست آیند .

برای اشکال منظم هندسی و تحت شرایط خاصی‌میتوان‌مقادیر ثابت مذکور دربالا را محاسبه کرد .

---

۱ —Seperation of Variables.

۲ — شماره‌های داخل پارانتز شماره نشریات مندرج درلیست منابع مراجعه را نشان میدهند .

حالاتی پیش میآید که با استفاده از شرایط مرزی تعیین مقادیر ثابت ازطریق ریاضی مشکل است . لذا رابطه‌ای که تغییرات درجه حرارت را بیان نماید بسادگی بدست نخواهد آمد . ناگزیر از روش های دیگری برای‌مطالعه میدان‌حرارت بایداستفاده نمود . این روش ها عبارتنداز : روش های تشبیهی وروش های‌عددی .

روش تشبیهی دراین مقاله مورد بحث ما قرار خواهد گرفت . از شباهتی که بین میدانهای‌حرارتی و الکتریکی وجود دارد استفاده‌های فراوانی در زمینه مطالعه هدایت و تشعشع حرارت بعمل میآید . قانون کمی فوریه را برای محاسبه مقدار حرارت منتقل شده درهدایت را بصورت زیر میتوان نوشت :

$$Q^\circ = k.A.\ \frac{t_1 - t_2}{x_2 - x_1} \qquad (۳)$$

دراین معادله Q° مقدار حرارت منتقل شده درواحد زمان، k ضریب هدایت حرارت و A سطح عبورحرارت است . مقاومت حرارتی R_t را بصورت زیر از رابطه (۳) میتوان تعریف کرد :

$$Q^\circ = \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{x_2 - x_1}{k.A}\right)} = \frac{t_1 - t_2}{R_t}$$

$$R_t = \frac{x_2 - x_1}{k.A} \qquad (٤)$$

با مقایسه رابطه بالا با قانون اهم درالکتریسیته ، $I = \frac{V}{R}$ که درآن V پتانسیل ، I شدت جریان و R مقاومت الکتریکی است حاصل میشود که شباهتی بین‌میدانهای‌الکتریکی وحرارتی وجود دارد . لذا میتوان از مدل های الکتریکی که دارای شکل هندسی مشابه مدل حرارتی‌هستند استفاده نمود . مقدار حرارت‌منتقل شده در دوجهت مختصاتی x و y از معادله کمی فوریه یعنی معادله (۳) بدست میآید که دارای شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} Q^\circ_x = -k.A_x.\ \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\Delta x}{R_{tx}} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \\ Q^\circ_y = -k.A_y.\ \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\Delta y}{R_{ty}} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \end{cases} \qquad (٥)$$

دراین روابط مشتقات نسبی درجه حرارت نسبت به‌جهات مختصاتی وارد شده‌است . این روابط شبیه روابط نظیر درهدایت الکتریسته هستند که بصورت زیر نوشته میشوند :

$$\begin{cases} I_x = -\frac{\Delta x}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \\ I_y = -\frac{\Delta y}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

حال اگر فواصل طولی Δx و Δy را با هم مساوی قرار دهیم و سطوح عبور حرارت در دوجهت مختصات را نیز مساوی فرض نمائیم و با فرضی که قبلاً کرده بودیم که k ضریب هدایت حرارت دارای مقدار ثابتی است ، خواهیم داشت :

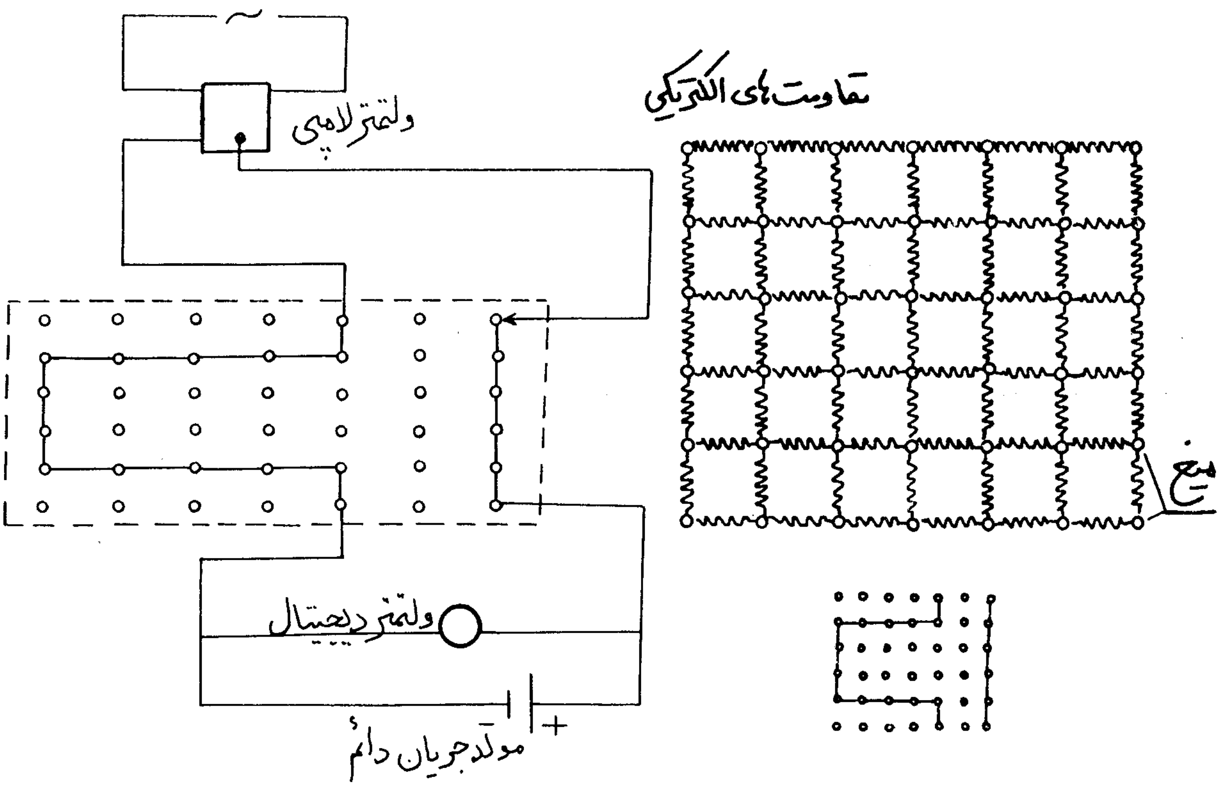
$$\Delta_x = \Delta_y = l$$

$$A_x = A_y = A$$

$$k_x = k_y = k$$

و لذا $R_{tx} = R_{ty} = R_t$ است .

مدل تشبیهی الکتریکی که درآزمایشگاه انتقال حرارت و جرم ساخته شده است عبارت از یک شبکه از مقاومت‌های الکتریکی میباشد که در شکل (۱ - الف) نشان داده شده است . مقاومت‌های الکتریکی درانتهای خود به میخ های هادی الکتریکی لحیم شده‌اند .



ب - وسایل اندازه گیری

الف - مدل الکتریکی

شکل ۱ - شمای مدل تشبیهی الکتریکی برای هدایت حرارت درمختصات دوبعدی

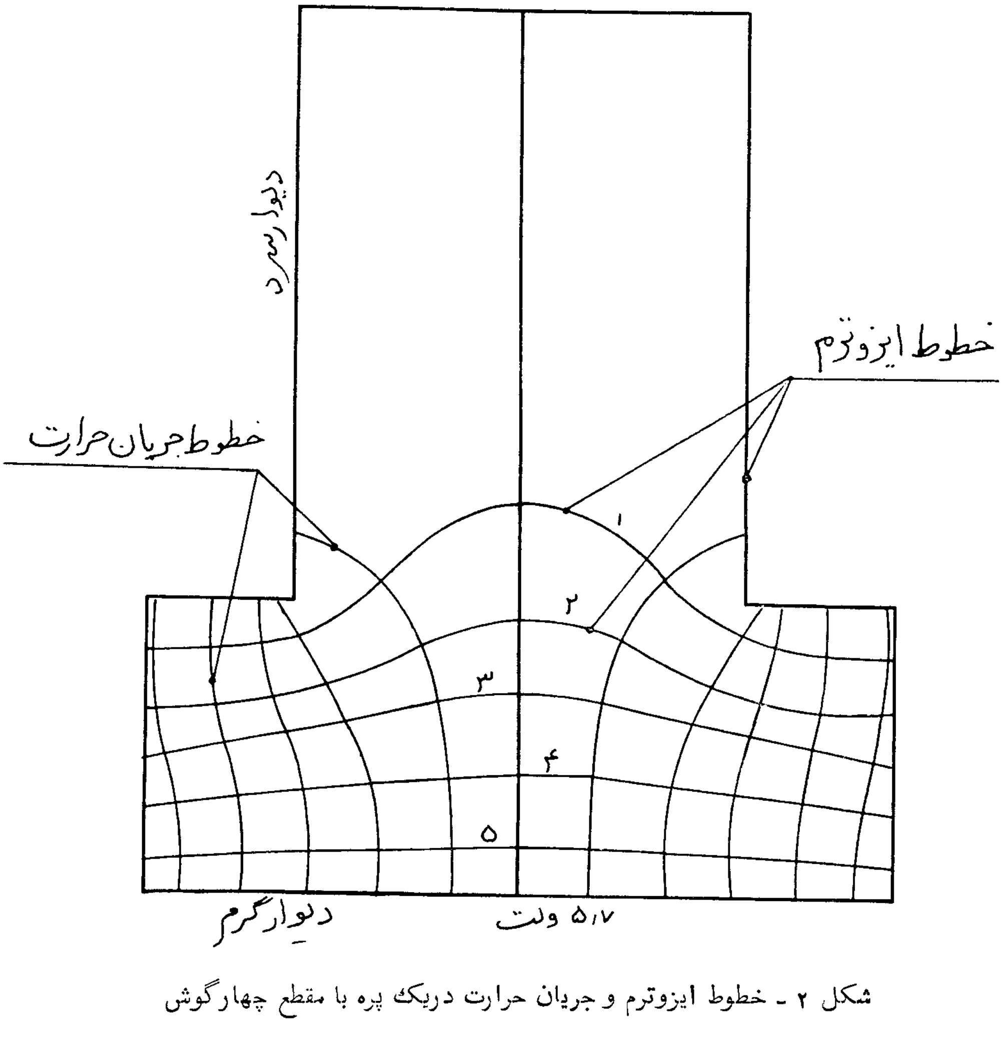
فاصله این میخ ها ازهم $l = ۱۰$ سانتیمتراست. مقاومت‌های الکتریکی ازسیم مقاومت معمولی درآزمایشگاه پیچیده شده‌اند و مقاومت هرکدام $R = ۸$ اهم است . میخ های هادی روی صفحه‌ای

عایق نصب شده‌اند که از زیر بوسیله سیم به فیش های برق (قسمت پائین مدل) وصل شده‌اند . حال میتوان روابط (٥) را برای این مدل مخصوص بشکل زیر نوشت :

$$Q^\circ \backsim I_x = -\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{١٠}{٨}\ \frac{\partial e}{\partial x} \qquad (٦)$$

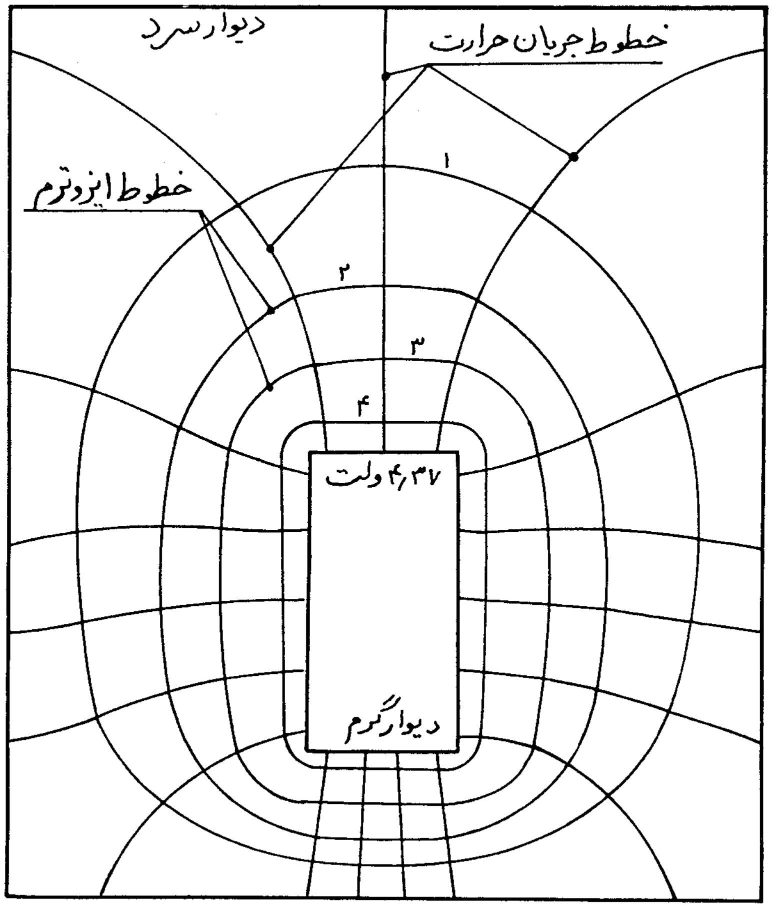
$$Q^\circ \backsim I_y = -\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial e}{\partial x} = -\frac{١٠}{٨}\ \frac{\partial e}{\partial y}$$

شکل جسم موردنظر برای مطالعه را بسادگی میتوان با اتصالی بین فیش ها تهیه کرد . درشکل (١ ـ ب) یک پره با مقطع چهارگوش نشان داده شده است . دستگاه مولد الکتریسته دراین آزمایش یک دستگاه مولد جریان دائم است که اختلاف پتانسیل تا ٦ ویا تا ١٢ ولت را تولید میکند . قطب مثبت جریان برق به قسمت گرم پره و قطب منفی به قسمت سرد آن متصل میگردد . بدین ترتیب اختلاف پتانسیل نظیر اختلاف درجه حرارت بین سردو گرم حاصل میشود . یک ولتمتر دقیق اختلاف پتانسیل بین قطب های مثبت



شکل ٢ ـ خطوط ایزوترم و جریان حرارت دریک پره با مقطع چهارگوش

و منفی را نشان میدهد . این ولتمتر یک ولتمتر دقیق دیجیتال میباشد که دقت اندازه گیری آن ٤ . ر. درصد است . اختلاف پتانسیل بین دیوار سرد (پتانسیل منفی) و نقاط دیگر بوسیله یک ولتمتر لامپی دقیق و بکمک یک پروب نوک تیز انجام میگیرد. نقاط هم پتانسیل را روی شکل هندسی موردنظر بدست میآوریم. این نقاط وقتی بهم متصل گردند خطوط هم پتانسیل را که معرف خطوط ایزوترم است تشکیل میدهند . این خطوط ایزوترم را سپس با دقت هرچه تمامتر روی کاغذ میلیمتری میآوریم . شکلهای (۲) و (۳) این خطوط را دریک پره با مقطع چهارگوش ویک دودکش مستطیلی نشان میدهند .



شکل ۳ ـ خطوط ایزوترم و جریان حرارت دریک دودکش

خطوط ولوله های جریان حرارت را حالا میتوان مطابق روش ذکر شده در یادداشت های درس انتقال حرارت و جرم رسم نمود. خطوط جریان همانطوریکه ذکر شده است خطوطی عمود برایزوترم ها بوده و از تلاقی آنها با خطوط ایزوترم شبکه میدان حرارت بدست میآید. از روی این شبکه می توان ضریب شکل ۱ را بدست آورد :

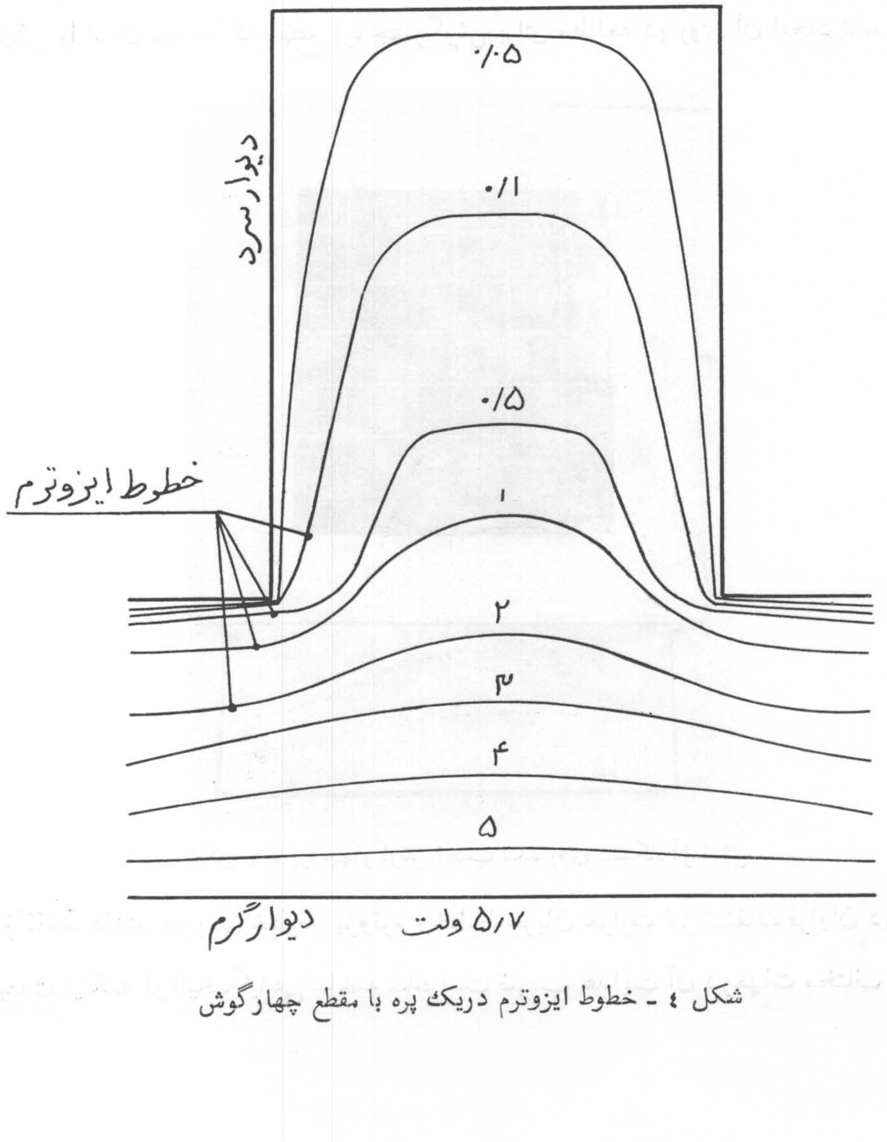
۱ - Shape factor

$$S = \frac{\text{تعداد لوله‌های جریان حرارت}}{\text{تعداد فواصل درجه حرارت بین سطوح گرم و سرد}} \qquad (۷)$$

بکمک ضریب شکل هرجسم دو بعدی می‌توان مقدار حرارت منتقل شده درآن را از رابطه زیر بدست آورد :

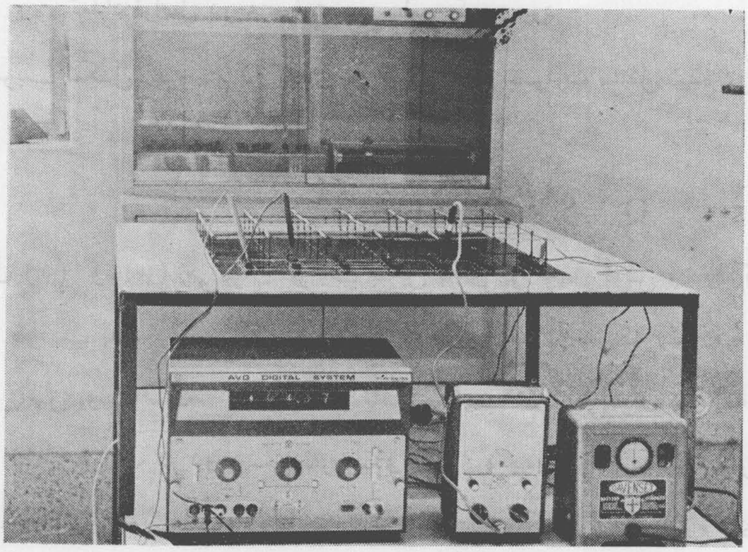
$$Q^{\circ} = S.k.(t_1 - t_2) \qquad (۸)$$

از اشکال (۲) و (۳) می‌توان ضرایب شکل برای پره چهارگوش و دودکش مورد مطالعه را بدست آورد . این ضرایب به‌ترتیب مساوی ۳ر۹۳ و ۹ر۳ میباشند درحالیکه اختلاف پتانسیل اعمال شده دراینحالات ۷ر۵ و ۳۷ر٤ ولت است . بامراجعه بمقادیر ضرایب شکل‌می‌توان دید که بازای یک اختلاف درجه حرارت معین انتقال حرارت در دودکش تقریباً دو برابر پره چهارگوش میباشد بشرطیکه هردو از یک جسم ویا اجسامی با ضریب هدایت مساوی ساخته شده باشند . شکل (٤) ایزوترم‌های بیشتری را دریک پره چهارگوش نشان میدهد .



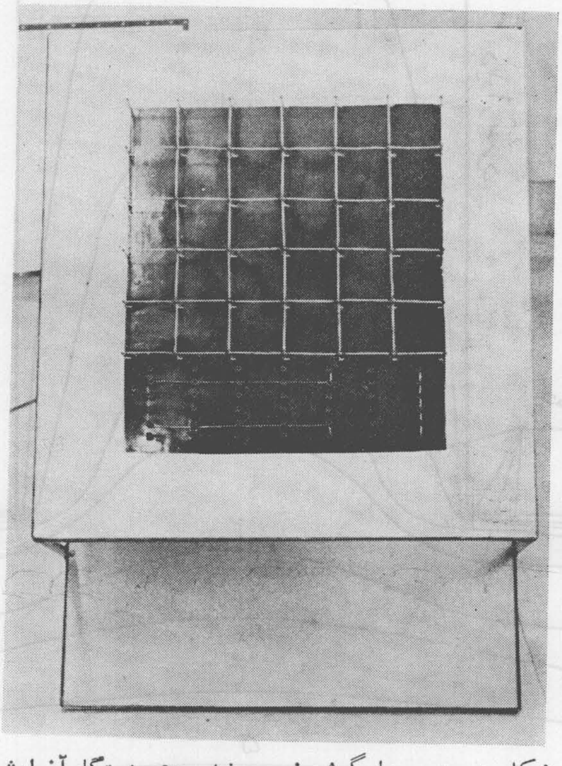
شکل ٤ ـ خطوط ایزوترم دریک پره با مقطع چهارگوش

دستگاه آزمایش همراه بامولد جریان دائم و وسایل اندازه گیری درشکل(۵) نشان داده شده‌است.



شکل ۵ ـ دستگاه آزمایش مدل الکتریکی برای هدایت حرارت درمختصات دو بعدی

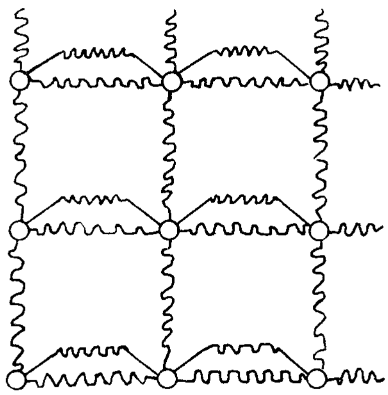
دراین عکس مدل دودکش مورد مطالعه درقسمت جلو و درمحل فیش‌ها نمایان است. شکل (۶) عکس دستگاه آزمایش را نشان میدهد که مقطع پره چهارگوش برای مطالعه در روی آن ایجاد شده است.



شکل ۶ ـ پره چهارگوش نصب شده روی دستگاه آزمایش

ازکاغذ هادی در رسم خطوط ایزوترم وخطوط جریان حرارت نیز استفاده فراوان درصنعت میشود. این کاغذ بعلت اینکه از الیاف گیاهی ساخته شده است ضریب هدایت آن درجهات مختلف مختصاتی باهم

مساوی نیست $(k_x \neq k_y)$. لذا قبل از هرآزمایش باید نسبت $\frac{k_x}{k_y}$ را بدست‌آورد تا بتوان بعد تصحیحات لازم را انجام داد . این موضوع درمورد دستگاه جدید حل شده‌است زیرا ازابتدا مقاومت‌ها را باهم برابر گرفته‌ایم . اگر لازم باشد که جسم باضریب هدایت حرارت متغیر در دوجهت مختصاتی مورد مطالعه قرار گیرد میتوان با اضافه کردن مقاومت های جدیدی بموازات مقاومت های اولیه درجهت یکی ازبعدهای مختصاتی، مقاومت های نظیر ضرایب هدایت k_x و k_y را بدست آورد شکل (۷) . این موضوع مزیت روش جدید را براستفاده از کاغذ هادی نشان میدهد .



شکل ۷ ـ مدل الکتریکی برای اجسامی که ضریب هدایت حرارت آنها دراستداد جهات مختلف مختصاتی متفاوت است

گاهی از الکترولیت هم بعنوان میدان هادی الکتریکی مشابه میدان حرارتی استفاده می‌نمایند . باید توجه کرد که استفاده از الکترولیت دارای خطرات ناشی از تماس با آن خواهد بود . بجز در شرایط بسیار خاصی این روش توصیه نمی‌گردد . برای اطلاع بیشتر در این مورد میتوان از کتاب مرجع (۳) استفاده نمود . دراستفاده ازالکترولیت باید توجه کرد که بعلت همگن بودن الکترولیت تولید میدان باضرایب هدایت متغیر امکان پذیر نخواهد بود .

از مزایای دیگر روش ذکر شده دراین مقاله اینست که می‌توان بسادگی آن‌را برای حالت هدایت سه بعدی وهدایت ناپایدار تعمیم داد . مدارهای الکتریکی نظیر هدایت ناپایدار تقریباً شناخته شده است و برای اطلاع بیشتر به کتاب انتقال حرارت نوشته چپمن (٤) مراجعه نمائید .

تشکرات : نویسندگان مقاله ازجنابان آقایان دکتر بدخشان سرپرست محترم دانشکده فنی ودکتر جهانشاهی مدیر محترم گروه مهندسی‌مکانیک که تسهیلات لازم برای انجام این آزمایش ها را فراهم آوردند تشکر مینمایند . دستگاه آزمایش وسیله آقای واقفی کارمند فنی آزمایشگاه ساخته شده است و بدینوسیله از زحمات ایشان قدردانی میگردد .

علائم

A ـ ثابت

A ـ سطح عبور حرارت ، A_x و A_y سطوح درجهات عمود برمحورهای مختصات x و y ـ مترمربع

B ـ ثابت

C ـ ثابت

D ـ ثابت

$H^{\circ'''}$ ـ تولید حرارت حجمی ـ کیلوکالری برای مترمکعب درساعت

I ـ شدت جریان برق ـ آمپر

k ـ ضریب هدایت حرارت ـ کیلوکالری درساعت برای یک متر ویکدرجه سانتیگراد

l ـ طول مقاومت‌ها ـ سانتیمتر

Q° ـ حرارت منتقل شده ، Q°_x و Q°_y درجهات مختصات x و y ـ کیلوکالری درساعت

R ـ مقاومت الکتریکی ـ اهم

R_t ـ مقاومت حرارتی ، R_{tx} و R_{ty} درجهات مختصات x و y ـ

S ـ ضریب شکل

t ـ درجه حرارت ـ درجه سانتیگراد

V ـ پتانسیل الکتریکی ـ ولت

x ـ محور مختصات ، Δx فاصله‌ای درامتداد محور x

y ـ » Δy » y

منابع مراجعه

۱ ـ انتقال حرارت وجرم نوشته زین‌العابدین نجات ـ پلی کپی دانشکده فنی ـ ۱۳۴۸ .

۲ — Holman : Heat Transfer, McGraw—Hill, 1963, 1969.

۳ — Schneider : Conduction Heat Transfer, Addison—Wesley, 1959.

٤ — Chapman : Heat Transfer, Collier—McMillan, 1969.

جبر نوین - بسط حلقه‌ها

نوشته :

حیدر دانشمند

استادیار دانشگاه تهران

همانطوریکه در شماره ۱۷ همین نشریه وعده داده شده بود اکنون دنبالهٔ مطالب مربوط به بسط حلقه ها را درحالتیکه بتوان آنرا روی حلقهٔ مبنا مدولی ازنوع محدود فرض کرد ازنظر علاقمندان میگذرانیم. موضوع اساسی این مقاله مطالعهٔ خواص این نوع مدولها در شرایطی است که بتوان هرعنصر از مدول را منحصراً بیک صورت بوسیلهٔ ترکیبی خطی از عناصر مبنا نشان داد درتحت این شرایط مدول را مدول آزاد خواهیم نامید.

یادآور میشویم که شرایط مقالهٔ شماره ۱۷ بهمان قوت خود باقی است یعنی حلقهٔ T بسط حلقهٔ S بوده وهردو حلقه دارای عنصر واحد و تعویض‌پذیر هستند.

۱-۲- فرض می کنیم T بسطی است از حلقهٔ S که درضمن مدولی آزاد و از نوع محدود روی‌حلقهٔ S نیز میباشد. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ عناصر مبنا و A و B دوایدال‌دلخواه ار حلقهٔ S هستند اگر I ایدالی‌باشد که بوسیلهٔ ضرایب عنصر واحد T بوجود آمده است احکام زیر را ثابت میکنیم :

$$\rho_0 \quad I = S$$

$$\rho_1 \quad AT \cap S = A$$

$$\rho_2 \quad (A : B)T = AT : BT$$

$$\rho_3 \quad (A \cap B)T = AT \cap BT$$

برهان ـ حکم ρ_0 را فقط درحالتیکه مدول از نوع محدود میباشد ثابت میکنیم :

فرض می‌کنیم :

$$s_i \in S \quad \text{و} \quad t_i \in T \quad \text{و} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$1 = s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_n t_n$$

با ضرب طرفین به t_i داریم :

$$t_i = s_1 t_i t_1 + s_2 t_i t_2 + \cdots + s_n t_i t_n$$

اما $t_i t_k$ عنصری از T است و بنابراین میتوان نوشت :

$$1 \leqslant i, k, j \leqslant n \qquad \text{و} \qquad \alpha_{ikj} \in S$$

$$t_i t_k = \sum_j \alpha_{ikj} t_j$$

پس :

$$t_i = s_1 \Big(\sum_j \alpha_{i1j} t_j\Big) + \cdots + s_n \Big(\sum_j \alpha_{inj} t_j\Big)$$

$$t_i = s_{1i} t_1 + s_{2i} t_2 + \cdots + s_{ni} t_n$$

که درآن s_{ij} ها بازاء جمیع مقادیر i عناصری از S هستند که بوسیلهٔ $s_1, s_2, \ldots, s_n$ بوجودآمده‌اند. پس:

$$\Delta t_i = \begin{vmatrix} 1 - s_{11} & -s_{21} & \cdots\cdots & -s_{n1} \\ -s_{21} & 1 - s_{22} & \cdots\cdots & -s_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \\ -s_{1n} & & & 1 - s_{nn} \end{vmatrix} t_i = 0$$

اما :

$$1\Delta = s_1 \Delta t_1 + s_2 \Delta t_2 + \cdots + s_n \Delta t_n$$

و از آنجا :

$$\Delta = 0$$

اگر دترمینان Δ را بسط دهیم :

$$\Delta = 1 + (-1)^n s_{11} s_{22} \cdots s_{nn} + \cdots$$

و یا :

$$\Delta = 1 - s = 0$$

خواهد شد که درآن $s \in S$ پس :

$$1 = s \in S$$

و چون s بوسیلهٔ $s_1, s_2, \cdots, s_n$ یعنی ضرایب عنصر واحد ایجاد شده است :

$$1 = s \in I$$

بوده و :

$$\boxed{S = I}$$

میباشد .

اثبات حکم ρ_2 : فرض میکنیم a عنصری از $AT \cap S$ باشد پس :

$$a = \sum_i a_i t_i$$

عنصری از حلقهٔ S است که درآن :

$$1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{و} \quad a_i \in A$$

اما :

$$1 = s_1 t_1 + s_2 t_2 + \cdots + s_n t_n$$

از ضرب طرفین در a خواهیم داشت :

$$a = s_1 a t_1 + \cdots + s_n a t_n$$

چون T مدولی آزاد فرض شده است عنصر a فقط بیک صورت میتواند نوشته شود . پس بازاء کلیه مقادیر i داریم :

$$a_i = s_i a \in A$$

ازآنجا :

$$(1 \leqslant i \leqslant n) \qquad S s_i a \in A$$

یعنی :

$$aI = aS \subset A$$

و چون S شامل عنصر واحد 1 است لذا داریم :

$$a \in A$$

و ازآنجا :

$$AT \cap S \subseteq A$$

و روشن است که :

$$AT \cap S \supset A$$

زیرا $1 \in T$ و ازآنجا حکم ρ_1 نتیجه میشود :

$$\boxed{AT \cap S = A}$$

برای اثبات حکم ρ_2 فرض می‌کنیم x عنصری است از $(A:B)T$ پس داریم :

$$x=\sum_{i=1}^{n} s_i t_i$$

که درآن :

$$s_i \in (A:B)$$

و این خود ایجاب میکند که داشته باشیم :

$$s_i B \subset A$$

و از آنجا :

$$s_i \in (AT:BT) \quad \text{و} \quad s_i BT \subseteq AT$$

یعنی :

$$x=\Sigma\, s_i t_i \quad \text{و} \quad s_i t_i$$

عناصر ایدال $AT:BT$ هستند پس :

$$(A:B)\,T \subseteq AT:BT$$

حال اگر y عنصری از ایدال $AT:BT$ باشد خواهیم داشت :

$$yBT \subseteq AT$$

که درآن :

$$y=\sum_{i=1}^{n} s_i t_i$$

و :

$$s_i \in S$$

چون $1 \in T$ است داریم :

$$yB \subseteq AT$$

عناصر عمومی yB و AT بترتیب بشکل های :

$$\sum_{1}^{n} s_i b_i t_i$$

و :

$$\sum_{1}^{n} a_i t_i$$

میباشد که :

$$a_i \in A \quad \text{و} \quad b_i \in B$$

است. بایک انتخاب‌مناسب a_i ها میتوانیم بنویسیم :

$$s_i b_i \in S$$

و :

$$\sum_{i=1}^{n} s_i b_i t_i = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i$$

اما چون T مدولی آزاد و از نوع محدود در روی S فرض شده است لذا بازاء هر b_i از ایدال B داریم :

$$s_i b_i = a_i$$

از آنجا نتیجه میشود که s_i عنصری از ایدال A : B است و $s_i t_i$ و :

$$y = \Sigma s_i t_i$$

عناصری از ایدال $(A:B)T$ هستند . پس :

$$(A:B)T \supseteq AT:BT$$

و لذا حکم ρ_2 ثابت میشود :

$$\boxed{(A:B)T = AT:BT}$$

برای اثبات حکم ρ_3 با استفاده از تعریف $A \cap B$ داریم :

$$x \in (A \cap B)T \iff x = \sum_i a_i t_i \qquad a_i \in A \cap B$$

واگر $y \in AT \cap BT$ یعنی y عنصر مشترك AT و BT باشد بعلت‌اینکه T مدولی آزاداست‌داریم:

$$y = \Sigma a_i t_i \implies a_i \in A \cap B$$

از آنجا نتیجه میشود که بین x و y اختلافی موجود نیست و ازآنجا حکم ρ_3 :

$$(A \cap B)T = AT \cap BT$$

ثابت میشود .

تبصره ـ حکم ρ_1 برای تقاطع (اشتراك) یک خانواده از ایدالهای اول حلقهٔ S (درحالت خاص برای یک ایدال اول A از S) صحیح است حتی اگر T فقط یک مدول از نوع محدود (بی‌آنکه آزادباشد) در روی حلقهٔ S فرض شود صحت این مطلب بشرح زیر عنوان میشود :

۲ ـ ۲ ـ فرض می‌کنیم T بسطی از حلقهٔ S که مدولی از نوع محدود در روی S است باشد . اگر M تقاطع (اشتراك) یک خانواده از ایدالهای اول P_i از حلقهٔ S باشد ثابت می‌کنیم :

$$MT \cap S = M$$

برهان ـ برای یک ایدال اول P_i از S یک ایدال اول P'_i از T وجود داردکه :

$$P'_i \cap S = P_i$$

است و از آنجا داریم :

$$P'_i \supset P_i \supset M$$

پس :

$$P'_i \supset MT$$

از تساوی :

$$P'_i \cap S = P_i$$

نتیجه میگیریم که بازاء هرمقدار i :

$$P_i \supset MT \cap S$$

است پس :

$$M = \bigcap_i P_i \supset MT \cap S$$

از طرف دیگر واضح است که $MT \cap S$ شامل M بوده لذا داریم :

$$MT \cap S = M$$

و حکم ثابت است .

نتیجه ۱ ـ برای هرایدال اول P داریم :

$$PT \cap S = P$$

زیرا یک خانواده ایدال اول P_i به یک ایدال P تبدیل شده است یعنی :

$$M = P \quad \text{و} \quad PT \cap S = P$$

۳ ـ ۲ ـ T بسطی است از حلقهٔ نوتری[۱] S که مدولی آزاد و از نوع محدود در روی S میباشد برای مجموعه‌ایکه نسبت بضرب مسدود و شامل صفر نیست زوج (S_M , T_M) درتساویهای P_1 و P_2 و P_3 (در ۲ ـ ۲ تعریف شده‌است) صدق میکنند. S_M و T_M محلی‌شده[۲] S و T بوسیلهٔ مجموعهٔ M میباشد .

برهان ـ اگر $t_1 , t_2 , t_3 , \cdots t_n$ یکدستگاه مولدهای T باشند میتوان گفت که T مجموع مستقیم از St_i ها :

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} St_i$$

و T_M مجموع مستقیم از $(St_i)_M$ ها بصورت :

$$T_M = \bigoplus_{i=1}^{n} (St_i)_M$$

است .

---

۱ —Noeterien ۲ —Localisé

اگرتحویل نرمال از T در T_M را با φ نشان دهیم $\varphi(t_i)$ یکدستگاه مولدبرای T_M خواهدبود و :

$$\frac{st_i}{\sigma} = \frac{s}{\sigma}\varphi(t_i)$$

که درآن $\sigma \in M$ و $s \in S$ پس :

$$(St_i)_M = S_M \varphi(t_i)$$

درنتیجه :

$$T_M = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_M \varphi(t_i)$$

بدیهی است اگر :

$$\frac{S}{\sigma}\varphi(t_i) = o$$

باشد :

$$\frac{st_i}{\sigma} = o$$

خواهد شد یعنی عنصری نظیر λ متعلق به M چنان وجود دارد که داریم :

$$\lambda st_i = o$$

و ازآنجا :

$$\lambda s = o$$

و بالاخره :

$$\frac{s}{\sigma} = \frac{\lambda s}{\lambda \sigma} = \frac{o}{\lambda \sigma}$$

پس T_M مدولی آزاد و از نوع محدود در روی حلقهٔ S_M و تساویهای P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S_M , T_M) صادق خواهند بود . (S_M نوتری است [۱])(۱) .

۴ - ۲ - T بسطی است ازحلقهٔ نوتری S که مدولی از نوع محدود درروی حلقهٔ S فرض شده‌است اگر احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S , T) صادق باشند و اگر M مجموعه‌ای از حلقه‌ی S که نسبت بضرب مسدود است باشد $(O \notin M)$ می‌خواهیم ثابت کنیم که احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S_M , T_M) نیز صادق خواهد بود . (S_M و T_M محلی شدهٔ S و T بوسیلهٔ M میباشد) .

برهان ـ چون S یک‌حلقهٔ نوتری و T مدولی ازنوع محدود در روی S میباشد T نیز نوتری‌خواهد بود برای یک عنصر عمومی x از حلقهٔ T داریم :

$$x = s_1 t_1 + \cdots + s_p t_p$$

که درآن :

$$1 \leq i \leq P \quad \text{و} \quad s_i \in S \quad \text{و} \quad t_1, t_2, \cdots, t_p$$

۱ — مراجعه به مأخذ ـ بآخر مقاله مراجعه شود .

یکدستگاه مولد T فرض شده است . و $\frac{x}{\sigma}$ $(\sigma \in M)$ یک عنصر عمومی از حلقهٔ T_M است بطوریکه:

$$\frac{x}{\sigma} = (s_1 t_1 + \cdots + s_p t_p)/\sigma = \frac{s_1}{\sigma} t_1 + \cdots + \frac{s_p}{\sigma} t_p$$

و یا :

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{s_1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sigma} t_1 + \cdots + \frac{s_p}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sigma} t_p \qquad (1 < i < P \ , \ \forall \sigma \in M)$$

این رابطه نشان میدکه T_M مدولی از نوع محدود در روی S_M با مبناهای $\frac{\sigma}{\sigma} t_i$ است.

بآسانی میتوان تحقیق کردکه حلقهٔ T_M شامل حلقهٔ S_M است وچون S و T حلقه های نوتری هستند S_M و T_M نیز نوتری خواهند بود [۲] .

برای نشاندادن حکم P_1 میدانیم که داریم :

$$B_M T_M = (BT)_M$$

که درآن B ایدالی است از S [۳] . پس :

$$(B_M T_M) \cap S_M = (BT)_M \cap S_M = (BT \cap S)_M$$

با توجه به حکم P_1 برای زوج (S, T) تساوی P_1 را برای زوج (S_M, T_M) نیز خواهیم داشت:

$$B_M T_M \cap S_M = B_M$$

برای اثبات حکم P_2 درمورد زوج $(\mathbf{S}_M, T_M)$ میدانیم که حلقهٔ S نوتری است پس تمام ایدالهای آن ازنوع محدودهستند بنابراین برای یک ایدال B ازنوع محدود حلقهٔ S و برای یک ایدال A از S داریم:

$$(A : B)_M = A_M : B_M \qquad [٤]$$

از طرف دیگر :

$$(AT)_M = A_M T_M$$

پس :

$$(A_M : B_M) T_m = (A : B)_M T_M$$

و از آنجا :

$$(A_M : B_M) T_M = ((A : B) T)_M$$

اما با توجه به حکم P_2 برای زوج (S, T) داریم :

$$((A : B)T)_M = (AT : BT)_M = (AT)_M : (BT)_M = A_M T_M : B_M T_m$$

و این خود حکم P_2 را مشخص میکند .

$$(A_M : B_M)T_M = A_M T_M : B_M T_M$$

برای اثبات شرط P_3 میدانیم که برای دو زیر مدول AT و BT از مدول T تساوی زیر برقرار است :

$$(AT)_M \cap (BT)_M = (AT \cap BT)_M$$

پس :

$$(A_M T_M) \cap (B_M T_M) = (AT)_M \cap (BT)_M = (AT \cap BT)_M$$

و با توجه به‌حکم P_3 برای زوج (S , T) خواهیم داشت :

$$(TA \cap BT)_M = ((A \cap B)T)_M = (A \cap B)_M T_M = (A_M \cap B_M)T_M$$

و از آنجا حکم P_3 را برای زوج (S_M , T_M) نتیجه میگیریم :

$$A_M T_M \cap B_M T_M = (A_M \cap B_M)T_M$$

بسط حلقه‌های محلی(۱) و نیمه محلی(۲)

حلقه محلی و نیمه محلی ـ یک حلقهٔ مخالف صفر نوتری که شامل تعداد محدودی از ایدالهای ماکزیمال باشد یک حلقهٔ نیمه محلی گفته میشود و اگر این حلقه فقط شامل یک ایدال ماکزیمال باشد حلقهٔ محلی نامیده خواهد شد .

مثال ـ هرحلقهٔ آرتینی(۳) یک حلقهٔ نیمه محلی و هرهیئت(٤) یک حلقهٔ محلی‌است . اگر یک‌حلقهٔ غیرنوتری فقط شامل یک ایدال ماکزیمال باشد آنرا یک حلقهٔ شبه محلی(٥) خواهیم گفت .

اگر حلقهٔ S شبه محلی یا محلی با ایدال‌ماکزیمال M باشد ایدال M ازعناصری تشکیل‌خواهد شد که درحلقهٔ S دارای عنصر معکوس نیستند زیرا از تساوی :

$$\alpha S = S \qquad و \qquad \alpha \in S$$

نتیجه میشود که α متعلق به M نیست . از طرف دیگر اگر دریک حلقه عناصریکه عنصر معکوس ندارند یک ایدال M' تشکیل دهند هرایدال دیگرهم باید در M' قرارگیرد (عناصر یک ایدال اصولاً عنصر معکوس ندارند) پس M' تنها ایدال ماکزیمال S و حلقهٔ S شبه محلی یا محلی خواهد بود .

φ یک همسانی(٦) سورژکتیو از حلقهٔ S درحلقهٔ T است. حال اگر S نیمه محلی باشد T نیز نیمه محلی خواهد بود زیرا برای هرایدال ماکزیمال M' از T ، ایدال $\varphi^{-1}(M')$ ایدال ماکزیمالی از S است [٥] .

---

۱ — Local　　۲ — Semi—local　　۳ — Artinien

٤ — Corps　　٥ — Quasi—lacal　　٦ — Homomorphisme

پس تعداد ایدالهای ماکزیمال T نمیتواند ازتعداد ایدالهای ماکزیمال S تجاوزکند. ازطرف دیگر S نوتری است و نتیجه میشود که T نیز نوتری است پس T حلقهٔ نوتری با تعداد محدود ایدالهای ماکزیمال یک حلقهٔ نیمه محلی است. درشماره ۱۷ همین نشریه دیدیم که تحت چه شرایطی بسط حلقهٔ S نیمه محلی یا محلی است و اینک چند خاصیت دیگر:

۵ - ۲ - T بسطی از حلقهٔ محلی S (نوتری) و مدولی از نوع محدود در روی حلقهٔ S میباشد اگر تساویهای P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S, T) صادق باشند ثابت‌میشود که T مدولی آزاد وازنوع محدود در روی حلقهٔ S می‌باشد.

(اثبات این قضیه بوسیله Hazimu Satô استاد دانشگاه هیروشیما صورت گرفته است و ما از ذکر آن دراینجا خودداری می‌کنیم).

حال به چند خاصیت دیگری ازقبیل تغییر نوع حلقهٔ S واینکه نوع مدول T تحت این شرایط تصویری[1] یا مسطح[2] باشد می‌پردازیم وبنا بقرارداد شماره ۱۷ ی همین‌نشریه نتایج حاصلهٔ جدید را قضیه خواهیم نامید.

بسط حلقه‌ها - مدولهای آزاد ومدولهای تصویری

تعریف ۱ - مدولهای M_i روی حلقهٔ S دنباله‌ای بشکل زیر تشکیل میدهند.

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

که درآن φ_i ها همسانی‌های مدولها میباشندهرگاه بازاء جمیع‌مقادیر i تصویر[3] φ_{i-1} وهستهٔ[4] φ_i هردو یکی باشند دنباله را یک دنبالهٔ کامل[5] خواهیم گفت.

تعریف ۲ - مدول M در روی حلقهٔ S را درصورتیکه یک‌فاکتور مستقیم ازیک مدول آزاد باشد یک مدول تصویری خواهیم گفت.

تعریف۳ - مدول T درروی‌حلقهٔ S و مدولهای آزاد وازنوع محدود L_0 و L_1 را درنظر میگیریم. اگر دنبالهٔ:

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

کامل باشد آنرا یک نمایش[1] محدود مدول T خواهیم گفت.

---

۱ —Projectif ۲ —Plat ۳ —Image

٤ —Nayau ٥ —Exacte ٦ —Presentation

یادآوری - عبارت « T یک مدول تصویری از نوع محدود است » با عبارت « T مدولی بانمایش محدود بوده و برای هرایدال ماکزیمال M از حلقهٔ S (حلقهٔ مبنای مدول) T_M (محلی T بوسیلهٔ M) مدولی‌آزاد در روی حلقهٔ S_M است » هم ارز خواهد بود [۶] .

قضیه ۱ - T بسطی از حلقهٔ نوتری S بوده و مدولی از نوع محدود در روی حلقهٔ S میباشد . درصورتیکه احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S , T) صادق باشد T مدولی تصویری از نوع محدود خواهد بود .

برهان - فرض کنیم M یک ایدال‌ماکزیمال S , S_M و T_M محلی‌شده‌های S و T بوسیلهٔ ایدال ماکزیمال M باشند ($S-M$ نسبت به ضرب در S و T مسدود است) چون احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (T و S) صادق است لازم‌میآید اینشرایط برای زوج (T_M و S_M) نیز صادق باشد. لذا T_M مدولی ازنوع محدود درروی حلقهٔ S_M میباشد. ازطرف دیگر M یک‌ایدال‌اول (زیرا ماکزیمال است) از حلقهٔ S است پس S_M تنها یک ایدال ماکزیمال خواهد داشت و چون S نوتری است S_M نیز نوتری خواهد بود [۷] .

یعنی S_M یک حلقهٔ محلی است از آنجا باتوجه باینکه T_M مدولی از نوع محدود در روی‌حلقهٔ S_M است و بعلاوه‌احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (T_M و S_M) صادق است نتیجه میشود که :

T_M مدولی آزاد و از نوع محدود است . کافی است ثابت کنیم که T یک نمایش محدود خواهد پذیرفت .

برای این منظور فرض کنیم داشته باشیم :

$$L_0 = S \oplus S \oplus \cdots \oplus S = S^p$$

که درآن $\oplus$ علامت جمع مستقیم میباشد. وباز فرض کنیم φ_1 یک‌همسانی از مدول L_0 در روی T بشکل زیر تعریف شود :

$$\varphi_1(1,0,0,\cdots,0)=b_1$$
$$\vdots$$
$$\varphi_1(0,0,0,\cdots,0,1)=b_p$$

درآنجا $b_1 , b_2 , \cdots , b_p$ یکدستگاه مولد T میباشد . حال اگر :

$$y\in L_0 \qquad y=\alpha_1\varepsilon_1+\cdots+\alpha_p\varepsilon_p \qquad \forall_i\ \alpha_i\in S$$

$$\varepsilon_1=(1,0,0,\cdots,0)\ ,\cdots,\ \varepsilon_p=(0,0,0,\cdots,0,1)$$

$$\varphi_1(y)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p$$

دیده میشود که φ_1 یک تحویل سورژکتیو و :

$$L_0=S^p$$

مدولی آزاد و از نوع محدود میباشد . و چون **S** یک حلقهٔ نوتری است هستهٔ φ_1 یک زیر مدول از نوع محدود مدول :

$$L_0=S^p$$

خواهد بود . فرض کنیم که این زیر مدول بوسیلهٔ مولدهای u_1 , u_2 , $\cdots$, u_q بوجود آمده باشد . پس مدول آزاد :

$$L_1=S^q=S\oplus S\oplus\cdots\oplus S$$

و همسانی φ_2 از L_1 در L_0 را بشکل زیر درنظر میگیریم :

$$\varphi_2(1,0,0,\cdots,0)=u_1$$
$$\vdots$$
$$\varphi_2(0,0,\cdots,0,1)=u_q$$

$$x\in L_1 \qquad x=a_1\varepsilon'_1+\cdots+a_q\varepsilon'_q \qquad \forall_i \qquad a_i\in S$$

$$\varepsilon'_1=(1,0,0,\cdots,0)\ ,\cdots,\ \varepsilon'_q=(0,0,0,\cdots,0,1)$$

$$\varphi_2(x)=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_qu_q$$

پس تصویر φ_2 با هستهٔ φ_1 برابر است و دنبالهٔ :

$$L_1\xrightarrow{\varphi_2}L_0\xrightarrow{\varphi_1}T\longrightarrow 0$$

یک دنبالهٔ کامل است . و بالاخره **T** مدولی تصویری و از نوع محدود روی حلقهٔ S است .

تبصره ـ هرمدول از نوع محدود در روی یک حلقهٔ نوتری یک نمایش محدود می‌پذیرد . ولی اگر حلقه دلخواه باشد این مطلب صحیح نیست [۸] .

قضیه ۲ ـ T بسطی از حلقهٔ S و مدولی از نوع محدود در روی حلقهٔ S است . اگر حلقهٔ S اصلی(۱) باشد و احکام P_1 و P_2 و P_3 برای (S,T) صادق باشند T مدولی آزاد و از نوع محدود خواهد بود .

۱ — Principal

برهان - فرض کنیم M ایدال ماکزیمالی از حلقهٔ S باشد . میدانیم که S_M محلی شدهٔ S بوسیلهٔ ایدال ماکزیمال M ، یک حلقهٔ محلی است . S حلقهٔ اصلی فرض شده لذا نوتری خواهد شد و چون احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S, T) صادق‌است برای زوج (S_M, T_M) نیز صادق خواهد بود (T_M محلی T بوسیله M است) و T_M مدولی از نوع محدود در روی حلقهٔ S_M خواهد بود و بعلاوه یک مدول آزاد از نوع محدود برای هرایدال ماکزیمال M از S خواهد شد .

مدول T در روی حلقهٔ نوتری S (اصلی) که از نوع محدود است یک نمایش‌محدودمی‌پذیرد .

پس T یک مدول تصویری از نوع محدود است و لذا یک فاکتور مستقیم از یک مدول آزاد :

$$L = T \oplus E$$

میباشد که درآن E مدولی در روی حلقهٔ S است که بطور مناسب‌اختیار میشود تساوی بالا نشان میدهد که T زیر مدولی از یک مدول آزاد L در روی حلقهٔ اصلی S میباشد پس T آزاد هم خواهد بود .

قضیه ۳ - T بسطی است از حلقهٔ اصلی S که مدولی‌ازنوع محدود در روی حلقهٔ S است و T' حلقه‌ای است که $S \subset T' \subset T$. حال‌اگر احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S, T) صادق باشند برای زوج (S, T') نیز صادق خراهند بود .

برهان - چون T' یک حلقه است برای عناصر a و b ی آن خواهیم داشت :

$$a+b \in T' \quad \text{و} \quad ab \in T'$$

پس برای هرعنصر :

$$s \in S \subset T'$$

داریم :

$$sb \in T'$$

یعنی T' یک زیر مدول T در روی حلقهٔ S است . اما حلقهٔ S نوتری است و از آنجا T نیز نوتری خواهد بود و T' زیر مدول T از نوع محدود است از طرف دیگر زوج (S, T) با تساویهای P_1 و P_2 و P_3 نتیجه میدهد که T یک مدول آزاد است (قضیه ۲) .

میدانیم که هرزیر مدول از یک مدول آزاد در روی حلقهٔ اصلی یک مدول آزاد است [۹] پس T' یک مدول آزاد از نوع محدود بوده واحکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج $(S$ و $T')$ صادق خواهند بود .

قضیه ٤ - T بسطی است از حلقهٔ کثیرالجملهٔ :

$$S = K[X, Y]$$

با دو حرف X و Y که درآن K یک هیئت[1] و T مدولی از نوع محدود در روی حلقهٔ S است . اگر احکام P_1 و P_2 و P_3 برای زوج (S , T) صادق باشد مدول T یک مدول آزاد از نوع محدود خواهد بود .

مثال ـ « اگر S را بوسیلهٔ حلقهٔ کثیرالجملهٔ $A[X]$ که درآن A یک حلقهٔ اصلی است تعویض کنیم ، T یک مدول تصویری در روی $A[X]$ بوده و بالاخره T مدولی آزاد و از نوع محدود خواهد شد . (این قضیه مربوط به سشادری است) [۱۰] .

برهان ـ میدانیم که هرحلقهٔ کثیرالجمله در روی یک هیئت K نوتری است پس :

$$S=K[X , Y]$$

نوتری بوده و هرمدول T ازنوع محدود درروی حلقهٔ نوتری S یک‌نمایش‌محدود خواهد پذیرفت (تبصره قضیه ۱) . ازطرف دیگر فرض کنیم که M ایدال ماکزیمالی از S باشد . S_M محلی شدهٔ S بوسیلهٔ ایدال M ، یک حلقهٔ محلی است و چون زوج (S , T) در تساویهای P_1 و P_2 و P_3 صدق میکند زوج (S_M , T_M) نیز آن تساویها را خواهند داشت. (T_M محلی شده T بوسیله M است و T_M یک مدول از نوع محدود در روی حلقهٔ S_M خواهد شد و بعلاوه آزاد و از نوع محدود است . (بند ۵ ـ ۲).

پس T یک مدول تصویری از نوع محدود بوده و با توجه به قضیهٔ سشادری T آزادهم خواهد بود .

امید است دنبالهٔ مطالب درشماره‌های بعدی چاپ شود .

---

۱ — Corps