حل دستگاه معادلات خطی از راه تجزیه

دکتر نیکخواه بهرامی - استاد گروه مکانیک دانشکده فنی دانشگاه تهران

ایرج هرسینی - دانشجوی فوق لیسانس گروه مکانیک دانشکده فنی دانشگاه تهران

خلاصه:

حل دستگاه معادلات خطی، بیش از هر مسأله دیگر محاسبات عددی از دیرباز مورد توجه بوده است. امروزه نیز کاربرد کامپیوتر در حل مسایل علوم و مهندسی و لزوم حل دستگاه معادلات نسبتاً بزرگ موجب شده است که روشهایی جدید و الگوریتمهایی مؤثرتر برای روشهای کلاسیک ارائه شود. اساس همه این روشها مانند هر روش عددی دیگر دقت، سرعت بالا و حافظه کامپیوتری کمتر می‌باشد.

روش تجزیه‌ای که در این مقاله ارائه شده یک روش عمومی جدید است. اساس این روش، تجزیه ماتریس ضرایب $n \times n$ به n ماتریس خاص است که پس از به دست آوردن این ماتریسهای جزء می‌توان دستگاه معادلات را با هر بردار ستونی سمت راست حل کرد.

فرموله کردن مسأله

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$AX = B \qquad \text{.................(1)}$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

فرض کنید بتوانیم ماتریس A را به حاصل ضرب n ماتریس $n \times n$ به صورت

$$A_1 = A_1 A_2 .... A_m .... A_n \qquad (۲)$$

بیان کنیم، که در آن عناصر غیر صفر A_m عناصری از سطر و ستون mام‌اند که به قطر اصلی ختم می‌شوند، و نیز عناصر قطر اصلی که همه، بجز a_{mm} مساوی 1 هستند. بقیه عناصر صفرند. (عناصر سطر mام برابر عناصر ماتریس اصلی‌اند و عناصر ستون mام پارامترهایی هستند که باید تعیین شوند.)

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & g_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & g_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & g_{m-1,m} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m-1\,m} & a_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

مثلاً برای یک ماتریس 4 × 4، معادله (۲) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & 1 & g_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & 1 & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & g_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید پارامترهای g معلوم‌اند، آن‌گاه حل دستگاه معادله‌های خطی (۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$A_1X^1 = B، A_2X^2 = X^1 , ... ،A_mX^m = X^{m-1} ,...., A_nX^n= X^{n-1} \qquad (۴)$$

که در آن X^m، یک بردار ستونی n بعدی در مرحله mام است و X^n، بردار جواب مرحله nام، جواب مورد نظر است.

به این ترتیب حل دستگاههای معادلات (۴) در هر مرحله‌ای مانند m برای عنصر X_m با استفاده از روش کرامر عبارت است از:

$$X_m^m = \frac{X_m^{m-1} - [\, a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{m,m-1} \,]\,[\, X_1^{m-1}\ X_2^{m-1} \ldots X_{m-1}^{m-1} \,]^T}{a_{m,m} - [\, a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{m,m-1} \,]\,[\, g_{1m}\ g_{2m} \ldots g_{m-1,m} \,]^T} \qquad (۵)$$

سپس با معلوم بودن عنصر x_m^m از بردار x^m بقیه عناصر به شرح زیر محاسبه می‌شوند (گذاردن مقدار X_m^m در دستگاه معادله تشکیل شده به وسیله A_m).

$$X_i^m = X_i^{m-1} - g_{im}\, x_m^m, \qquad i = 1,2 ,..., m-1 \qquad (۶)$$

$$X_i^m = X_i^{m-1} \qquad i = m+1 , m+2 ,...., n \qquad (۷)$$

برای $m = 1$ مقدار X_i^o برابر b_i است .

انجام تجزیه

حال باید برای یک A داده شده و ماتریس‌های $A_1, A_2, ... A_n$ را تعیین کرد. به عبارت دیگر باید مجهولهای g_{ij} را به دست آورد. برای این منظور حاصل ضرب این ماتریسها را برابر ماتریس ضرایب دستگاه معادله‌های اصلی A قرار می‌دهیم. در نتیجه به n - 1 دستگاه معادله برای تعیین مقادیر gها دست می‌یابیم. مثلاً برای ماتریس 4 × 4 داده شده خواهیم داشت:

$$a_{11}\ g_{12} = a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{13} \\ g_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{14} \\ g_{24} \\ g_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

و به طور کلی این n-1 دستگاه معادله را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$C_kG_k = D_k \; ; \; k = 1,2,...,n-1 \tag{۸}$$

که در آن

$$C_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2k} \\ \\ a_{k1} & a_{k2} & .... & a_{kk} \end{bmatrix} ; \quad G_k = \begin{bmatrix} g_{1,k+1} \\ g_{2,k+1} \\ \\ g_{k,k+1} \end{bmatrix} \quad D_k = \begin{bmatrix} a_{1,k+1} \\ a_{2,k+1} \\ \\ a_{k,k+1} \end{bmatrix}$$

حال اگر مجدداً هر یک از ماتریسهای C_k را به حاصل ضرب k ماتریس تجزیه کنیم، خواهیم داشت (لازم به تذکر است پارامترهای بیان شده g قادرند ماتریسهای C_k را نیز تجزیه کنند):

$$C_k = E_1E_2....E_i....E_k \; ; \; k = 1 , 2 , ..., n - 1 \tag{۹}$$

E_i یک ماتریس $k \times k$ است.

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{1,i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g_{2,i} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 1 & g_{i-1,i} & 0 & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i-1,i} & a_{i,i} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادله تشکیل شده به وسیله E_i عبارت است از:

$$E_iG^i{}_k = G^{i-1}{}_K \; ; i = 1,2,...,k \tag{۱۰}$$

که در آن k می‌تواند مقادیر $k = 1,2,...,n-1$ را اختیار کند و $G^o_k = d_k$ برای ماتریس 4×4، معادله‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند:

برای $i = 1 \; ; k = 1$

$$C_1 = E_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

برای $i = 1,2 \; ; k = 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^1{}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = E_1 E_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & g_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_1 G^1{}_2 = G^0{}_2 \text{ و } C_2 G^2{}_2 = G^1{}_2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^1{}_{13} \\ g^1{}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & g_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^2{}_{13} \\ g^2{}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1{}_{13} \\ g^1{}_{23} \end{bmatrix}$$

برای $i = 1,2,3$ با $k = 3$

$$C_3 = E_1 E_2 E_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & g_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_1 G^1 3 = G^0{}_3 \quad \text{و} \quad C_2 G^2{}_3 = G^1{}_3 \quad \text{و} \quad C_2 G^3{}_3 = G^2{}_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^1{}_{14} \\ g^1{}_{24} \\ g^1{}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \text{و} \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^2{}_{14} \\ g^2{}_{24} \\ g^2{}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1{}_{14} \\ g^2{}_{24} \\ g^1{}_{34} \end{bmatrix} \text{و} \begin{bmatrix} 1 & 0 & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^3{}_{14} \\ g^3{}_{24} \\ g^3{}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^2{}_{14} \\ g^2{}_{24} \\ g^2{}_{34} \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادله kام در مرحله iام (۱۰) عبارت است از:

$$g^i{}_{i,k+1} = \frac{g^{i-1}{}_{i,k+1} - [\, a_{i1} \;\; a_{i2} \ldots a_{i-1,i} \,][\, g^{i-1}{}_{1,k+1} \ldots g^{i-1}{}_{i-1,k+1} \,]^T}{a_{ii} - [\, a_{i1} \;\; a_{i2} \ldots a_{i-1,i} \,][\, g^{i-1}{}_{1,i} \ldots, g^{i-1}{}_{i-1,i} \,]^T} \qquad (۱۱)$$

$$g^i{}_{s,k+1} = g^i{}_{s,k+1} - g^i{}_{i,k+1}\, g^i{}_{s,i} \qquad s = 1,2,\ldots, i-1 \qquad (۱۲)$$

$$g^i{}_{s,k+1} = g^{i-1}{}_{s,k+1}, \; s = i+1, i+2, \ldots, k \qquad (۱۳)$$

که در آن $i = 1,2,\ldots, n-1$ و $k = i,\ldots, n-1$ ضرایب E_i به g ها وابستگی دارند و فقط مقدار E_1 معلوم است. فرض کنید در مرحله iام معادله‌های (11)،(12)،(13) ، را برای $k = i, \ldots, n-1$ حل کنیم. در نتیجه می‌توان مقادیر $g_k{}^i$ را تعیین کرد که $g_i{}^i$ نیز متعلق به آن است اما $g_i{}^i = g_i$ بنابراین می‌توان E_{i+1} را تشکیل داد و بقیه مقادیر g_K را به دست آورد. با توجه به آنکه gها معلوم شده‌اند می‌توان دستگاه معادله‌های خطی (۱) را حل کرد. راه حل را می‌توان به طور کلی به صورت زیر نمایش داد:

$$E_1G^1{}_1 = D_1$$
$$E_1\, G_2{}^1 = D_2$$
$$E_1\, G^i{}_k = D_k$$
$$\vdots$$
$$C_1G^1{}_{n-1} = D_{n-1}$$
$$G_1 \quad E_2 \quad A_2$$

$$E_2G^2{}_2 = G^1{}_2$$
$$E_2G^2{}_K = G^1{}_k \ldots$$
$$E_2G^2{}_{n-1} = G^1{}_{n-1} \ldots$$
$$G_2 \quad E_3 \quad A_3$$

$$E_kG^k{}_k = G^{k-1}{}_k$$
$$E_kG^k{}_{n-1} = G^{k-1}{}_{n-1} \ldots$$
$$G_k \quad E_{k+1} \ldots \quad A_k \ldots$$

$$E_nG^{n-1}_{n-1} = G^{n-2}_{n-1}$$
$$G_{n-1} \quad \text{———} \quad A_n$$

برای‌ماتریس 4×4 ذکرشده راه حل به صورت زیردر می‌آید

به ازای $i = 1$ و $k = 1,2,3,$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^1{}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \end{bmatrix} \quad , \qquad g^1{}_{12} = \quad g_{12} = \quad \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^1{}_{13} \\ g^1{}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \qquad g^1{}_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \,,\ g^1{}_{23} = a_{23}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g^1{}_{14} \\ g^1{}_{24} \\ g^1{}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \quad \text{و} \qquad \begin{aligned} g^1{}_{14} &= \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ g^1{}_{24} &= a_{24} \\ g^1{}_{34} &= a_{34} \end{aligned}$$

به ازای $i = 2$ و $K = 2,3$

$$\begin{bmatrix} 1 & g^1_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^2_{13} \\ g^2_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1_{13} \\ g^1_{23} \end{bmatrix}$$

$$g^2_{23} = \frac{g^1_{23} - a_{21} g^1_{13}}{a_{22} - a_{21}\, g_{12}}$$

$$g^2_{13} = g^i_{13} - g^2_{23}\, g^1_{12}$$

$$g_{13} = g^2_{13} \qquad g_{23} = g^2_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & g^1_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^2_{14} \\ g^2_{24} \\ g^2_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^1_{14} \\ g^1_{24} \\ g^1_{34} \end{bmatrix}$$

$$g^2_{24} = \frac{g^1_{24} - [\,a_{21}\,]\,[\,g^1_{14}\,]}{a_{22} - [\,a_{21}\,]\,[g^1_{12}]}$$

$$g^2_{14} = g^1_{14} - g^2_{24}\; g^1_{12}$$

$$g^2_{34} = g^1_{34}$$

به ازای $3 = i$ و $k = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & g^2_{13} \\ 0 & 1 & g^2_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^3_{14} \\ g^3_{24} \\ g^3_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^2_{14} \\ g^2_{24} \\ g^2_{34} \end{bmatrix}$$

$$g^3_{34} = \frac{g^2_{34} - [\,a_{31}\;\; a_{32}\,]\,[g^2_{14}\;\; g^2_{24}\,]^T}{a_{33} - [a_{31}\;\; a_{32}]\,[\,g^2_{13}\;\; g^2_{23}]^T}$$

$$g^3_{14} = g^2_{14} - g^3_{34}\, g^2_{13}$$

$$g^3_{24} = g^2_{24} - g^3_{34}\;\; g^2_{23}$$

،

$$g_{14} = g^3_{14}$$

$$g_{24} = g^3_{24}$$

$$g_{34} = g^3_{34}$$

با معلوم شدن Am ها دستگاه اصلی به سادگی قابل حل است.

هرگاه در مرحله‌ای $\det E_i = 0$ چون محاسبات به سطرهای بعد از i بستگی ندارد، می‌توان جای سطر iام را با سطرهای بعدی عوض کرد به طوری که دترمینان آن غیر صفر شود. جواب نهایی، بردار x را می‌توان در محل بردار b و gهای محاسبه

شده را در محل ماتریس A بالای قطر اصلی ذخیره کرد. برای مرحله i ام.

$$a^{i}_{,k+1} = \frac{a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\, a_{j,k+1}}{a_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\, a_{j,i}} \qquad (۱۴)$$

$$a_{s,k} = a_{s,k+1} - a_{i,k+1}\, a_{s,i}\,, \quad S = 1,2,\dots i-1 \qquad (۱۵)$$

$$i = 1,2,\dots, n-1,\ k = i, i+1, \dots, n-1$$

$$b_m = \frac{b_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{m,i}\, b_i}{a_{m,m} - \sum_{i=1}^{m-1} a_{m,i}\, a_{i,m}} \qquad (۱۶)$$

$$b_i = b_i - a_{i,m}\, b_m\,, \quad i = 1,2,\dots,m-1 \qquad (۱۷)$$

$$m = 1,2,\dots,n$$