صور مختلفهٔ هندسه

«هندسهٔ ویل»

نوشتهٔ :

م . ه . شفیعیها

دانشیار دانشکدهٔ فنی

در سالهای اخیر در برخی از کشورهای غربی گرایشی به تدریس هندسه در سالهای آخر دبیرستان، براساس روش «اصل موضوعی[1]» **ویل** پدید آمده است. در ایران هم (تا آنجا که نگارنده اطلاع دارد) چندی قبل گروهی از دبیران ریاضی به تبعیت از این فکر، ضمن خواستن نظرات افراد صاحبنظر، عقیدهٔ آنان را در باب تدریس هندسه براساس این روش جویا شده بودند. مقالهٔ حاضر در این زمینه تهیه شده و میتواند به عنوان اظهار نظری دراین امر بشمار آید.

۱ـ مقدمه ـ علوم ریاضی به دوصورت ممکن است پی‌ریزی شود : یا براساس امثلهٔ عینی و تجربی، یعنی براساس واقعیت فیزیکی که دراینحال ریاضی به صورت یک علم تجربی عرضه میشود. و یا ممکن است در مراحل اولیه عدهٔ محدودی از خواص مبنا که ازتجربه ملهم شده‌اند به عنوان پایه و اصل انتخاب گردد و از این خواص، تنها باتکاء برقواعد منطقی **محض** خواص تازه‌ای استخراج شود. بدیهی است که دراین صورت ریاضیات به صورت یک علم استنتاجی درمی‌آید که دیگربه تجربه متکی نبوده، بلکه صرفاً براساس استدلال منطقی بنا شده است.

از زمان پیدایش هندسه (در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد مسیح) تا زمان **هیلبرت**، هندسه کم‌وبیش، تا حدی به صورت اول وجود داشته است. در حدود سال ۱۹۰۰ هیلبرت کتاب خود را به نام مبانی هندسه : (Grundlager der Geometrie) انتشار میدهد و هندسه را بدون توسل به شواهد و

۱- Axiomatique

تجربه ، صرفاً به اتکاء منطق بنا می‌نهد ، که تطابق نتایج تئوری او باواقعیت دلیل گویائی بردرستی بنای او میشود . دراین پی‌ریزی ، هیلبرت کاری به ماهیت‌عناصری که‌اوآنها را **نقطه** و **خط** و **صفحه** می‌نامدندارد، یعنی ماهیت این عناصر نقش چندانی دراین علم بازی نمی‌کند . بلکه تنها عامل مهم **نسبت** موجود بین این عناصر است . مثلاً می‌دانیم که ساختمان گروهها با یک طرح ریزی‌قبلی‌در قالبی خاص صورت می‌گیرد و چگونگی عناصر آنها خواه از امثلهٔ عددی و خواه از تبدیلات هندسی ناشی شده باشد هیچگونه تأثیری در مفهوم آنها ندارد . برای طرح ریزی **نمادهائی**[1] راکه معنای‌دقیقی دارند انتخاب میکنند و مواردا‌ستعمال آنها را بوسیلهٔ مفروضاتی به نام **اصول موضوعه** (آکسیوم) دقیقاً معین می‌سازند . این مفروضات پایهٔ«اصل موضوعی» علوم بشمار می‌رود . مثلاً چنانچه می‌دانیم جبر مجموعه‌ها را براساس ۹ اصل «موضوعه» یعنی حقایقی که هنگام طرح‌ریزی درطرح پیش‌بینی شده‌اند ، بنا نهاده و بسط می‌دهند .

استدلال منطقی براساس اصول موضوعه ما را به خواص تازه‌ای که قضایا نام دارند هدایت مینماید . هرخاصیتی که جزو یکی‌ازاصول موضوعه نباشد اثبات میشود و موضوعی‌برای‌یک‌یا چند قضیهٔ جدید قرار می‌گیرد .

هر **طرح** خاصیت مجردی دارد و از روی قالب عینی خاصی ساخته میشود . تحقیق عینی یک طرح ، بهرنحوی که‌صورت گیرد ، قالبی برای آن طرح به‌وجود می‌آورد . مطابق‌تعریف، کلیهٔ‌اصول موضوعه، در هریک ازقالبها به خواص قابل ارزشی تفسیر می‌شوند . مثلاً مفهوم حاصلضرب داخلی (عددوار) دو بردار را درنظر می‌گیریم . دیده می‌شود که می‌توان‌به کمک آن خواص اصلی و اصول موضوعهٔ حاصلضرب عددوار را در V_1 (فضای‌یک بعدی) بدست آورد و آنها را در V_2 (فضای دو بعدی) بدون توسل به تجربه بکار برد (بسط داد)وبرای‌تکمیل مبنای«اصل موضوعی»وغنای‌طرح، مفهوم‌هنج (نرم)وتعامد را در V_1 وارد نمود و باز هم با توسل به استدلال منطقی خواص تازه‌ای بدست آورد .

به کمک همین روش اصل موضوعی بود که دانشمندان سعی داشتند عدم تناقض درنظریه‌های ریاضی را اثبات کنند . هیلبرت مسئلهٔ عدم تناقضها را درفضای‌هندسی به عدم تناقضهای‌حسابی تبدیل کرد و امیدوار بود که بتواند بااین عمل عدم تناقض درقضایای حسابی را اثبات نماید . ولی در ۱۹۳۱ کورت گویدل (Kurt Gödel) منطقی معاصر اثبات کرد که انقطاع این مسئله دریکجا غیر ممکن است و تعیین عدم تناقضهای حسابی به تنهائی بوسیلهٔ حساب ممکن نیست . یعنی امید به اینکه بتوان ریاضیات را ، به زعم هیلبرت ، فقط درعرصهٔ منطق،بدون توسل به وسیلهٔ‌خارجی بنا نمود امید بیهوده‌ای است : ریاضی‌برروی خود بسته نمی‌شود بلکه در روی حقیقت باز است .

۲- پی‌ریزی هندسه باروش برداری - ساختمان هندسه، که از اقلیدس شروع وتوسط هیلبرت‌تکمیل شده براساس‌نکات زیراستوار گردیده است : مفاهیم اساسی‌تعریف‌نشده که عبارتند از : **نقطه** ، **خط** و **صفحه** ؛

۱- Symbols

نسبتهای اساسی تعریف نشده که عبارتند از: نسبت «**تعلق**» (مثلاً نقطه‌ای به خط مستقیمی متعلق است، خط مستقیمی در صفحه‌ای واقع است و ...)؛ مفهوم «**بین**» که نسبت بین سه نقطه از یک مستقیم است و به کمک آن می‌توان پاره خط، دسته‌اشعه، زاویه و غیره را تعریف نمود؛ بالاخره «**انطباق**» (کنگروانس) برای دو پاره خط یا دو زاویه. بیست اصل موضوعه وجود دارد که نسبتها و مفاهیم را به یکدیگر مربوط می‌سازد (و در واقع تعریف غیر مستقیمی از این نسبتها و مفاهیم است) که بعضی از آنها نظیر: «از دو نقطهٔ متمایز فقط یک خط مستقیم می‌گذرد» و «از سه نقطه از یک خط مستقیم فقط یکی مابین دوتای دیگر قرار دارد» و اصل «توازی» و غیره کاملاً مشهورند و بقیهٔ مفاهیم دقیقاً از روی اینها مشخص می‌شوند. آن قضایائی از هندسه که از اصول موضوعه مجزا هستند کاملاً اثبات و برطبق قواعد منطقی از اصول نتیجه می‌شوند.

بنای هندسهٔ اقلیدسی بدین نحو برهمه روشن است. ولی باید دانست که این روش، روش منحصری نیست و می‌توان این بنا را با مفاهیم و نسبتهای اولیهٔ (تعریف نشدهٔ) دیگری هم (البته به کمک اصول موضوعهٔ دیگر) شروع کرد. مثلاً می‌توان مفهوم تساوی‌را ازفهرست نسبتهای اولیه حذف کرد و به‌جای آن **حرکت** را به عنوان یکی از مفاهیم اولیه وارد نمود و تساوی پاره خط‌ها و زوایا را با بیان اینکه «یکی از دیگری براثر حرکت بوجود می‌آید» عرضه کرد. این کار همان کاری است که **شور** در ۱۹۱۲ انجام‌داد وهندسه‌ای به‌وجودآورد که‌اصول موضوعه‌اش از لحاظ روانی و هماهنگی شاید بهتر از هندسهٔ هیلبرت‌باشد.

اما **ویل** ریاضیدان آلمانی روش کاملاً متمایزی برای بنای هندسه ابداع کرد. در اصول‌موضوعهٔ وی مفاهیم و نسبتهای هندسی تعریف نشده عبارتند از: بردار، نقطه، مجموع بردارها، ضرب‌بردار در یک عدد، ضرب داخلی دو بردار و جدا کردن برداری از یک نقطه. خط (از این به بعد «خط» را **همیشه** به معنای «خط مستقیم» بکار می‌بریم)، صفحه، تساوی‌اشکال و غیره توسط همین مفاهیم و نسبتهای اولیه تعریف می‌شوند. اصول موضوعهٔ ویل‌از اینقرارند:

گروه I ـ اصول جمع برداری (اصول گروهی):

نسبت اصلی ـ به هردو بردار **a** و **b** منحصراً یک بردار سوم بنام حاصل‌جمع تعلق می‌گیرد که با **a+b** نموده می‌شود.

I_1 — بازاء هرسه بردار غیر مشخص **a** و **b** و **c** داریم:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

I_2 — به‌ازاء هردو بردار **a** و **b** داریم:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

I_3 — برداری مانند بردار **o** (صفر) چنان موجود است که:

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$$

I_4 — به‌ازاء هربردار **a** برداری مانند $\mathbf{a}^{-1}$ چنان موجود است که :

$$\mathbf{a}+\mathbf{a}^{-1}=\mathbf{o}$$

گروه II ـ اصول ضرب بردارها در یک عدد (اصول فضای خطی).

نسبت اصلی ـ به هرعدد حقیقی K و هربردار **a** منحصراً یک بردار جدید به نام حاصلضرب **a** در K تعلق می‌گیرد که با $K\mathbf{a}$ نموده می‌شود.

$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$	$\forall \mathbf{a}$	II_1
$K(l\mathbf{a})=(Kl)\mathbf{a}$	$\forall \mathbf{a}\ ,\ \forall k , l\ ;\ K , l\in R$	II_2
$(K+l)\mathbf{a}=K\mathbf{a}+l\mathbf{a}$	$\forall \mathbf{a}\ ,\ \forall k , l\ ;\ K , l\in R$	II_3
$K(\mathbf{a}+\mathbf{b})=K\mathbf{a}+K\mathbf{b}$	$\forall \mathbf{a} , \mathbf{b}\ ,\ \forall k\ ;\ K\in R$	II_4

گروه III ـ اصول حاصلضرب داخلی (اصول متر یک).

نسبت اصلی ـ به هردوبردار یک عدد منحصر (حقیقی) تعلق می گیرد که حاصلضرب داخلی (عددوار) نامیده و با $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (یا $(\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b})$) نموده می‌شود.

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	$\forall \mathbf{a} , \mathbf{b}$	III_1
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$	$\forall \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}$	III_2
$(K\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=K(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$	$\forall \mathbf{a} , \mathbf{b}\ ,\ \forall k\ ;\ K\in R$	III_3
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geqslant 0$	$\forall \mathbf{a}$	III_4

($\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ مربع بردار **a** نام دارد و با $\mathbf{a}^2$ نشان داده می‌شود. عدد $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ را با $|\mathbf{a}|$ نشان می‌دهند و طول بردار **a** می‌نامند).

III_5 تساوی $\mathbf{a}^2=0$ فقط وقتی صادق است که $\mathbf{a}=\mathbf{o}$ باشد.

گروه IV ـ اصول وابستگی :

تعریف ـ بردارهای $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ و ... و $\mathbf{a}_m$ را وقتی **به طور خطی وابسته** گویند که اعدادی نظیر K_1 و K_2 و ... و K_m (که همه در آن واحد صفر نیستند) چنان موجود باشد که داشته باشیم :

$$K_1\mathbf{a}_1+K_2\mathbf{a}_2+\cdots+K_m\mathbf{a}_m=\mathbf{o}$$

بردارهائی که به طور خطی وابسته نباشند **به طور خطی مستقل** می‌نامند.

IV_1 ـ ۳ بردار به طور خطی مستقل موجود است.

IV_2 ـ هرچهار بردار، به طور خطی وابسته‌اند.

گروه V ـ اصول جدا کردن بردارها :

نسبت اصلی ـ هردونقطهٔ A و B منحصراً یک‌بردار **a** را که با $\overrightarrow{AB}$ نشان داده می‌شود مشخص می‌سازند.

V_1 ـ به‌ازاء هر نقطهٔ Aوهربردار **a** نقطه‌ای مانند B چنان موجوداست که : $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ (دراینحال گویند نقطهٔ B براثر جدا کردن بردار **a** از نقطهٔ A بدست آمده است).

V_2 ـ به ازاء هر سه نقطهٔ A و B و C (که متمایز بودن آنها الزامی نیست) داریم :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

V_3 ـ اگر داشته باشیم : $\mathbf{a}=\mathbf{o}$ ، نقاط A و B برهم منطبقند.

اصول موضوعهٔ هندسهٔ **ویل** به همین پنج گروه ختم می‌شود.

حال قبل‌از اینکه به شرح پی‌ریزی هندسه براساس ویل بپردازیم لازم است اندکی به ارزش علمی آن اشاره کنیم.

ارزش اساسی روش هیلبرت که **ضامن** موفقیتش در قبال سیستمهای مبانی هندسهٔ نزدیک به زمان او (ازقبیل م . پیرو ، و **ف . کاگان** و دیگران) شده همان مبنای تقسیم بندی اصول موضوعهٔ **او** برپایهٔ گروههای مجزاست. هریک از این گروهها شامل اصولی است که مشخص فلان یا بهمان دسته‌ازخصوصیات فضای اقلیدسی می‌باشد (اصل تعلق ، اصل ترتیب **و** اصل توازی). اصول موضوعهٔ هیلبرت علاوه برآنکه «دستجمعی» هندسهٔ کاملی را به‌وجود می‌آورند،قسمتی از آنها نیز می‌توانند مبنائی برای دستگاههای هندسی دیگر باشند. مثلاً اگر از اصول موضوعهٔ هیلبرت‌اصل تساوی را حذف کنیم به هندسه‌ای که فاقد **متر یک فضای آفین** است می‌رسیم ، و وقتی اصل توازی را در آن ندیده بگیریم **هندسهٔ مطلق** را بدست می‌آوریم. بالاخره اگر بجای اصل توازی اصل منفی آن را جانشین سازیم هندسهٔ اصل موضوعی **اقلیدسی لباچفسکی** را پیدا خواهیم کرد. اهمیت دیگرهندسهٔ هیلبرت،صرفنظر از خواص فوق ، در قرابتی‌است که‌با هندسه های مختلف **غیر ارشمیدسی** (که روش واحدی برای اندازه‌گیری پاره خطها در آنها نیست) دارد.

دستگاه‌اصول موضوعهٔ **ویل** عیناً همین مزایا را دارد. اصول گروههای I و II مفهوم **فضای برداری** را که درتمام شئون‌ریاضی نقش درجهٔ اول‌را به عهده دارد وارد می‌سازند. این مفهوم در جبر نو ، هندسه، نظریهٔ‌توابع ، نظریهٔ‌احتمال،فیزیک نظری ، بیولوژی ریاضی ، اقتصاد وزبانشناسی به کار می‌رود. بطور کلی می‌توان گفت که هیچ شاخه‌ای از علوم نیست که هنگام مطالعهٔ پدیده‌هایش از لحاظ ریاضی ، به **دخالت فضای برداری** نیاز نداشته باشد. اصول گروههای I و II و V معرف **فضای‌آفین** هستند. اصول گروه IV نقش اساسی را در خود هندسهٔ «اصل موضوعی» ویل بازی می‌کنند.

در اصول IV_1 و IV_2 اگر بجای‌اعداد۳و۴ بترتیب اعداد۲و۳ را بگذاریم به **هندسهٔ مسطحه** واگر اعداد n و n+۱ رابگذاریم به فضای به اصطلاح n‌ـ **بعدی اقلیدسی** (یا آفین) که نقش مهمی درریاضیات

نو و قضایای مربوط به آن دارد (که با بیان اصول هیلبرت به دشواری بآن می‌توان رسید) دست خواهیم یافت. مختصر تغییر دیگر در اصول گروه IV منجر به پیدایش فضای (بینهایت بعدی) هیلبرت خواهد شد که در آنالیز جدید و فیزیک نظری (و بخصوص در مکانیک کوانتوم) اهمیت به سزائی دارد. و اگر در اینحال خود را به فضای دو بعدی محدود نمائیم می‌توانیم نشان دهیم که در صورت کنار گذاردن اصل III_4 و قبول کردن وجود بردارهای غیر صفری نظیر $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ با خاصیت $\mathbf{a}_1^2 > 0$ و $\mathbf{a}_2^2 < 0$ ، به مفهوم فضای شبه اقلیدسی مینکوفسکی که بنیان ریاضی اینشتین برآن استوار شده خواهیم رسید. و اگر اصل III_4 را حفظ کرده بجای اصل III_5 ،اصل وجود بردارهای غیرصفر $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ باخاصیت $\mathbf{a}_1^2 > 0$ و $\mathbf{a}_2^2 = 0$ را بپذیریم به هندسهٔ باصطلاح **نیم اقلیدسی** که ارتباطش با مکانیک کلاسیک گالیله و نیوتن عیناً نظیر ارتباط هندسهٔ شبه اقلیدسی با مکانیک(نسبیت) اینشتین است خواهیم رسید. (فضاهای شبه اقلیدسی و نیم اقلیدسی چندین بعدی ، بخصوص چهاربعدی ، را هم که خواص **فضا ـ زمان** محیط برمارا بنحو دقیقتری بیان می کند میتوان به همین ترتیب معین نمود). بالاخره اگر **نام** موجودات **فضای برداری ۳ بعدی** را تغییر دهیم ـ مثلاً نقطه را زیر فضای فضاهای یک بعدی (خط) و خط را زیر فضای فضاهای دو بعدی (صفحه) بنامیم ـ به هندسهٔ تصویری مسطحه می‌رسیم. و اگر به موجودات فضای اقلیدسی ۳ بعدی ، در فضای شبه اقلیدسی نام دیگری بدهیم به هندسهٔ مسطحهٔ غیر اقلیدسی ریمان ـ لباچفسکی می‌رسیم (هندسهٔ تصویری فضائی و هندسهٔ غیر اقلیدسی را هم می‌توان از هندسهٔ چهار بعدی ، که براساس طرح ویل تعریف شده و هندسهٔ $n-$ بعدی را از هندسهٔ $n+1-$ بعدی بدست آورد). بدیهی است که نظیر این سلسله تغییرات را که در طرح ویل داده‌ایم بازهم ممکن است انجام داد.

بدین ترتیب ملاحظه می کنیم که مزیت اصلی هندسهٔ « اصل موضوعی » **ویل** برهندسهٔ « اصل موضوعی» هیلبرت وجود «طرح»های باروری است که بالقوه در بطن آن نهفته است. گذشته از آن اصول هندسهٔ هیلبرت ، در حقیقت ، معطوف به گذشتهٔ هندسه بوده ، مراحل مختلف تکامل تاریخی علمی فضا را که در هندسه های پیشین نظیر هندسهٔ اقلیدسی لباچفسکی و هندسهٔ غیر ارشمیدسی **ورونز** صورت گرفته برما روشن می‌سازد. درحالی که منبع درخشندگی ساختمان هندسهٔ ویل همان جهت گیری آن به سوی آینده و همبستگی نزدیکش با فعالترین و گسترش یابنده‌ترین شاخه های علوم معاصر است.

۳ـ بنای هندسه براساس طرح ویل :

اکنون مراحل اساسی پی‌ریزی هندسه را براساس طرح ویل باختصار مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

الف ـ نخستین نکتهٔ قابل ملاحظه در این هندسه نتایج جبری روشنی است که می‌توان از اصول I و II و IV آن بدست آورد.

مثلاً اصل I_3 بیان می کند که بردارصفری (ولویکی) وجود دارد بی‌آنکه منحصر بودن‌آن را ذکر نماید. عین‌این ادعا برای بردارهای متقابل(اصل I_4) هم صادق است. ولی می‌توان ، بااستفاده ازاصول ثابت کرد که بردارصفر منحصراست و هربردار $\mathbf{a}$ منحصراً یک بردار متقابل $(-\mathbf{a})$ دارد واز آنجانتیجه گرفت

که معادلهٔ $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$ همیشه یک جواب منحصر دارد که از آن به مفهوم تفاضل بردارها $(\mathbf{b}-\mathbf{x}=\mathbf{a})$ می‌توان رسید. بعلاوه هرمعادله‌ای به‌صورت $\mathbf{a}+K\mathbf{x}=\mathbf{b}$ $(K \neq o)$ نیز یک جواب بیشترندارد. وانگهی بااستفاده از اصول، روشن می‌شود که تساویهای برداری عیناً نظیر تساویهای عددی هستند. مثلاً می‌توان عاملی را از یک طرف معادله به طرف دیگر آن (با تغییر علامت) نقل و عوامل مشابه را حذف کرد و ...
و همچنین ثابت می‌شود:

$$-(K\mathbf{b})=(-K)\mathbf{b} \quad \text{و} \quad K\mathbf{o}=\mathbf{o} \quad \text{و} \quad o\mathbf{b}=\mathbf{o} \quad (\forall \mathbf{b}, \forall k ; K \in R)$$

این قسمت اول هندسه بااثبات اینکه هربردار غیر مشخص $\mathbf{a}$ را می‌توان بطور خطی به یک طریق برحسب هرسه بردار بطور خطی مستقل $\mathbf{e}_۱$ و $\mathbf{e}_۲$ و $\mathbf{e}_۳$ بیان نمود، به پایان می‌رسد:

$$\mathbf{a}=K_۱\mathbf{e}_۱+K_۲\mathbf{e}_۲+K_۳\mathbf{e}_۳ \qquad (۱)$$

برای پی‌بردن به نقش اصول در این قسمت از هندسه فورمول (۱) را مستقیماً بااستفاده از اصول و قضایائی که قبلاً ذکر شده نتیجه می‌گیریم (به شرط آنکه مفهوم جمع برداری و قانون توزیعی II برای حالتی که بیش از دو بردار وجود دارد، تعمیم داده شده فرض شود):

چون چهار بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{e}_۱$ و $\mathbf{e}_۲$ و $\mathbf{e}_۳$ وجود دارد، طبق اصل $IV_۲$ این چهار بردار به طور خطی وابسته‌اند، یعنی می‌توان اعدادی نظیر α و $\beta_۱$ و $\beta_۲$ و $\beta_۳$، که همه در آن واحد صفر نیستند، چنان پیدا کرد که داشته باشیم:

$$\alpha\mathbf{a}+\beta_۱\mathbf{e}_۱+\beta_۲\mathbf{e}_۲+\beta_۳\mathbf{e}_۳=\mathbf{o} \qquad (۲)$$

اگر $\alpha=o$ باشد خواهیم داشت: $\alpha\mathbf{a}=o\mathbf{a}=\mathbf{o}$. لذا تساوی (۲) به صورت:

$$\mathbf{o}+\alpha_۱\mathbf{e}_۱+\beta_۲\mathbf{e}_۲+\beta_۳\mathbf{e}_۳=\mathbf{o}$$

و یا:

$$\beta_۱\mathbf{e}_۱+\beta_۲\mathbf{e}_۲+\beta_۳\mathbf{e}_۳=\mathbf{o}$$

درمی‌آید ونشان می‌دهد که سه بردار $\mathbf{e}_۱$ و $\mathbf{e}_۲$ و $\mathbf{e}_۳$ به‌طورخطی مستقل نیستند. پس باید: $\alpha \neq o$ باشد.
حال از ضرب‌طرفین معادلهٔ (۲) در $\frac{۱}{\alpha}$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\alpha}(\alpha\mathbf{a}+\beta_۱\mathbf{e}_۱+\beta_۲\mathbf{e}_۲+\beta_۳\mathbf{e}_۳)=\frac{۱}{\alpha}\mathbf{o}=\mathbf{o} \qquad (۳)$$

طرف اول را طبق $II_٤$ بسط می‌دهیم:

$$\frac{۱}{\alpha}(\alpha\mathbf{a})+\frac{۱}{\alpha}(\beta_۱\mathbf{e}_۱)+\frac{۱}{\alpha}(\beta_۲\mathbf{e}_۲)+\frac{۱}{\alpha}(\beta_۳\mathbf{e}_۳)=\mathbf{o} \qquad (٤)$$

و طبق اصول $II_۱$ و $II_۲$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha \mathbf{a}) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

و همچنین :

$$\frac{1}{\alpha}(\beta_1 \mathbf{e}_1) = \frac{\beta_1}{\alpha}\mathbf{e}_1 \text{ و } \frac{1}{\alpha}(\beta_2 \mathbf{e}_2) = \frac{\beta_2}{\alpha}\mathbf{e}_2 \text{ و } \frac{1}{\alpha}(\beta_3 \mathbf{e}_3) = \frac{\beta_3}{\alpha}\mathbf{e}_3$$

پس معادلهٔ (۴) به صورت زیر در می‌آید :

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\mathbf{e}_1\right) + \left(-\left(\frac{\beta_2}{\alpha}\mathbf{e}_2\right)\right) + \left(-\left(\frac{\beta_3}{\alpha}\mathbf{e}_3\right)\right)$$

و با استفاده از تساوی $-(K\mathbf{b}) = (-k)\mathbf{b}$ خواهیم داشت :

$$\mathbf{a} = \left(\frac{-\beta_1}{\alpha}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{-\beta_2}{\alpha}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{-\beta_3}{\alpha}\right)\mathbf{e}_3$$

که اگر K_1 و K_2 و K_3 بترتیب برابر $\frac{-\beta_1}{\alpha}$ و $\frac{-\beta_2}{\alpha}$ و $\frac{-\beta_3}{\alpha}$ فرض شوند خواهیم داشت :

$$\mathbf{a} = K_1\mathbf{e}_1 + K_2\mathbf{e}_2 + K_3\mathbf{e}_3$$

که همان تساوی (۱) می‌باشد.

بعد باید ثابت کرد که $\mathbf{a}$ منحصراً به یک صورت تجزیه می‌شود . یعنی اگر علاوه‌بر (۱) بتوانیم بنویسیم :

$$\mathbf{a} = K'_1\mathbf{e}_1 + K'_2\mathbf{e}_2 + K'_3\mathbf{e}_3$$

الزاماً خواهیم‌داشت : $K_1 = K'_1$ و $K_2 = K'_2$ و $K_3 = K'_3$ (که اثبات این‌امر هم ساده بوده به‌کمک تعریف ۳ بردار بطور خطی مستقل صورت می گیرد).

ب - اکنون که جبر بردارها را مطالعه کردیم می‌توانیم مفهوم **خط** و **صفحه** را **وارد** کنیم :

تعریف ۱- اگر A و B دو نقطهٔ متمایز باشند خط AB مجموعهٔ‌نقاطی است مانند M که بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ بطور خطی وابسته باشند. از این تعریف ، بلافاصله نتیجه می‌شود که از هردو نقطهٔ متمایز یک خط می گذرد و این خط منحصر است.

قضیهٔ ۱- اگر P و Q دو نقطهٔ متمایز از خط AB باشند PQ بر AB منطبق است.

این قضیه بیان می کند که خط مستقیم توسط هردو نقطه‌اش مشخص می‌شود.

تعریف ۲- اگر A و B و C سه نقطهٔ واقع بریک خط نباشند صفحهٔ ABC مجموعهٔ نقاطی است‌مانند M که بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ بطور خطی وابسته باشند.

قضیهٔ ۲- اگر P و Q و R سه نقطه از یک‌صفحهٔ ABC غیر واقع بریک‌خط باشند ، صفحهٔ PQR برصفحهٔ ABC منطبق است.

این قضیه معرف این واقعیت است که صفحه توسط هرسه نقطهٔ غیر واقع بریک استقامتش معین می‌شود.

قضیهٔ ۳ـ اگر دو نقطه از یک خط مفروض l در صفحه‌ای مانند α واقع باشد تمام نقاط آن داخل این صفحه خواهند بود (دراینحال l را منطبق برصفحهٔ α گویند).

قضیهٔ ۴ـ اگر دو صفحه در یک نقطه شریک باشند حتماً دربیش از یک نقطه شریک خواهند بود.

قضیهٔ ۵ـ دو صفحهٔ غیر مشخص یا منطبقند، یا نقطهٔ مشترکی ندارند و یا مجموعهٔ همهٔ نقاط مشترکشان یک خط مستقیم پدید می‌آورند.

تعریف ۳ـ دو صفحه وقتی موازیند که یا منطبق باشند **و** یا نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

ملاحظه می‌کنیم که دراینجا، برخلاف سنت‌جاری در هندسهٔ دبیرستانی، دوصفحهٔ منطبق (مطابق تعریف) موازی گرفته می‌شوند. البته علت‌این امر اساساً به اصول ویلز بستگی ندارد بلکه صرفاً برای‌تسهیل بیان قضایا و ازبین رفتن «کم دقتیها»ی موجود صورت می‌گیرد. مثلاً بیان قضیهٔ ۶ (که در زیر ذکر می‌شود و معرف خاصیت متعدی بودن مفهوم توازی است) برای درک مفهوم توازی دقیق نیست. در واقع اگر صفحهٔ α برصفحهٔ β منطبق وصفحهٔ γ باآنها موازی‌باشد یعنی $\alpha \parallel \gamma$ و $\gamma \parallel \beta$، هرگز لازم نمی‌آید که α و β موازی باشند (منطبق می‌شوند). برای چنین تفهیمی از توازی، بیان زیر صحیح بنظر می‌رسد: **دو صفحهٔ موازی با صفحهٔ ثالث، یا موازیند و یا منطبق.** از این نوع «کم دقتیها» در بسیاری از قضایای هندسهٔ دبیرستانی می‌توان پیدا کرد.

ولی موضوع اساسی تنها از بین بردن عدم دقت و یا ساده کردن بیان قضایا نیست. می‌دانیم که **نسبتها** (یا بهتر بگوئیم نسبتهای دوتائی) که موجب ارتباط دو موجود می‌شوند نقش بسیار مهمی در کلیهٔ شئون ریاضی دارند. مثلاً نسبت «کوچکتری» برای دو عدد، نسبت «تشابه» برای دو شکل و نسبت «هم‌ارزی» بین دو معادله و غیره ازاین قبیل هستند. مهمترین نوع این نسبتها، نسبتهای هم‌ارزی و نسبتهای ترتیبی هستند. نسبت دوتائی $a\mathbf{R}b$ را وقتی هم‌ارز نامند که انعکاسی، متقارن و متعدی باشد. نسبت وقتی‌انعکاسی است که $\forall a$ داشته باشیم: $a\mathbf{R}a$. وقتی متقارن است که اگر $a\mathbf{R}b$ باشد داشته باشیم $b\mathbf{R}a$. بالاخره نسبت، وقتی متعدی است که وجود $a\mathbf{R}b$ و $b\mathbf{R}c$ وجود نسبت $a\mathbf{R}c$ را ایجاب کند.

تساوی و تشابه دو نسبت هم‌ارزی هستند که همه برآنها وقوف دارند (نسبت کوچکتری جزو نسبتهای ترتیبی است). اهمیت نسبتهای هم‌ارزی در این است که مجموعهٔ همهٔ موجودات را به طبقات هم‌ارز تقسیم می‌کند. هردو موجودی که به یک طبقه متعلقند هم‌ارزند وموجودات‌دو طبقهٔ مختلف هم‌ارز نیستند. لذا کلیهٔ اشکال هندسهٔ مسطحه را می‌توان به طبقات اشکال متشابه و کلیهٔ معادلات را به طبقات معادلات هم‌ارز تقسیم نمود.

مفهوم توازی (در خطوط و صفحات) طبق تعریف هندسهٔ دبیرستانی، یک نسبت هم‌ارزی نیست. زیرا در شرایط انعکاسی و تعدی صدق نمی‌کند. کافیست که‌طبق قرار داد، صفحات (خطوط) منطبق راهم

موازی بشمار آورد تا نسبت توازی به نسبت هم‌ارزی مبدل شود.

با چنین تعریفی دسته‌صفحات (یاخطوط) موازی، طبقات هم‌ارز خواهند بود. وقتی صحبت خطوط در میان باشد اغلب این طبقات هم‌ارز امتدادهای صفحه نامیده می‌شوند. مفهوم امتداد (به معنائی که ما دراینجا وارد کرده‌ایم) در برنامهٔ ریاضیات جدید دبیرستانی گنجانیده شده است.

لذا با قبول تعریف ۳ (که در بالا آورده شده) نه تنها عدم دقت ازبین رفته و بیان قضایا ساده‌تر می‌شود بلکه بااین عمل، هندسه با دید ریاضیات جدید نیز هماهنگ می‌گردد.

قضیهٔ ۶ـ دو صفحهٔ موازی با صفحه سوم، خود موازیند.

قضیهٔ ۷ـ از هرنقطه فقط یک صفحه به موازات صفحهٔ دیگر می‌توان رسم کرد.

بعداز این قضایا مفاهیم توازی خط و صفحه و توازی دو خط پیش می‌آید که قضایای مربوط به آنها اثبات می‌شود.

ج ـ مرحلهٔ بعدی بنای هندسهٔ **ویل** وارد کردن مفهوم تعامد بااستفاده از اصول گروه III است.

تعریف ۴ـ بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$ را وقتی برهم عمود گویند که داشته باشیم: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$.

تعریف ۵ـ دو خط را وقتی عمود گویند که بازاء هردو نقطهٔ A و B در روی اولی و هردو نقطهٔ C و D در روی دومی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برهم عمود باشند.

قضیهٔ ۸ـ اگر بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ $(C\neq D\ ,\ A\neq B)$ برهم عمود باشند خطوط AB و CD برهم عمودند.

تعریف ۶ـ یک خط و یک صفحه را وقتی برهم عمود گویند که بازاء هردو نقطهٔ A و B در روی خط و هردو نقطهٔ C و D در روی صفحه، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برهم عمود باشند.

قضیهٔ ۹ـ اگر خطی برصفحه‌ای عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه عمود می‌شود.

قضیهٔ ۱۰ـ هرگاه خطی بردو خط غیر موازی از صفحه‌ای عمود باشد برآن صفحه عمود است.

قضیهٔ اخیر را که قضیهٔ «دو عمود» نام دارد به عنوان نمونه اثبات می‌کنیم: صفحهٔ مفروض را α و خطوط واقع در آن را l_1 و l_2 و خط عمود بر l_1 و l_2 را a می‌نامیم.

اثبات: فرض می‌کنیم A نقطهٔ تلاقی l_1 و l_2 باشد. نقاط B_1 و B_2 را بترتیب روی l_1 و l_2 (مجزا از A) اختیار می‌کنیم. چون A و B_1 و B_2 برروی یک خط نیستند (زیرا در غیر اینصورت l_1 و l_2 منطبق یعنی موازی می‌شوند) طبق تعریف ۲ وقضیهٔ ۲ بازاء هرنقطهٔ $M\in\alpha$ بردارهای $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB_1}$ و $\overrightarrow{AB_2}$ بطور خطی وابسته بوده می‌توانیم بنویسیم:

$$\overrightarrow{AM}=K_1\cdot\overrightarrow{AB_1}+K_2\cdot\overrightarrow{AB_2}$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که اگر C و D دو نقطهٔ دلخواه از خط a باشد طبق شرط قضیه $(a\perp l_1\ ,\ a\perp l_2)$ خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB_2} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0$$

و لذا :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD} \cdot (K_1 \cdot \overrightarrow{AB_1} + K_2 \cdot \overrightarrow{AB_2}) = \overrightarrow{CD} \cdot (K_1 \cdot \overrightarrow{AB_1}) + \overrightarrow{CD} \cdot (K_2 \cdot \overrightarrow{AB_2})$$

(با توجه به اصول گروه III) :

$$= K_1(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB_1}) + K_2(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB_2}) = K_1 \cdot 0 + K_2 \cdot 0 = 0$$

لذا اگر M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ α باشد خواهیم داشت $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. حال اگر N نقطهٔ دیگری از α باشد بازهم داریم :

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

ولی طبق اصل V_2 داریم :

$$A\vec{M} + M\vec{N} = A\vec{N}$$

و از آنجا :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

و در نتیجه :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad 0 = 0$$

یعنی $a \perp \alpha$ و حکم ثابت است.

قضیهٔ ۱۱ـ از هرنقطه می‌توان فقط یک خط عمود برصفحهٔ مفرضی رسم کرد.

قضیهٔ ۱۲ـ اگر خطی برصفحه‌ای عمود باشد با آن موازی نیست و لذا منحصراً در یک نقطه باآن اشتراک خواهد داشت.

این دوقضیه مبنائی برای تصاویر قائم اشکال واجسام برروی صفحه هستند.

روش بنای بقیهٔ هندسهٔ فضائی (برحسب بیان قضایا) بخصوص قضیهٔ سه عمود، مفهوم زاویهٔ بین دو صفحه، زاویهٔ بین خط و صفحه و غیره، عیناً نظیر روش آنها در هندسهٔ معمولی است. تنها باید یادآوری کنیم که در بنای این هندسه، زاویهٔ بین دو بردار **a** و **b** که با فورمول :

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \qquad (5)$$

تعریف می‌شود مفهوم اساسی اولیه می‌باشد. چنانچه ملاحظه می‌شود، ساختمان این هندسه از لحاظ تعاریف و قضایای اساسی، با هندسهٔ معمولی تفاوت چندانی ندارد. ولی از لحاظ اثبات و قواعد، کاملاً با آن مغایرت دارد و پایهٔ استدلال آن براساس استنتاج پیوسته مبتنی شده است.

٤ـ صور مختلف ساختمان هندسهٔ ویل :

دیدیم که در هندسهٔ اصل موضوعی **ویل** دو مفهوم تعریف نشدهٔ «نقطه» و «بردار» وجود دارد که از لحاظ موقعیت نسبت به همدیگر کاملاً متفاوتند. مفهوم نقطه فقط در آخر اصول گروه V ظاهر می‌شود درحالیکه تمام بنای هندسه تا درجهٔ زیادی براساس بردار نهاده شده است. دراینجا طبیعتاً این سئوال پیش می‌آید که آیا نمی‌شود اصلاً مفهوم نقطه را حذف و تمام هندسه را براساس بردار محض استوارکرد ؟ جواب این سئوال مثبت‌است. یعنی می‌توان‌چنین هندسه‌ای‌را بنانهاد وساختمان‌آن‌با ساختمان قبلی آن تفاوت چندانی نخواهد داشت. هنگام بنای این هندسه باید نقطه را از صورت مفاهیم اولیه حذف کرد و اصول گروه V را مطلقاً کنارگذاشت و «نقاط» ، «خطوط» و «صفحات» را تاحدی متفاوت با آنچه که قبلاً تعریف شده بود تعریف کرد. دراینجا «نقطه» همان «بردار» گرفته می‌شود : می‌دانیم که اگر مبدأ مختصات O ثابت باشد به هرنقطهٔ M **بردار نقطهٔ** $\overrightarrow{OM}$ مربوط می‌شود. لذا دراین هندسه بجای هرنقطهٔ M «بردارنقطهٔ» آن که مشخصاتش در اصول گروههای I—IV ذکر شده است قرار می‌گیرد.

بنابراین ، در بنای هندسهٔ «بدون نقطه» تنها مفهوم اولیه‌ای که می‌ماند «بردار» است با ۳ عمل (نسبت) اولیه‌اش : جمع بردارها ، ضرب بردارها در یک عدد ، و ضرب داخلی بردارها. لذا باید تعاریف و اصول را چنان انتخاب کرد که موجودات اولیه بتوانند در اصول I—IV صدق کنند. پس در این هندسه «نقطه» **مترادف** «بردار» خواهد بود.

بدیهی است که دراین پی‌ریزی قسمت «الف» کاملاً محفوظ می‌ماند (حقایقی که دراین قسمت از آنها صحبت می‌شود فقط براساس گروههای I و II و IV متکی می‌شوند).

قسمت «ب» باتعریف خط وصفحه شروع می‌شود. پس باید این تعاریف بترتیب زیر تغییر نماید :

تعریف ′۱ـ اگر **a** و **b** دو بردارمتمایز باشند خط $<\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}>$ مجموعهٔ همهٔ بردارهائی است نظیر **m** که بردارهای $\mathbf{m}-\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ بطور خطی وابسته باشند.

خط مستقیم توسط هردو نقطهٔ دلخواهش مشخص می‌شود. یعنی قضیهٔ زیر صحیح است :

قضیهٔ ′۱ـ اگر **p** و **q** دو بردار مختلف‌ازخط $<\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}>$ باشند خط $<\mathbf{p}\ ,\ \mathbf{q}>$ برخط $<\mathbf{a}\ ,\ \mathbf{b}>$ منطبق است.

قضیهٔ A ـ اگر a و p ، $(\mathbf{p} \neq \mathbf{o})$ دو بردار دلخواه باشند مجموعهٔ همهٔ بردارهائی به صورت $\mathbf{a}+t\mathbf{p}$ که درآن t عددی است حقیقی و دلخواه خط مستقیمند. هرخطی را ممکن است بدین‌ترتیب مشخص ساخت. (معمولاً بردار **p** را بردار امتداد خط می‌نامند).

اثبات این قضیه بکمک تعاریف و اصول گروه I و II به آسانی صورت می‌گیرد و می‌تواند بنوبهٔ خود مبنائی برای تعریف جدید خط قرارگیرد (دراینحال تعریف ′۱ به صورت قضیه در می‌آید).

تعریف ′۲ـ اگر **a** و **b** و **c** سه بردار غیر واقع بریک خط باشند مجموعهٔ همهٔ بردارهائی نظیر **m**

که درآنها $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ و $\mathbf{m}-\mathbf{a}$ بطورخطی‌وابسته باشند صفحهٔ $<\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}>$ نامیده می‌شوند. همانگونه که برای خط اثبات شده بود می‌توان‌نشانداد که صفحه با هر ۳ نقطه‌اش که برروی یک خط نباشند مشخص می‌گردد.

بااینکه ساختمان بقیهٔ هندسه، دیگر اختلاف‌چندانی با هندسهٔ اولی‌ندارد معهذا بازهم تفاوتهائی به چشم می‌خورد. مثلاً تعریف خطوط موازی اکنون با بیان ساده‌تری صورت می‌گیرد: دو خط l_1 و l_2 را وقتی موازی گویند که بردارهای امتداد $\mathbf{p}_1$ و $\mathbf{p}_2$ ی آنها بطور خطی وابسته باشند.

بدینترتیب مجموعهٔ بردارهائی که در اصول گروههای I—IV صدق می‌کنند عملاً برفضای ۳ بعدی اقلیدسی هندسهٔ دبیرستانی منطبق می‌شود. مجموعهٔ این بردارها را، معمولاً، **فضای برداری (سه بعدی) اقلیدسی** می‌نامند.

ممکن است باز هندسهٔ دیگری هم به سبک ویل ساخت که، به تعبیری، با هندسه‌ای که‌اکنون بنا کردیم متفاوت باشد. به این معنی که بجای اینکه بردار را تنها مفهوم تعریف نشده اختیار کنیم **نقطه** را مفهوم تعریف نشده بگیریم. دراینحال لازم می‌آید که اصول گروه V را که رابط بین نقاط و بردارها هستند کنار بگذاریم، و علاوه برآن ازاصول گروه I هم(که دراینجا به عنوان قضیه اثبات می‌شوند صرفنظر کرده بجای آن اصول گروه جدید I^* را که معرف نسبت (تعریف نشدهٔ) اساسی (ABCD) به شرح زیر است قبول کنیم:

I_1^* ـ اگر (ABCD) صحیح است (ADCB) هم صحیح باشد.

I_2^* ـ اگر (ABCD) صحیح است (CDAB) هم صحیح باشد.

I_3^* ـ اگر (ABCD) و (CDEF)صحیح است (ABFE) هم صحیح باشد.

I_4^* ـ به ازاء هرسه نقطهٔ دلخواه A و B و C نقطهٔ منحصری مانند D چنان موجوداست که داریم: (ABCD).

تعریف الف ـ یک زوج مرتب از نقاط A و B را پاره خط جهت‌دار می‌نامیم و با $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ب ـ پاره خطهای جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را وقتی هم‌ارز خوانیم که داشته باشیم: (ABCD).

به آسانی ثابت می‌شود که این نسبت نسبتی است‌انعکاسی، متقارن ومتعدی و بهمین علت‌می‌توان مجموعهٔ تمام پاره خطهای جهت‌دار را به طبقات هم‌ارز برحسب این نسبت افراز نمود. این طبقات هم‌ارز را (دراین نحوهٔ ساختمان) **بردار** می‌نامیم.

تعریف جمع بردارها ـ بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را اختیار وفرض می‌کنیم $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{a}$ و $\overrightarrow{PQ} \in \mathbf{b}$. حال نقطهٔ دلخواهی مانند O درنظر گرفته، نقاط A و B و C را چنان اختیار می‌کنیم که (طبق اصل I_4^*)

داشته باشیم : (NMOA) و (QPOB) و (AOBC). دراینحال بردار **C** که توسط پاره خط جهت‌دار $\overrightarrow{OC}$ مشخص می‌شود مجموع **a** و **b** نام دارد و با **a+b** نموده می‌شود. به‌آسانی می‌توان اثبات کرد که این تعریف، تعریف دقیقی است. یعنی مجموع **a+b** مستقل از چگونگی بنای هندسه (یعنی مستقل از انتخاب معرفهای $\overrightarrow{MN} \in$ **a** و $\overrightarrow{PQ} \in$ **b** و نقطهٔ O) مشخص می‌شود.

بعد ثابت می‌شود که مجموع بردارها در کلیهٔ اصول گروه I صدق می‌نماید. حال اگر اصول گروههای I و III و IV را هم به اصول گروه *I اضافه کنیم امکان بنای هندسه‌ای به سبک ویل بدست می‌آید. (عمل جدا کردن بردار **a** از یک نقطهٔ A دراینجا چنین تعریف می‌شود : عملی است که ما را به نقطه‌ای مانند C ، $\overrightarrow{AC} \in$ **a** می‌رساند). دراین حال کلیهٔ اصول گروه V اثبات می‌شوند.

اکنون ببینیم کدامیک از دوشقی که درآن برای بنای هندسه ذکر کردیم برای تدریس، در دبیرستانها مناسبتر است؟ چنین بنظر می‌آید که شق اول به علت تجرد و عدم پیوستگی با تجسمات معمولی دانش‌آموزان برای تدریس مناسب نباشد (بااینوصف در بسیاری از کتابهای جدید هندسه که برای دانشگاهها نوشته شده این شق اختیار شده است).

شق دوم به وارد کردن مفهوم بردار برمبنای تصورات هندسی (که در زیر آمده است) نزدیک است ولی از جنبهٔ آموزشی بنظر می‌آید که آن هم جای خود را به هندسه هائی که درقسمتهای ۲ و ۳ اشاره کرده‌ایم بپردازد.

۵- روش مختلط (برداری ترکیبی) بنای هندسه.

برای بنای هندسه راه «حدوسط» دیگری هم وجود دارد که درآن کلیهٔ مسائل مربوط به توازی خطوط و صفحات به طور ترکیبی، بدون استفاده از بردارها بیان می‌شوند و قضایای مربوط به تعامد، به کمک جبر بردارها به ثبوت می‌رسند.

پی‌ریزی اصول **هندسهٔ فضائی** مطابق این دستگاه، در واقع همان بنای ترکیبی هندسهٔ آفین فضای سه بعدی است. حال به‌بینیم که ارائهٔ اصول بدین‌نحو، چگونه و با چه درجه از استحکام منطقی ممکن است صورت گیرد؟ مناسبترین راه، ظاهراً، همان استفاده از دستگاه اصولی است که هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی برپایهٔ آن استوار شده است. به همین دلیل روشن است که وقتی صحبت از صفحات به میان آید باید هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی به عنوان یکی از ارکان اصولی آن مورد توجه قرار گیرد.

ما دراینجا به ذکر یکی از صور این دستگاه اصول می‌پردازیم. مفاهیم اولیه در این دستگاه **نقطه**، **خط** و **صفحه**؛ نسبت بین آنها نسبت «تعلق» است (نقطهٔ A در روی خط l، یا برروی صفحهٔ α قرار دارد. می‌نویسند : $A \in l$ و $A \in \alpha$).

اصل ۱- از هردو نقطه یک خط می‌گذرد و این خط منحصر است.

اصل ۲- در روی هرخط کمتر از دو نقطه وجود ندارد.

اصل ۳ـ از سه نقطهٔ غیرواقع بریک خط یک صفحه می‌گذرد و این صفحه منحصر است .

اصل ٤ـ چهار نقطه وجود دارد که در یک صفحه نباشند .

اصل ۵ـ اگر دو نقطه از خطی در صفحه‌ای واقع باشد تمام نقاط آن در داخل صفحه است .

تعریف ۱ـ اگر همهٔ نقاط یک خط l در یک صفحهٔ α واقع باشد می‌گویند که خط l در صفحهٔ α قرار دارد و با $l \subset \alpha$ نشان می‌دهند .

اصل ٦ـ اگر دو صفحه در یک نقطه مشترك باشند در یک نقطهٔ دیگر هم شریکند .

اصل ۷ـ برای مجموعهٔ همهٔ نقاط و خطوط واقع در یک صفحهٔ دلخواه α ، قوانین هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی صدق می‌کند .

این صورت اصول برای ساختن هندسهٔ اقلیدسی در فضا کافی است و ما در اینجا نشان خواهیم داد که چگونه کلیهٔ قضایای مربوط به توازی خط و صفحه از همین اصول نتیجه می‌شوند و بعد هم به مفهوم تعامد می‌پردازیم .

تعریف ۳ـ دو صفحه را وقتی موازی گویند که یا نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و یا برهم منطبق باشند .

تعریف ـ یک خط را وقتی با یک صفحه موازی گویند که یا نقطهٔ مشترکی باآن نداشته باشد و یا درآن واقع باشد .

قضیهٔ ۱ـ اگر A در روی خط l واقع نباشد صفحهٔ منحصری مانند α چنان موجود است که نقطهٔ A و خط l به‌آن متعلقند .

اثبات ـ فرض می‌کنیم که نقاط B و C برروی خط l واقع باشند (اصل ۲) . ثابت می‌کنیم که نقاط A و B و C روی یک خط واقع نیستند . زیرا اگر فرض کنیم که این ۳ نقطه برروی یک خط m قرار دارند به موجب اصل ۱ خطوط l و m منطبق می‌شوند (هردو از نقاط A و B گذشته‌اند) و چون $A \in m$ است لازم می‌آید $A \in l$ باشد و این خلاف فرض است . پس‌این ۳ نقطه برروی یک خط مستقیم قرار ندارند و لذاصفحه‌ای مانند α ازآنها می‌گذرد(اصل ۳) وچون $B \in \alpha$ و $C \in \alpha$ پس $l \in \alpha$ (اصل ۵ و تعریف ۱) .

مانده است ثابت کنیم که اگر β صفحهٔ غیر مشخصی ماربر A و l باشد این صفحه بر α منطبق خواهد بود . در واقع چون $l \subset \beta$ است پس $B \in \beta$ و $C \in \beta$ (طبق تعریف ۱) بعلاوه $A \in \beta$ است . در نتیجه α و β برهم منطبقند (اصل ۳) .

قضیهٔ ۲ـ اگر خطوط l_1 و l_2 که برهم منطبق نیستند دریک نقطهٔ A اشتراك داشته باشند صفحهٔ منحصری مانند α چنان وجود دارد که برخطوط l_1 و l_2 می‌گذرد .

قضیهٔ ۳ـ از هرنقطهٔ مفروض A منحصراً یک خط می‌گذرد که با خط مفروض l موازی باشد .

یادآوری می‌کنیم که این قضیه با اصل توازی که در هندسهٔ مسطحه دیده بودیم یکی نیست. زیرا دراینجا صحبت از نقاط و خطوط واقع در **فضاست**.

قضیهٔ ٤ـ هردو صفحهٔ α و β یا موازی هستند و یا مجموعهٔ نقاط مشترکشان یک خط مستقیم تشکیل می‌دهند.

تعریف ٥ـ دو صفحهٔ غیر موازی را متقاطع نامند.

بدینترتیب طبق قضیهٔ ٤ مجموعهٔ تمام نقاط مشترک دوصفحهٔ متقاطع α و β خط مستقیمی است مانند l . همچنین می‌گویند که صفحات α و β یکدیگر را در خط l می‌برند.

قضیهٔ ٥ـ اگر خط l با خط m موازی و $m \subset \alpha$ باشدآنگاه $l \parallel \alpha$.

قضیهٔ ٦ـ اگر $l \parallel \alpha$ و $A \in \alpha$ باشد خط m موازی l ماراز نقطهٔ A ، درصفحهٔ α قرارخواهدداشت.

اثبات ـ اگر $A \in l$ باشد خط m باید بر l منطبق باشد (طبق تعریف خطوط موازی) و خط l باید در صفحهٔ α واقع باشد (طبق تعریف توازی خط و صفحه) در نتیجه $m \subset \alpha$.

حال‌فرض می‌کنیم $A \notin l$ باشد صفحهٔ ماربر A و l را با β نشان می‌دهیم (قضیهٔ ٢). اگر β بر α منطبق باشد پس $l \subset \alpha$ و بهمین‌دلیل $m \subset \alpha$ است (طبق تعریف توازی خطوط).

بالاخره فرض می‌کنیم α و β منطبق‌نباشند. چون $A \notin \alpha$ و $A \notin \beta$ است پس صفحات α و β همدیگررا درخط مستقیمی مانند n قطع می‌کنند. بدیهی است که خطوط l و n نقطهٔ مشترکی نداشته (زیرا $n \subset \alpha$ و خط l نقطهٔ مشترکی با α ندارد) و چون $l \subset \beta$ و $n \subset \beta$ است پس $n \parallel l$. لذا خطوط m و n منطبقند (قضیهٔ ٣) و بنابراین $m \subset \alpha$.

قضیهٔ ٧ـ اگر خط مستقیم l با دو صفحهٔ α و β که در خط مستقیم n مشترکند موازی باشد داریم: $l \parallel m$.

قضیهٔ ٨ـ اگر $l \parallel m$ و $m \parallel n$ باشدآنگاه $l \parallel n$ خواهد بود.

از قضایای ٣ و ٨ نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تمام خطوط موازی با خط مفروض l تمام فضا را اشغال می‌کنند. این خطوط دو بدو موازیند (و بالنتیجه هردو خط از این خطوط یا منطبقند و یا نقطهٔ مشترکی ندارند). این مجموعه‌خطوط (دو بدو موازی که تمام فضا را اشغال می‌کنند) دسته **خطوط موازی** نام دارند.

قضیهٔ ٩ـ اگر $\alpha \parallel l$ و $\beta \parallel \alpha$ باشدآنگاه $\beta \parallel l$.

قضیهٔ ١٠ـ اگر $l \subset \alpha$ و $m \subset \alpha$ و $l \nparallel m$ و $l \parallel \beta$ و $m \parallel \beta$ باشدآنگاه $\beta \parallel \alpha$.

قضیهٔ ١١ـ از هرنقطهٔ A منحصراً یک صفحه می‌گذرد که با صفحهٔ مفروض α موازی باشد.

قضیهٔ ١٢ـ اگر $\beta \parallel \alpha$ و $\gamma \parallel \beta$ باشدآنگاه $\gamma \parallel \alpha$.

از قضایای ۱۱ و ۱۲ چنین نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تمام صفحاتی که با صفحهٔ مفروض α موازی باشند تمام فضارا اشغال می‌کنند. این مجموعهٔ صفحات‌دو بدو موازی را **دسته صفحات موازی** می‌نامند.

بعد مسئلهٔ وضع‌دو خط در فضا و همچنین وضع‌خط و صفحه در فضا نسبت به همدیگر موردمطالعه قرار خواهد گرفت (بخصوص تقاطع دو خط تعریف می‌شود و مسئلهٔ مرور دادن صفحات موازی بردو خط متقاطع بررسی خواهد شد).

قضیهٔ ۱۳ـ هرصفحهٔ α فضا را بدو قسمت بنام نیمفضا تقسیم می‌کند. خاصیت این نیمفضاها اینست که اگر دو نقطهٔ A و B در یکی ازاین نیمفضاها قرارگیرد پاره خط AB صفحهٔ α را نمی‌برد. واگر این دو نقطه در دو نیمفضای مختلف باشند پاره خط AB صفحهٔ α را می‌برد.

اثبات این قضیه به‌کمک اصل ۸ (با فرض اینکه دانش‌آموزان می‌دانند که خط صفحه را به دو نیمصفحه تقسیم می‌کند) صورت می‌گیرد.

آخرین مفهومی که دراین قسمت وارد می‌کنیم مفهوم **امتداد** (**در فضا**) است. دراینجا فرض می‌کنیم که (طبق اصل ۷) دانش‌آموزان‌بامفهوم امتداد در روی خط و در روی صفحه آشنا هستند. بخصوص **امتداد در روی یک خط** با زوج مرتب نقاط A و B $(A \neq B)$ مشخص می‌شود. و می‌گویند: «امتداد از A به B» در روی خط مفروض. در روی خط دو امتداد مختلف وجود دارد. خطی که در روی آن‌امتدادی داده شده باشد **خط جهت‌دار** نامیده می‌شود. دو خط موازی جهت‌دار در یک صفحه می‌توانند، **همجهت** یا **مختلف‌الجهت** باشند. از این پس می‌توان دو خط موازی همجهت را در فضا تعریف کرد (زیرا دو خط موازی همیشه در یک صفحه قرار دارند). اثبات می‌شود که نسبت همجهت‌بودن خطوط موازی (در فضا) یک نسبت متعدی است. بهمین جهت می‌توان در روی تمام دسته خطوط موازی امتدادهائی چنان اختیار کرد که هردو خط همجهت باشند. این دسته خطوط موازی **همجهت** را **امتداد فضا** می‌نامند. یادآوری می‌کنیم که بکمک این صفحات موازی است که یافتن تصاویر موازی اشکال فضائی در روی یک صفحه و همچنین بررسی روشهای نمایش اجسام فضائی در روی صفحه میسر می‌گردد.

۶ـ مفهوم تعامد در هندسهٔ مختلط:

هنگام تعریف بردارها بسهولت می‌توان‌از مفهوم امتداد که به روش معمولی وارد می‌شوداستفاده نمود. مجموع بردارها و حاصلضرب یک عدد در بردار نیز به طریقهٔ معمولی وارد می‌شود. بدیهی است که دراینجا باید خواص‌این اعمال ثابت شود (اصول گروهها I و II). زیرا مفهوم بردار درفرضهای‌اولیه وجود ندارد و توسط اصول توضیح داده نمی‌شود. درحقیقت باید بگوئیم که اثبات کلیهٔ خواص اعمال‌جمع بردارها و ضرب آنها در یک عدد (و قضایای وابسته به آنها) هم برای بردارهای واقع درصفحه و هم برای بردارهای فضا کاملاً یکسان صورت می‌گیرد.

اکنون به تعریف ضرب بردارها در همدیگر می‌پردازیم. تعریف ضرب بترتیب زیر صورت میگیرد:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\begin{cases}|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha & \text{اگر } \alpha \text{ زاویهٔ بین } \mathbf{b},\mathbf{a} \text{ و } \mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{o} \text{ باشد :}\\ 0 & \text{اگر یکی از بردارهای صفر باشد :}\end{cases}$$

از این تعریف مستقیماً صحت خواص مشکلهٔ اصول III_1 و III_3 و III_4 و III_5 نتیجه می‌شود.

مانده است خاصیت **توزیعی بودن** حاصلضرب داخلی را اثبات کنیم (اصل II_2).

اما اثبات این خاصیت تا حد زیادی مشکلتر از اثبات تمام خواص دیگر آن است. انتخاب این وسیلهٔ اثبات، در حالت کلی، با ساختمان تمامی هندسه ملازم است. در کتابهای هندسهٔ تحلیلی که برای تدریس در دانشکده‌ها نوشته شده این امر به کمک قضیهٔ تصاویر صورت می گیرد. در این قضیه، تصاویر بردارها برروی یک خط، به کمک صفحات عمود برآنها بدست می‌آید. ولی این امر هنگامی عملی است که دانش‌آموز با مفهوم تعامد خط و صفحه و قضایای مربوط به آن (قضیهٔ دو عمود) قبلاً آشنائی داشته باشد. بدیهی است در دستگاهی که ما اختیار کرده‌ایم این وسیله، برای اثبات توزیعی بودن ضرب داخلی ممکن نیست (هنوز دانش‌آموز قضیهٔ دو عمود و مفهوم تعامد خط و صفحه را نمی‌داند). بالعکس تمام تلاشها سرانجام منتهی به این می‌شود که برای وارد کردن مفهوم تعامد خط و صفحه و کلیهٔ قضایای مربوط به آن باید از حاصلضرب داخلی (که توزیعی بودن آن به‌نحوی از انحاء ثابت شده) استفاده کرد.

بنابراین دشواری‌اساسی در بنای هندسه بااین طرح، اثبات توزیعی بودن حاصلضرب داخلی‌است.
یکی از روشهای پیشنهادی که خیلی نزدیک به‌روش **ژ ـ شوکه** ریاضیدان‌فرانسوی است، روش آ ـ اسکوپتس است که به شرح زیر می‌باشد:

اول ثابت می‌شود که برای هردو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ فورمولهای زیر صحیح است:

$$\begin{cases}(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2\\ (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2\end{cases} \qquad (6)$$

لازم به یادآوری‌نیست که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ همه در یک صفحه قرار دارند وبه همین‌دلیل فورمولهای (۶) معرف حقایقی از هندسهٔ مسطحه هستند و اثبات آنها هم باید (به همین علت) به کمک هندسهٔ مسطحه صورت‌گیرد (طبق اصل ۷، قوانین هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی درهرصفحه صدق می‌نماید).
مثلاً فورمولهای (۶) را ممکن است یا از قضیهٔ جیب تمامها بدست آورد (این فورمولها درحقیقت همان نمایش برداری قضیه جیب تمامها است) و یا با استفاده از نظریهٔ تصاویر برروی صفحه. در حالت اخیر قضیهٔ جیب تمامها به سادگی از فورمول (۶) بدست می‌آید.

اکنون که روابط (۶) به یکی از طرق اثبات شد، اثبات قانون توزیعی:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{ac}+\mathbf{bc} \qquad (7)$$

صرفاً با روش جبری بترتیب زیر صورت خواهد گرفت. فرض می کنیم:

$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{n}$ و $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{m}$

لذا از فورمولهای (٦) نتیجه می‌شود :

$$(\mathbf{m}+\mathbf{n})^{2}+(\mathbf{m}-\mathbf{n})^{2}=2\mathbf{m}^{2}+2\mathbf{n}^{2}$$

و یا :

$$[2\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})]^{2}+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^{2}=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{2}+2(\mathbf{a}+\mathbf{c})^{2}$$

و یا از بسط دو طرف تساوی خواهیم داشت :

$$4\mathbf{a}^{2}+4\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})+(\mathbf{b}+\mathbf{c})^{2}+(\mathbf{b}-\mathbf{c})^{2}=2\mathbf{a}^{2}+4\mathbf{ab}+2\mathbf{b}^{2}+2\mathbf{a}^{2}+4\mathbf{ac}+2\mathbf{c}^{2}$$

و یا :

$$4\mathbf{a}^{2}+4\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})+2\mathbf{b}^{2}+2\mathbf{c}^{2}=4\mathbf{a}^{2}+4\mathbf{ab}+4\mathbf{ac}+2\mathbf{b}^{2}+2\mathbf{c}^{2}$$

و یا :

$$4\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=4\mathbf{ab}+4\mathbf{ac}$$

و یا بالاخره :

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}$$

یعنی حکم ثابت است.

حال به‌بینیم معنای این عملیات چیست ؟ اگر خوب دقت کنیم ملاحظه خواهیم کرد که قانون توزیعی (٧) در حقیقت، واقعیتی از هندسهٔ فضائی است (زیرا سه بردار **a** و **b** و **c** را که ممکن است در یک صفحه نباشند بهم مربوط می‌سازد) و همانطوری که قبلاً یادآور شدیم فورمولهای (٦) فورمولهای هندسهٔ مسطحه است. بدینترتیب نتایج محاسبات جبری فوق « معیاری » برای بدست آوردن حقیقت فضائی (٧) بااستفاده از خاصیت (٦) هندسهٔ مسطحه است[1].

تردیدی نیست که این نتیجه گیری اخیر ما از نظر آموزشی چندان اهمیتی ندارد و ماهیت هندسی این استدلال از دید دانش‌آموز پنهان می‌ماند. تهیهٔ تصویر یا قالب فضائی برای آنها ممکن نیست: اثبات فوق‌الذکر صرفاً جنبهٔ محاسباتی دارد و بس.

اکنون که کلیهٔ خواص حاصلضرب‌داخلی (از جمله توزیعی بودن آن) اثبات شد مفهوم تعامد به همان ترتیبی که در ساختمان هندسهٔ **ویل** وارد شده بود وارد می‌شود. تنها تفاوتش باآن این است که‌مفهوم زاویهٔ بین دو بردار (که در حقیقت یک واقعیت هامنی است) دراینجا، تا وارد کردن حاصلضرب داخلی معلوم فرض می‌شود و به همین دلیل فورمول (٥) فورمول اساسی برای وارد کردن مفهوم زاویه نبوده از تعریف ضرب داخلی نتیجه می‌شود.

نتیجه ـ برای پی‌ریزی هندسهٔ فضائی (دبیرستانی) دو روش در بالا ذکر کردیم. بدیهی است که به موازات این دو، راه سومی هم وجود دارد : ابتدا هندسهٔ فضائی با روش معمولی (در ضمن گنجانیدن

---

١ ـ چون فورمولهای (٦) نتیجهٔ قانون توزیعی بودن (٧) برای بردارهای واقع در یک صفحه است می‌توان گفت که قدرت استنتاج ما قانون توزیعی بودن هندسهٔ فضائی را از قانون متناظرش در هندسهٔ مسطحه استخراج کرده است.

تعامد خط و صفحه در آن) و سپس براساس آن جبر بردارها بنا می‌شود (که نقص این روش را قبلاً یادآور شدیم) و روش دشوار اثبات توزیعی بودن ضرب داخلی هم از نظر دور نمی‌ماند.

پس بدین ترتیب دو روش بنای هندسه که در قسمتهای ۲و۳و۴و۶ ذکر کردیم باقی می‌ماند که باید اساسی بشمار آید. اما اگر سؤال شود که: کدامیک از این دو روش برای تدریس بهتر و مناسبتر است؟ باید بگوئیم که تجربه در آینده باید به این سئوال پاسخ دهد. ولی معهذا از هم اکنون می‌توان با توجه به استقراء علمی و تعلیم و تربیتی، پیش‌بینی کرد که روش اول (طرح ویل) که از وراء آن آینده بهتر دیده می‌شود جای خود را زودتر باز خواهد کرد.

منابع این مقاله

1 – Mathematiques Modernes ; A. Calame ; 1967 , Tom 1,3 ; Diffusion Dunod ; Paris .

2 – Mathematiques Modernes ; H. Suter ; 1966 ; Tom 1,2 ; Editions du Griffon , Neuchatel .

3 – MATEMATIKA V SHkole , 1969 , MOSKVA.