

مدل ریاضی دو بعدی ناماندگار آبهای زیرزمینی در محیط ناهمگن و نایزوتروپ با استفاده از روش تفاضلهای محدود در حجم کنترل

حسین محمد ولی ساسانی* مرتضی کلاهدوزان**

چکیده:

جریان ناماندگار آب در محیط متخلخل ناهمگن^۱ و نایزوتروپ^۲ را می‌توان با یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان کرد. حل این معادله در حالت کلی با روشهای تحلیلی امکان پذیر نیست، لذا باید از روشهای عددی برای حل آن استفاده کرد.

در این تحقیق از روش تفاضلهای محدود^۳ در حجم کنترل^۴ به صورت غیر صریح کامل^۵ برای حل این معادله استفاده شده است. دستگاه معادله‌های غیر خطی به دست آمده از روش جارو کردن خط به خط^۶ در چهار جهت حل شده است. این روش، همگرایی خیلی سریعی داشته است. دقت و صحت نتایج حاصل از مدل و مقایسه با نتایج حل مسائل در حالت‌های خاص که حل تحلیلی دارند ارزیابی شده است. نتایج به دست آمده بسیار رضایت بخش بوده است.

مقدمه

برای بهره‌برداری صحیح از منابع آب زیرزمینی مطالعه و برنامه ریزی لازم است. مطالعه بیلان آبی و وضعیت سفره آب زیرزمینی با استفاده از مدل‌سازی انجام می‌گیرد. حرکت آب زیرزمینی و بهره‌برداری از آن را می‌توان با معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل‌سازی کرد. در تهیه این مدل می‌توان فرضهای زیادی را به کار برد و یک مدل تقریبی برای حالت‌های خاص به دست آورد که با روشهای تحلیلی قابل حل باشد.

اولین تحقیقات در زمینه روشهای تحلیلی را ماسکات^۷ (۱۹۳۷) پولوبارینووا و کوچینا^۸ (۱۹۶۲) و هنتوش^۹ (۱۹۶۴) انجام داده‌اند. همچنین می‌توان بسیاری از مسائل آبهای زیرزمینی را با استفاده از مدل‌های الکتریکی حل کرد. بسیاری از محدودیتهایی که در روشهای تحلیلی موجود است در مدل‌های الکتریکی وجود ندارد. مدل‌های الکتریکی که در مسائل آبهای زیرزمینی به کار می‌روند از شبکه‌ای از مقاومتها و خازنها ساخته می‌شوند که بستگی به جنس محیط متخلخل و خصوصیات آن دارند. یکی از عیبهای مهم مدل‌های الکتریکی این است که برای هر سفره یک مدل مخصوص باید ساخته شود که با توجه

* استادیار گروه عمران دانشکده مهندسی دانشگاه شهید چمران اهواز و استاد مدعو دانشکده فنی دانشگاه تهران

** فارغ التحصیل در رشته سازه‌های آبی از گروه عمران دانشکده فنی دانشگاه تهران

1. Nonhomogeneous
2. Anisotropic
3. Finite Difference
4. Control Volume
5. Fully Implicit
6. Line by Line Sweeping Method
7. Muskat
8. Polubarinova & Kochina
9. Hantush

به هزینه‌های ناشی از آن استفاده از آنها در مسائل عملی چندان متداول نشده است. معادله‌های دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر رفتار آبهای زیرزمینی در حالت کلی پیچیده است و با روشهای تحلیلی قابل حل نیست بلکه با استفاده از روشهای عددی می‌توان آنها را حل کرد. روشهای عددی متداول عبارت‌اند از: تفاضلهای محدود و اجزاء محدود^۱.

در این تحقیق، هدف عبارت است از تهیه مدل کامپیوتری مبتنی بر روش تفاضلهای محدود در حجم کنترل که بتواند بیان آبی یک سفره آب زیرزمینی ناهمگن و نایزوتروپ را با شرایط مرزی مختلف و پیچیده در زمانهای مختلف محاسبه کند و نتیجتاً بتوان از آن مدل برای برنامه ریزی منابع آب در زمانهای مختلف و تعیین وضعیت سفره در میان مدت و دراز مدت استفاده کرد. مدل به طریقی تهیه شده است که بتوان پمپاژ و تغذیه مصنوعی و یا تراوش عمودی ناشی از بارندگی و تبخیر و یا تراوش از رودخانه را به سفره آب زیرزمینی در نظر گرفت. شبکه بندی محدوده مسئله برخلاف روشهای معمول تفاضلهای محدود که مبتنی بر بسط تیلورند متغیر در نظر گرفته شده است که با استفاده از آن می‌توان مناطق مهم و بحرانی را با استفاده از شبکه بندی ریزتر اجرا کرد.

معادله‌های حاکم

با اعمال معادله پیوستگی^۲ و قانون دارسی^۳ و استفاده از اصل دوپوئی^۴ در مورد یک جزء، معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی سهمی حرکت آب در محیط متخلخل به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x d \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y d \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} + R \quad (1)$$

که در آن:

x و y محورهای مختصات در صفحه است

K_x = ضریب هدایت هیدرولیکی در جهت xها

K_y = ضریب هدایت هیدرولیکی در جهت yها

d = ضخامت سفره از سطح آب تا لایه نفوذ ناپذیر

h = ارتفاع هیدرولیکی (ارتفاع سطح آب تا سطح مبنا)

S = ضریب ذخیره^۵

R = تغذیه، برداشت از سفره یا تراوش قائم (حجم آب انتقال یافته در واحد سطح در واحد زمان)

منقطع کردن^۶ معادله

برای منقطع کردن معادله (۱) گره، زبانه و حجم کنترل مربوط به آن در شکل (۱) را در نظر می‌گیریم و از معادله (۱) در حجم کنترل مذکور انتگرال‌گیری می‌کنیم:

1. Finite Element

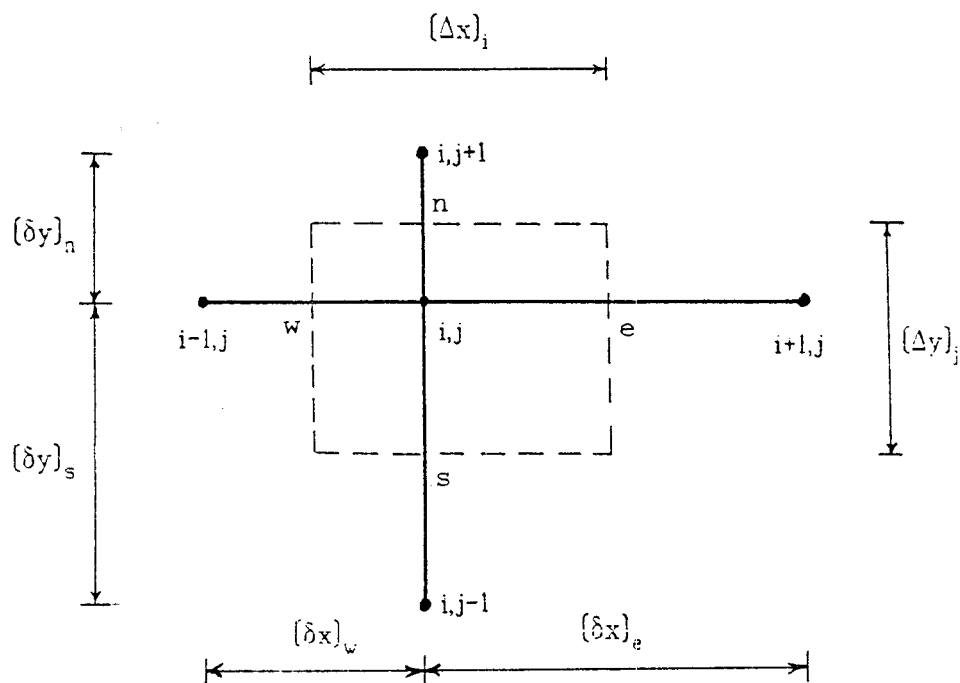
2. Continuity Equation

3. Darcy's Law

4. Dupuit Principle

5. Storage Coefficient

6. Discretization



شکل (۱) نمایش حجم کنترل در نقطه z از شبکه

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x d \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y d \frac{\partial h}{\partial y} \right) dy dx dt =$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} S \frac{\partial h}{\partial t} dt dx dy + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e R dx dy dt \quad (2)$$

با اجرای انتگرالگیریها و در نظر گرفتن S و R ثابت برای حجم کنترل، معادله (۲) به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{1}{2} K_{xe} \left(\frac{(h_{i+1,j}^{m+1})^2 - (h_{i,j}^{m+1})^2}{(\delta x)_e} \right) - \frac{1}{2} K_{xw} \left(\frac{(h_{i,j}^{m+1})^2 - (h_{i-1,j}^{m+1})^2}{(\delta x)_w} \right) \right) (\Delta y)_j -$$

$$\left(K_{xe} z_e \frac{h_{i+1,j}^{m+1} - h_{i,j}^{m-1}}{(\delta x)_e} + K_{xw} z_w \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i-1,j}^{m-1}}{(\delta x)_w} \right) (\Delta y)_j +$$

$$\left(\frac{1}{2} K_{yn} \left(\frac{[h_{i,j+1}^{m+1}]^2 - [h_{i,j}^{m+1}]^2}{(\delta y)_n} \right) - \frac{1}{2} K_{ys} \left(\frac{[h_{i,j}^{m+1}]^2 - [h_{i,j-1}^{m+1}]^2}{(\delta y)_s} \right) \right) (\Delta x)_i -$$

$$\left(K_{yn} z_n \frac{h_{i,j+1}^{m+1} - h_{i,j}^{m+1}}{(\delta y)_n} + K_{ys} z_s \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j-1}^{m+1}}{(\delta y)_s} \right) (\Delta x)_i$$

$$= S_{ij} \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j}^m}{\Delta t} (\Delta x)_i (\Delta y)_j + R_{ij} (\Delta x)_i (\Delta y)_j \quad (3)$$

که در آن:

K_{xe} = ضریب هدایت هیدرولیکی در جهت x ها در نقطه e از حجم کنترل

K_{xw} = ضریب هدایت هیدرولیکی در جهت x ها در نقطه w از حجم کنترل

K_{yn} = ضریب هدایت هیدرولیکی در جهت y ها در نقطه n از حجم کنترل

K_{ys} = ضریب هدایت هیدرولیکی در جهت y ها در نقطه s از حجم کنترل

z_s, z_n, z_w, z_e عبارت اند از ارتفاع بستر نفوذناپذیر به ترتیب در نقاط s, n, w, e

برای محاسبه ضرایب هدایت هیدرولیکی در نقاط مرزی حجم کنترل می توان از میانگین هارمونیک و برای ارتفاعهای بستر نفوذناپذیر از میانگین حسابی گرهای مجاور استفاده کرد. بنابراین معادله (۳) به صورت زیر در می آید:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{2 K_{i+1,j} K_{i,j}}{K_{i+1,j} + K_{i,j}} \frac{h_{i+1,j}^{m+1} - h_{i,j}^{m+1}}{(\delta x)_e} (h_{i+1,j}^{m+1} + h_{i,j}^{m+1} - z_{i+1,j} - z_{i,j}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{2 K_{i,j} K_{i-1,j}}{K_{i,j} + K_{i-1,j}} \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i-1,j}^{m+1}}{(\delta x)_w} (h_{i,j}^{m+1} + h_{i-1,j}^{m+1} - z_{i,j} - z_{i-1,j}) \right) \left(\frac{(\delta y)_n + (\delta y)_s}{2} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \frac{2 K_{i,j+1} K_{i,j}}{K_{i,j+1} + K_{i,j}} \frac{h_{i,j+1}^{m+1} - h_{i,j}^{m+1}}{(\delta y)_n} (h_{i,j+1}^{m+1} + h_{i,j}^{m+1} - z_{i,j+1} - z_{i,j}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{2 K_{i,j} K_{i,j-1}}{K_{i,j} + K_{i,j-1}} \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j-1}^{m+1}}{(\delta y)_s} (h_{i,j}^{m+1} + h_{i,j-1}^{m+1} - z_{i,j} - z_{i,j-1}) \right) \left(\frac{(\delta x)_e + (\delta x)_w}{2} \right)$$

$$= S_{ij} \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j}^m}{\Delta t} \left(\frac{(\delta x)_e + (\delta x)_w}{2} \right) \left(\frac{(\delta y)_n + (\delta y)_s}{2} \right)$$

$$+ R_{ij} \left(\frac{(\delta x)_e + (\delta x)_w}{2} \right) \left(\frac{(\delta y)_n + (\delta y)_s}{2} \right) \quad (4)$$

با در نظر گرفتن اینکه

$$d_{i,j} = h_{i,j} - z_{i,j}$$

و تقسیم معادله (۴) بر

$$\left(\frac{[\delta x]_e + [\delta x]_w}{2} \right) \left(\frac{[\delta y]_n + [\delta y]_s}{2} \right)$$

حاصل می شود:

$$\begin{aligned} T_1 \left(h_{i+1,j}^{m+1} - h_{i,j}^{m+1} \right) - T_2 \left(h_{i,j}^{m+1} - h_{i-1,j}^{m+1} \right) + T_3 \left(h_{i,j-1}^{m+1} - h_{i,j}^{m+1} \right) \\ - T_4 \left(h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j-1}^{m+1} \right) = S_{i,j} \frac{h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j}^m}{\Delta t} + R_{i,j} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2 K_{i+1,j} K_{i,j}}{K_{i+1,j} + K_{i,j}} \frac{d_{i,j} + d_{i+1,j}}{2} \left(\frac{2}{[\delta x]_e ([\delta x]_e + [\delta x]_w)} \right) \\ T_2 &= \frac{2 K_{i,j} K_{i-1,j}}{K_{i,j} + K_{i-1,j}} \frac{d_{i,j} + d_{i-1,j}}{2} \left(\frac{2}{[\delta x]_w ([\delta x]_e + [\delta x]_w)} \right) \\ T_3 &= \frac{2 K_{i,j+1} K_{i,j}}{K_{i,j+1} + K_{i,j}} \frac{d_{i,j} + d_{i,j+1}}{2} \left(\frac{2}{[\delta y]_n ([\delta y]_n + [\delta y]_s)} \right) \\ T_4 &= \frac{2 K_{i,j} K_{i,j-1}}{K_{i,j} + K_{i,j-1}} \frac{d_{i,j} + d_{i,j-1}}{2} \left(\frac{2}{[\delta y]_s ([\delta y]_n + [\delta y]_s)} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

R را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$R_{i,j} = \frac{(Q_{\text{pump}_{i,j}} - Q_{\text{ar}_{i,j}})}{\left(\frac{[\delta x]_e + [\delta x]_w}{2} \right) \left(\frac{[\delta y]_n + [\delta y]_s}{2} \right)} - Q_{\text{per}_{i,j}} \quad (v)$$

که در آن :

$Q_{\text{pump}_{i,j}}$ = دبی پمپاژ

$Q_{\text{ar}_{i,j}}$ = دبی ورودی به سفره ناشی از تغذیه مصنوعی

$Q_{\text{per}_{i,j}}$ = دبی ورودی به سفره ناشی از تراوش عمودی در واحد سطح

شرایط مرزی^۱

در مدل ریاضی تهیه شده سه نوع شرط مرزی در نظر گرفته شده است:

۱- مرز با ارتفاع هیدرولیکی h معلوم

۲- مرز با گرادیان هیدرولیکی معلوم

۳- ترکیبی از نوع اول و دوم

روش حل معادله‌ها

با اعمال رابطه (۵) به کلیه گرهای شبکه و استفاده از شرایط مرزی، دستگاه معادله‌های جبری غیرخطی به دست می‌آید. برای حل دستگاه معادله‌های غیرخطی ذکر شده از روش جارو کردن خط به خط (پاتانکر^۲ ۱۹۸۰) استفاده می‌کنیم. در این روش برای جارو کردن هر خط دستگاه معادله‌های با ماتریس ضرایب سه قطری^۳ به دست می‌آید که با الگوریتم توماس^۴ حل می‌شود.

کنترل کردن صحت و دقت مدل

برای کنترل صحت و دقت مدل از مسائلی استفاده شده است که حل تحلیلی دارند بدین ترتیب که نتایج حاصل از حل مسئله به دو روش عددی و تحلیلی مقایسه شده‌اند. در زیر چند مثال برای منظورهای ذکر شده ارائه می‌شود.

مثال ۱ - سفره نامحدود

به طور کلی سفره نامحدود عملاً وجود ندارد اما اصطلاح سفره نامحدود بدین صورت به کار می‌رود که آثار

1. Boundary Conditions

2. Patankar

3. Tridiagonal Matrix

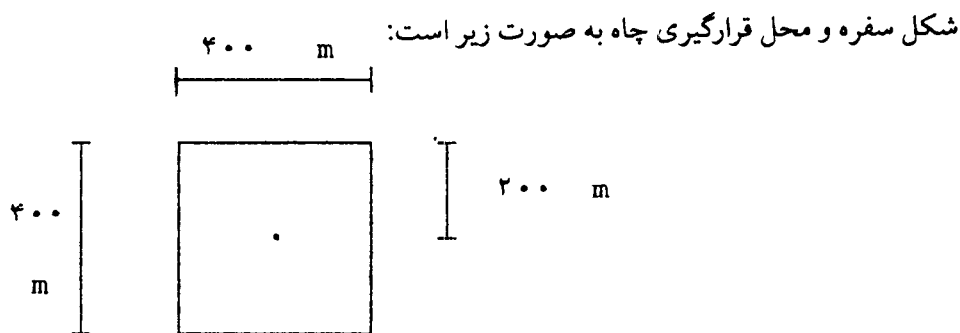
4. Thomas Algorithm

پارامترهای هیدرولیکی همانند پمپاژ از چاه در طی زمان مورد نظر به مرز نرسد یا به عبارت دیگر شرایط مرزی دخالتی در جوابها نداشته باشد. برای ارائه نتایج، سفره آب زیرزمینی با مشخصات زیر در نظر گرفته می شود:

$$S = 0.003$$

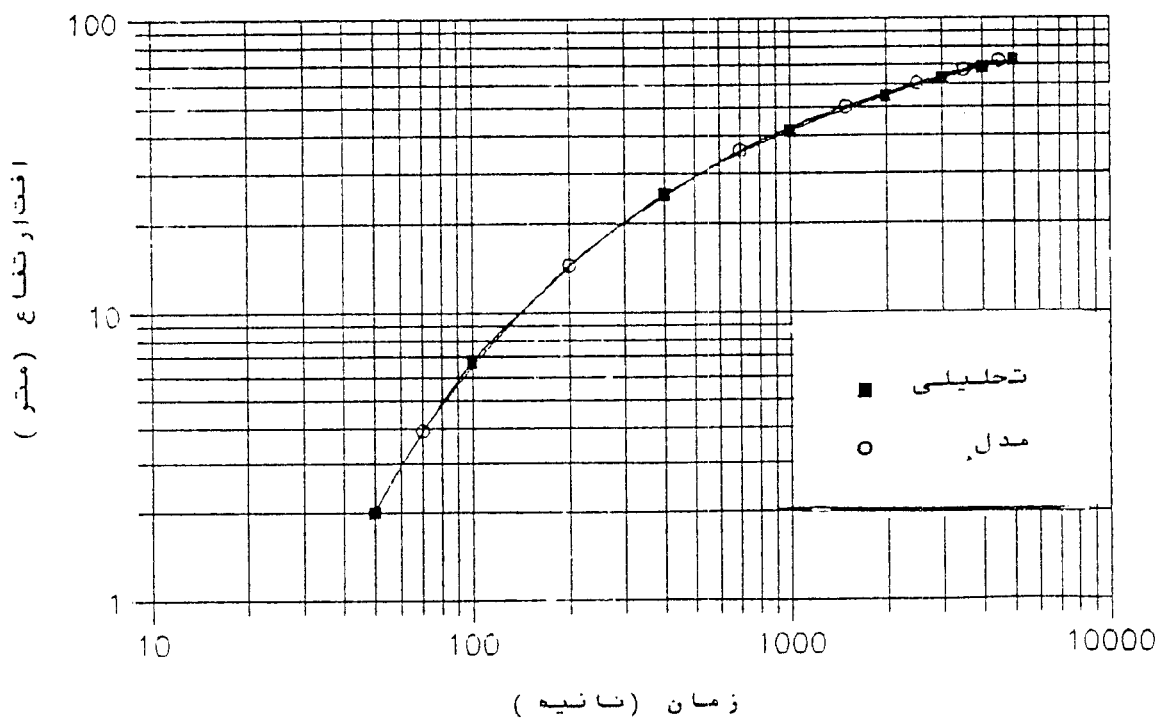
$$T = 0.001 \frac{m^2}{Sec}$$

$$Q_p = \frac{0.25 m^3}{sec}$$

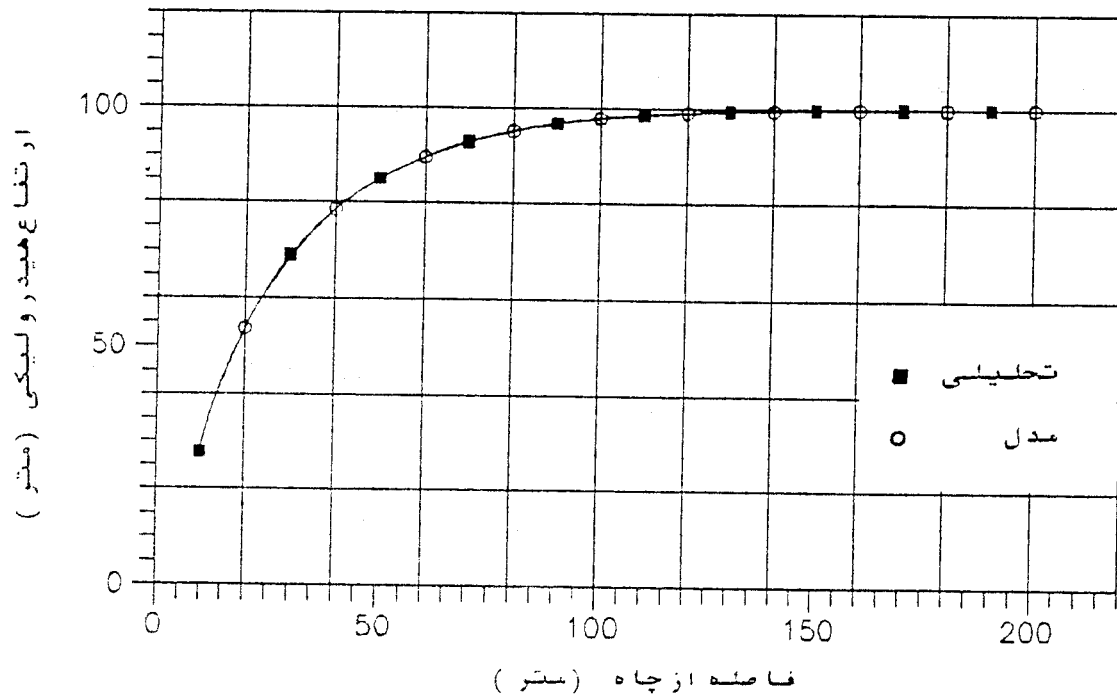


شکل (۲) سفره آب زیرزمینی مربوط به مثال (۱)

نتایج حاصل از مدل و حل تحلیلی تیس^۱ در شکلهای (۳) و (۴) ارائه شده اند. چنانکه دیده می شود نتایج حاصل به یکدیگر بسیار نزدیک اند که نشان دهنده دقت بالای مدل عددی است.



شکل (۳) نتایج پایین آمدن سطح آب چاه به دست آمده از حل تحلیلی و عددی در سفره نامحدود



شکل (۴) منحنیهای ارتفاع هیدرولیکی در برابر فاصله از چاه به دست آمده از مدل عددی و حل تحلیلی پس از ۵۰۰۰ ثانیه

مثال ۲ - سفره محدود

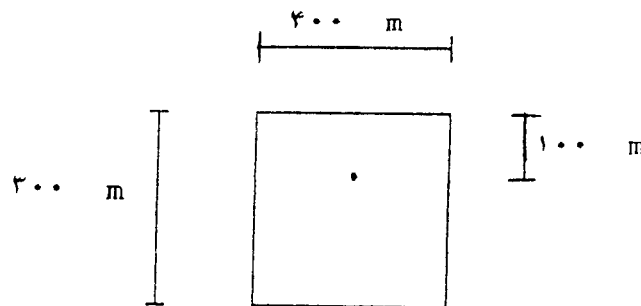
در این مثال سفره‌ای را در نظر می‌گیریم که مرزهای آن دارای ارتفاع هیدرولیکی ثابت است و آثار آن به نقاط داخلی سفره می‌رسد. برای حل این مسئله به روش تحلیلی از روش چاه مجازی که استالمن^۱ در سال ۱۹۶۳ ارائه کرده است استفاده می‌شود.

$$S = 0.003$$

$$T = 0.001 \frac{m^2}{Sec}$$

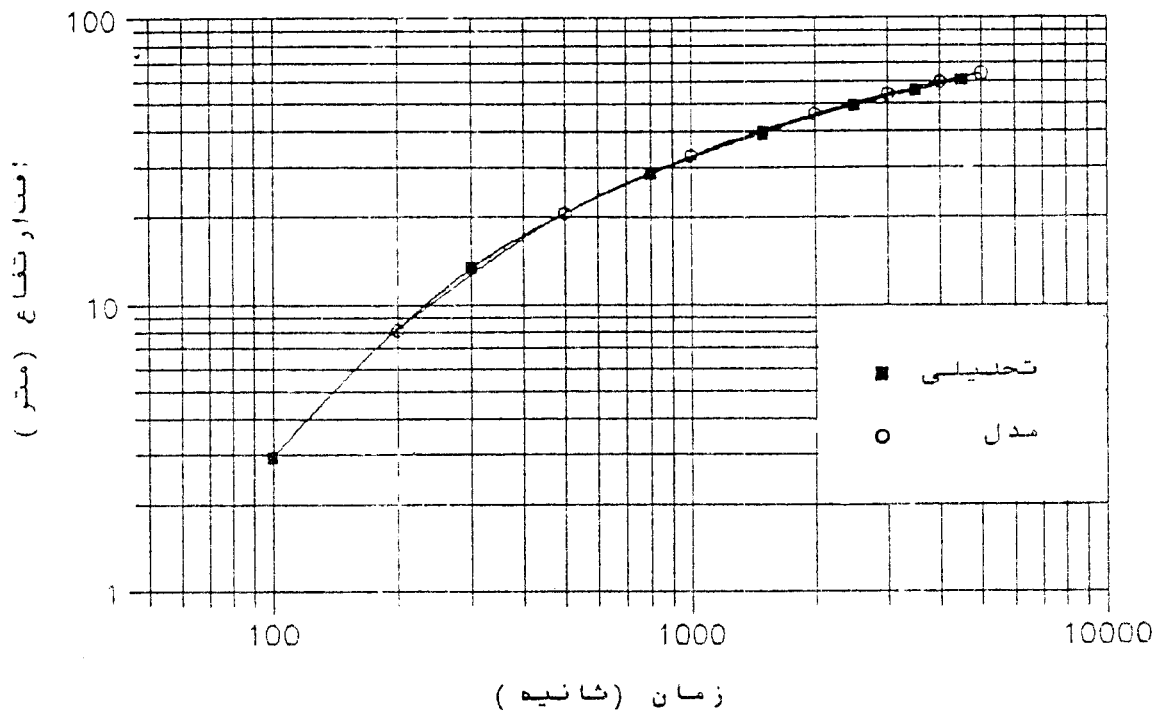
$$Q_p = \frac{0.25 m^3}{sec}$$

شکل سفره و محل قرارگیری چاه به شکل زیر است:

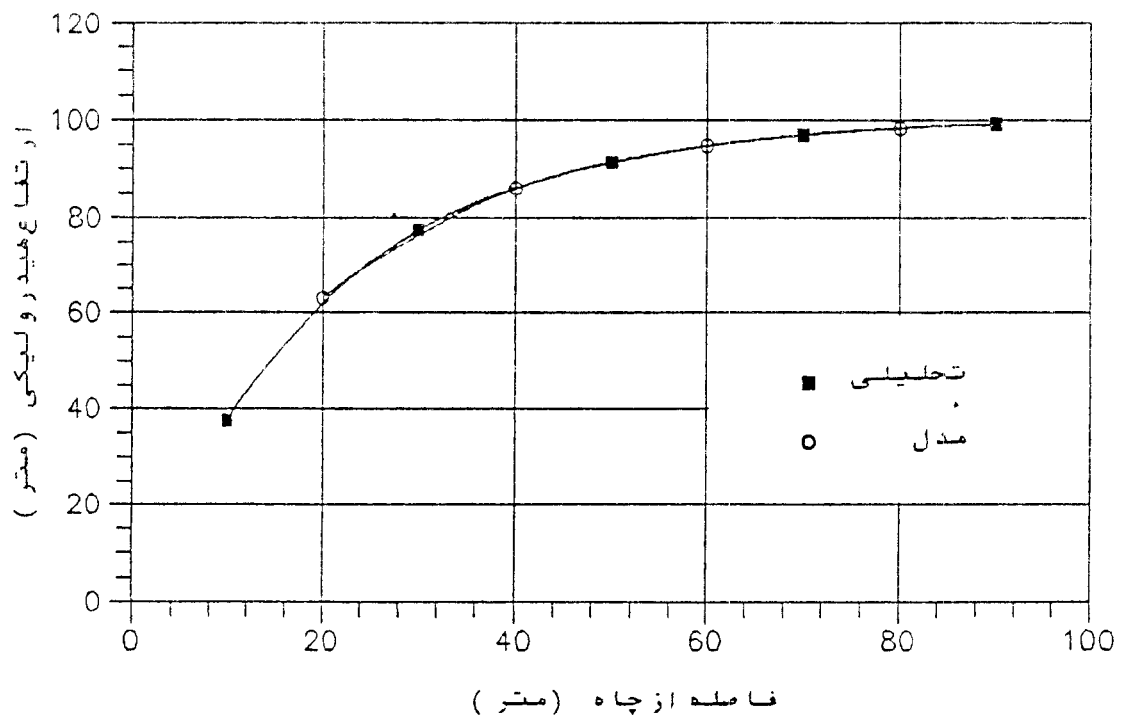


شکل (۵) سفره آب زیرزمینی مربوط به مثال ۲

نتایج حاصل از روش تحلیلی و مدل که در شکل‌های (۶) و (۷) ارائه شده‌اند تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهند.



شکل (۶) نتایج پایین آمدن سطح آب به دست آمده از مدل و حل تحلیلی در سفره محدود.



شکل (۷) منحنیهای ارتفاع هیدرولیکی در برابر فاصله از چاه به دست آمده از مدل عددی و حل تحلیلی پس از ۵۰۰۰ ثانیه

مثال ۳ - مرز با ارتفاع هیدرولیکی معلوم

سفره محصور، همگن و ایزوتروپی همانند شکل (۸) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که در لحظه $t > 0$ سطح آب در مرز سفره در دریاچه به مقدار معلومی افزایش یابد. منظور، محاسبه تغییر ارتفاع پیزومتریک آب سفره در نقاط مختلف سفره در طول محور x ها در اثر تغییر ارتفاع آب دریاچه است. راه حل تحلیلی این گونه مسائل را کارسلاو^۱ و جاگر^۲ (۱۹۵۹) به صورت زیر ارائه کرده‌اند:

$$\frac{h}{H_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Tt}}\right)$$

(۸)

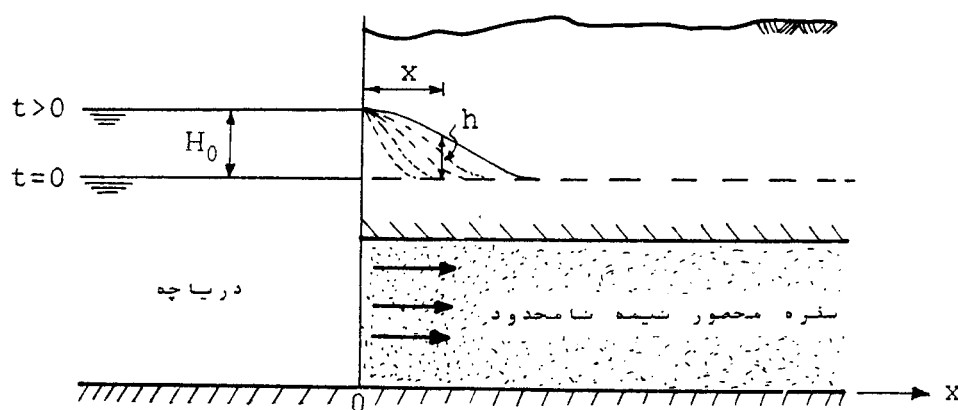
که در آن:

 h = ارتفاع پیزومتریک آب نسبت به سطح مقایسه در فاصله x از مرز H_0 = افزایش ارتفاع آب در دریاچه

مشخصات سفره عبارت است از:

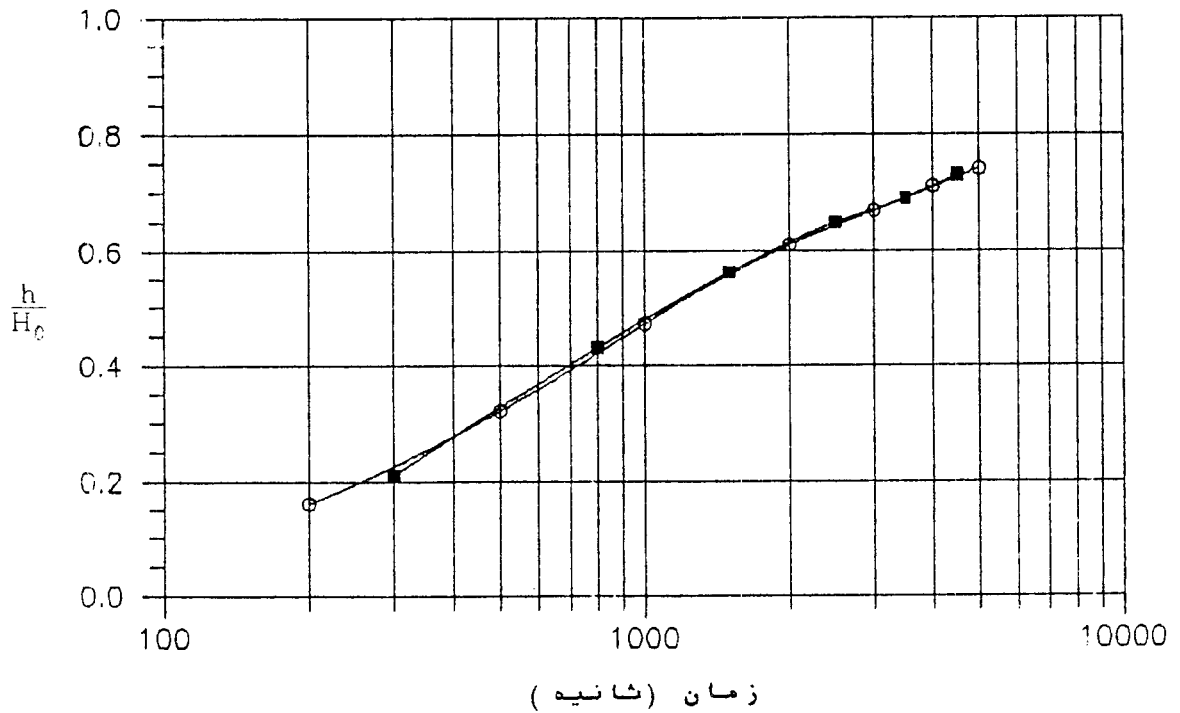
$$S = 0.01$$

$$T = 0.001 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$$

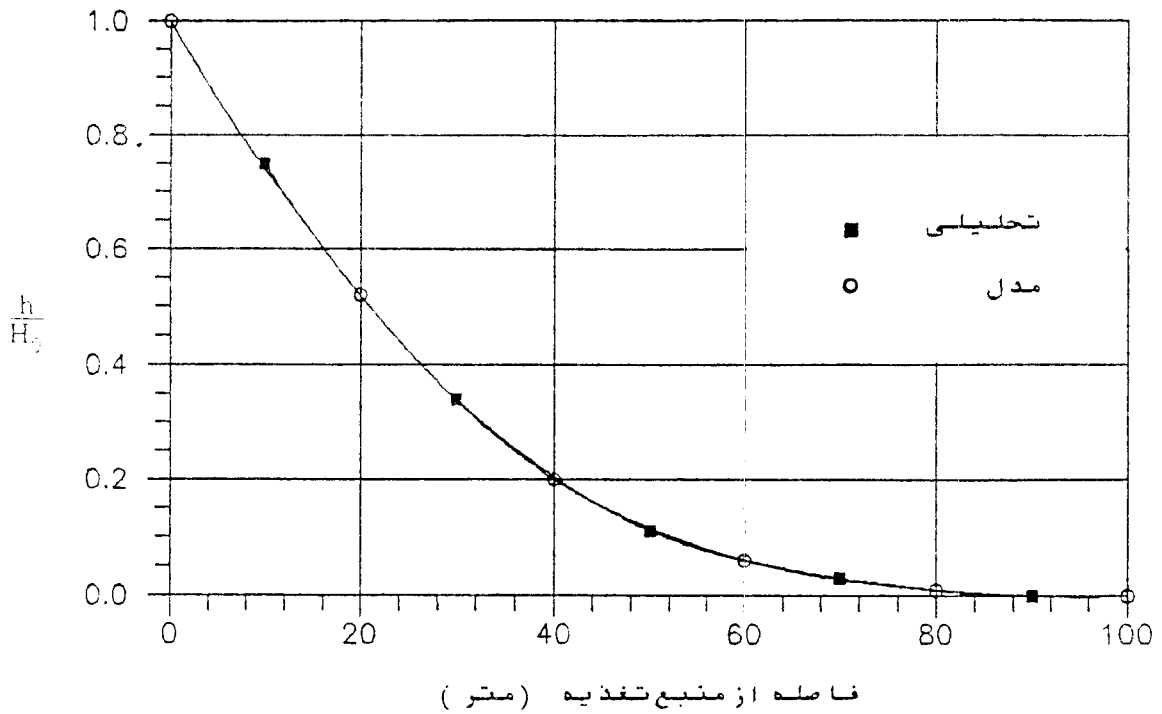


شکل (۸) سفره آب زیرزمینی مربوط به مثال ۳

شکل‌های ۹ و ۱۰، مقایسه نتایج حاصل از مدل و حل تحلیلی را نمایش می‌دهند.



شکل (۹) نتایج افزایش سطح آب در فاصله ۱۰ متری از دریاچه ($x = 10\text{m}$) به دست آمده از مدل و حل تحلیلی در سفره نیمه نامحدود

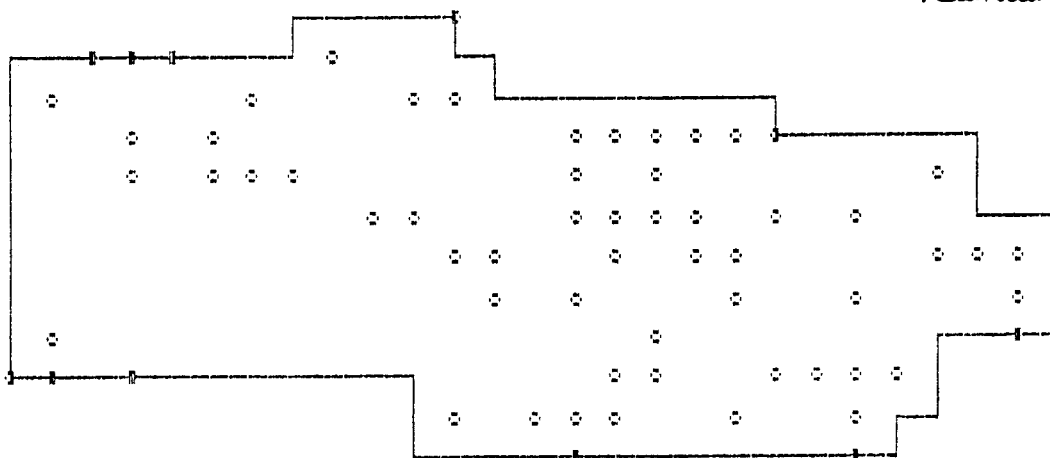


شکل ۱۰ منحنیهای ارتفاع هیدرولیکی در برابر فاصله از منبع ذخیره به دست آمده از مدل و حل تحلیلی پس از ۵۰۰۰ ثانیه چنانکه دیده می شود نتایج حاصل از این مثال نیز دقت بسیار خوب روش مورد استفاده را تأیید می کند.

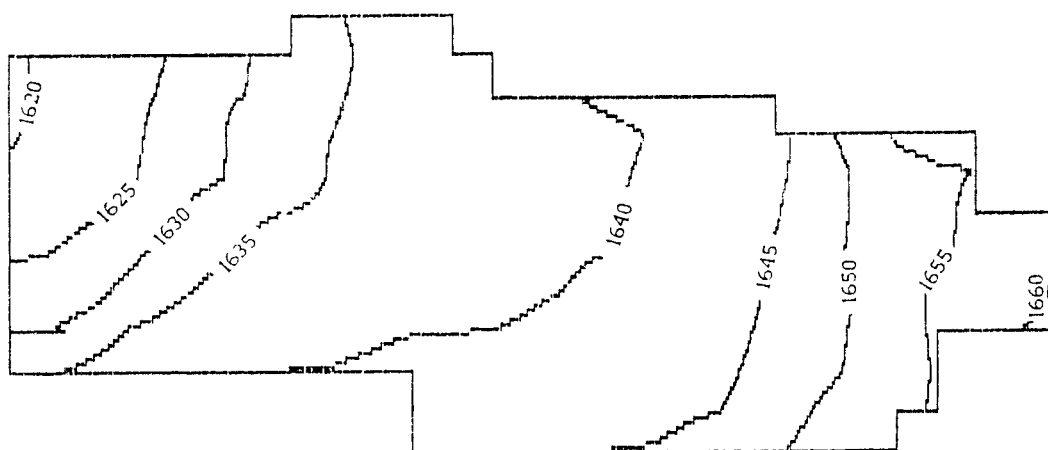
کارآیی مدل در مسائل واقعی

برای نمایش کارآیی مدل در مسائل واقعی، دشت جلگه رخ واقع در استان خراسان در نظر گرفته شده است. دشت مذکور در منطقه تربت حیدریه واقع شده و یکی از منابع پر اهمیت این منطقه به حساب می آید.

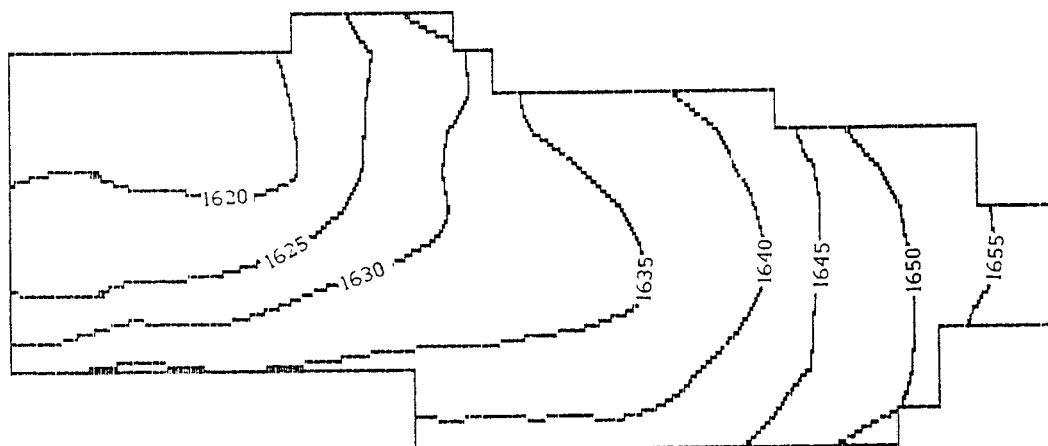
شکل (۱۱) تصویری از جلگه رخ به همراه محل چاههای پمپاژ موجود در آن را نشان می دهد. سفره آب زیرزمینی دشت جلگه رخ از نوع سفره های نامحصور است. در شروع بررسی، سطح آب در سفره همانند شکل (۱۲) بوده است. مدل مذکور با توجه به ارتفاع هیدرولیکی مشاهداتی پس از یک سال کالیبراسیون^۱ شده است. پس از کالیبراسیون مدل برای زمانهای طولانی تعمیم داده شده و نهایتاً چگونگی وضعیت سفره آب زیرزمینی پس از ده سال در شکل ۱۳ نمایش داده شده است.



شکل (۱۱) تصویری از دشت جلگه رخ به همراه چاههای پمپاژ



شکل (۱۲) خطوط تراز دشت جلگه رخ در شروع بررسی



شکل (۱۳) خطهای تراز جلگه رخ پس از یک دوره بهره‌برداری ۱۰ ساله

خلاصه و نتیجه گیری

روش تفاضلهای محدود در حجم کنترل به صورت غیر صریح کامل بر خلاف روشهای دیگر پایدار بی قید و شرط^۱ است. همچنین در روش حجم کنترل هر چند که ابعاد شبکه بزرگ باشند، پیوستگی به صورت کامل ارضا می‌شود (پاتانکر ۱۹۸۰) و چون اساس معادله تراوش در آبهای زیرزمینی رابطه پیوستگی است این موضوع از نظر دقت نتایج محاسبات بسیار حائز اهمیت است. روش حل دستگاه معادله‌های غیر خطی به دست آمده روش جارو کردن خط به خط در چهار جهت است که ترکیبی از روشهای گاوس سایدل^۲ و الگوریتم ماتریس سه قطری^۳ است. این روش که مبتنی بر تکرار است دارای همگرایی بسیار عالی در مقایسه با روش گاوس سایدل است. اگر نمو زمانی بزرگ نباشد ممکن است با یک تکرار حل دستگاه معادله‌ها همگرا شود، در حالی که روشهای متداول دیگر مانند روش جهتهای متناوب غیر صریح (ADI)^۴ که پیندر^۵ (۱۹۶۸) در آبهای زیرزمینی به کار برده است همگرایی سریع ندارد و دقت آن مانند روش حجم کنترل بالا نیست. این موضوع در نتایج نشان داده شده در کنترل مدل این مقاله روشن می‌شود. همچنین چون در این روش خط به خط دستگاه معادله‌ها حل می‌شود نیاز به حافظه زیاد از نظر کامپیوتر نیست و بنابراین می‌توان حتی پروژه‌های بزرگ را با میکروکامپیوتر حل کرد. با توجه به محاسن ذکر شده مدل تهیه شده از نظر دقت و حافظه کم مورد نیاز توانسته‌ایم پروژه بزرگی مانند تعیین بیلان آبی دشت جلگه رخ را در درازمدت با استفاده از کامپیوتر IBM PC با حافظه بسیار محدود حل کنیم. زبان برنامه نویسی مورد استفاده در این مدل زبان Quick Basic بوده و کلیه نتایج خطهای هم تراز مربوط به ارتفاعهای پیزومتر یک سفره به صورت ترسیم با استفاده از زیر برنامه‌های مخصوص در مدل با استفاده از همان زبان گنجانده شده است. ساختمان برنامه کامپیوتری و لیست آن در منبع شماره ۱۰ برای استفاده علاقه‌مندان موجود است.

1. Unconditinoally Stable

2. Gauss Seidel

3. Tridiagonal Matrix Algorithm

4. Alternative Direction Implicit

5. Pinder

فهرست منابع :

- 1) Bear J. " Hydraulic of Groundwater" McGrawHill Book Company, U.S.A, 1979.
 - 2) Hunt B. " Mathematical Analysis of Groundwater Resources " Butterworths & co (Publisher) Ltd. Cambridge (U.K), 1983.
 - 3) Kinzelbach W. " Groundwater Modelling " Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1986.
 - 4) Marino M.A. & Luthin J.N. " Seepage and Groundwater " Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1982.
 - 5) Mercer J.W. & Faust C.R. " Groundwater Modelling : Numerical Models " , Groundwater Journal , Vol 18, NO. 4. July - August 1980.
 - 6) Patankar S.V. " Numerical Heat Transfer and Fluid Flow " McGraw Hill Book Company, 1980.
 - 7) Pinder G.F. & Bredehoeft J.D. " Application of Digital Computer for Aquifer Evaluation " Water Resources Research Journal, Oct 1968.
 - 8) Torno C.H. " Computer Application in water Resources " American Society of Civil Engineers, U.S.A , 1985.
 - 9) Wang H.F. & Anderson M.P. " Introduction to Groundwater Modelling " W.H. Freeman and Company , San Francisco, 1982.
- ۱۰) کلاهدوزان م. «مدل ریاضی دوبعدی ناماندگار آبهای زیرزمینی در محیط ناهمگن و نا ایزوتوپ با استفاده از روش تفاضل‌های محدود در حجم کنترل و کالیبراسیون آن به روش بهینه‌یابی» دانشکده فنی دانشگاه تهران، تابستان ۱۳۷۰