بررسی ریاضی یک الگوی رشد توام با اشباع*

نوشته:

کارولوکس

استادیار دانشکده فنی دانشگاه تهران

چکیده

در این‌مقاله ریاضیات مربوط به‌تعمیم و توسعه الگوی رشد توام با اشباع پرل ورید مورد بحث قرار می‌گیرد. معادلات دیفرانسیل بدست‌آمده به‌شکل‌معادلات‌برنولی‌وریکاتی‌هستندکه با استفاده‌ازشکل‌خاص آنها جواب‌بسته برایشان بدست‌می‌آید. رفتار مجانبی سیستم در هرمورد به‌طورمختصربررسی‌می‌شود و نتایج‌بدست‌آمده با یکدیگر مقایسه‌می‌شوند. الگوهای ریاضی‌حاصل از این‌تعمیم درزمینه‌های متعدد از قبیل‌بررسی‌منابع انرژی، جمعیت و نیروی انسانی و .... قابل‌کاربرد هستند که در طی مقاله به‌صورت‌مثال‌تشریح‌می‌شوند. این‌زمینه‌های‌کاربرد برای‌برنامه‌ریزی‌اقتصادی‌برنامه‌ریزی‌انرژی، و غیره‌درایران دارای اهمیت‌هستند.

بررسی رشد کمی بسیاری از متغیرهای فیزیکی و اجتماعی نشان داده‌است که درشرایط معمولی مقدارمتغیردر زمانهای متوالی از یک تصاعد هندسی پیروی‌می‌کند. بیان ریاضی این‌مطلب‌آن‌است‌که تغییرات متغیر درهرزمان‌متناسب با مقدار متغیر درلحظه موردبررسی است.

$$dZ(t)=\lambda Z(t)dt \qquad (۱)$$

اما دربسیاری حالات براثر گذشت زمان و استهلاک منابع لازم برای رشددرصد رشدمتغیر در مقدار ثابت λ باقی نمی‌ماند و براثر "اشباع" روندی نزولی پیدامی‌کند، یک‌الگوی ساده برای نشان‌دادن این‌رشد توام بااشباع با فرض یک‌روند خطی برای درصد رشد متغیر بدست می‌آید:

$$dZ(t)=\lambda Z(t)[1-\mu Z(t)]dt \qquad (۲)$$

درروابط‌فوق برای مقادیر کوچک $Z(t)$ ، $\mu Z(t) \ll 1$ است‌ومنحنی نمایش $Z(t)$ که‌ازرابطه (۲) بدست می‌آید نزدیک به منحنی نمایش تصاعدی بدست‌آمده از رابطه (۱) خواهد بود اما بتدریج براثر رشدمتغیر $Z(t)$ عبارت‌دوم یعنی $\mu Z(t)$ قابل‌ملاحظه‌می‌شودومنحنی‌نمایش‌رابطه (۲) (الگوی پرل وریدٌ**) ازمنحنی‌تصاعدی‌فاصله‌می‌گیرد تااین‌که در حد به‌سمت یک مجانب افقی میل می‌کند که مقدارآن با مساوی قراردادن تغییرات $Z(t)$ باصفر: $dZ(t) = 0$ بدست می‌آید:

$$1-\mu Z_\infty=0 \qquad (۳)$$

درمعادله دیفرانسیل (۲) می‌توان متغیرها را جدا کرد و پاسخ معادله را به‌ازای شرایط اولیه موردنظر به‌صورت تابعی از زمان بدست آورد:

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)[1-\mu Z(t)]}=\frac{dZ(t)}{Z(t)}+\mu\frac{dZ(t)}{1-\mu Z(t)}=d\left\{\ln\left[\frac{Z(t)}{1-\mu Z(t)}\right]\right\}=\lambda dt \qquad (۴)$$

$$\frac{1}{Z(t)}=\mu+\left[\frac{1}{Z(t_0)}-\mu\right]e^{-\lambda(t-t_0)} \qquad (۵)$$

ملاحظه می‌شود که در $t \to \infty$ عبارت دوم به‌سمت صفر میل می‌کند و بدست می‌آید:

$$\lim_{t\to\infty} Z(t)=\frac{1}{\mu} \qquad (۶)$$

الگوی‌رشد پرل ورید که توسط روابط (۲) و (۵) مشخص‌می‌شودوگاهی‌هم به‌آن "منحنی‌لجستیکی" می‌گویند درموارد متعدد دارای کاربرد است و برای‌مثال‌می‌توان‌آن‌را

---

* الگوهای ریاضی این مقاله درطی مدت بیش از یکسال‌کارباگروهی دانشگاهی‌که درزمینه برنامه‌ریزی‌انرژی با وزارت‌نیرو همکاری داشتند موردتوجه قرار گرفته است. بدینوسیله ضمن تشکر از کلیه همکاران و مقامات انرژی وزارت‌نیرو کمک و همفکری آقایان دکتر عبدالحسین‌رحیمی استاد دانشگاه‌صنعتی‌شریف (تهران) و دکتر علی‌افشاربرکشلودانشیار دانشکده علوم دانشگاه‌تهران را متذکر می‌شود.

** Pearl , Reed

برای تخمین منابع نفتی کشور و یا برای برآورد جمعیت مورداستفاده قرار داد [۱و ۲] البته درمورد علل " اشباع " متغیر (محدودشدن منابع و ....) این الگو بیش از حد انعطاف‌ناپذیر و محدودکننده است و تغییرات تکنولوژیکی را که‌باعث‌می‌شود‌شرایط ادامه رشد فراهم شود درنظر نمی‌گیرد و از این‌نظر رفتار مجانبی آن علی‌الخصوص مورد انتقاد قرار می‌گیرد . برای حل‌این‌منظور گاهی فرض‌می‌شود که رابطه (۵) دریک فاصله زمانی محدودکه در آن وضعیت تکنولوژیکی کم‌و بیش معینی است به‌صورت تعدیل شده زیر صادق است :

$$Z(t) = C + \frac{1}{\mu + (1/Z_0 - \mu)e^{-\lambda(t-t_0)}} \quad (۷)$$

عبارت (۷) بخصوص درمواردی‌که $Z(t)$ مقدار انباشت‌شده یک پروسه‌زمانی‌رانشان می‌دهدکه مقداراولیه‌اش به‌طور دقیق معلوم نیست برای کاربرد مناسب است . ازطرف دیگر می‌توان در عبارت (۲) مقدار μ را به‌صورت تابعی از زمان نمایش‌داد (برای مثال چنانچه تغییرات‌منابع به‌صورت یک‌تصاعدحسابی‌باشد μ رامی‌توان‌درالگوی‌پرل‌وریدبه‌صورت تابعی هارمونیک‌نمایش داد) . درحال‌کلی معادله‌دیفرانسیل (۲) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود که درآن متغیرها قابل‌جدا شدن نیستند :

$$dZ(t) = \lambda Z(t)[1 - \mu(t)Z(t)]dt \quad (۸)$$

معادله دیفرانسیل (۸) به‌شکل‌یک‌معادله‌دیفرانسیل برنولی* است که‌درضمن‌می‌توان آن‌را‌به‌سادگی (مثلاً " باتغییر متغیر $\bar{Z}(t) = \mu(t)Z(t)$) به‌یک‌معادله دیفرانسیل‌ازنوع ریکاتی** نیز تبدیل‌کرد . چنانچه تغییر متغیر زیر را در معادله دیفرنسیال (۸) وارد کنیم :

$$Y(t) = \frac{1}{Z(t)} \quad (۹)$$

معادله به‌فرم خطی درمی‌آید :

$$Y(t) + \lambda Y(t) = \lambda\mu(t) \quad (۱۰)$$

که درآن $\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ پاسخ‌معادله فوق‌به‌صورت مجموع دوتابع بدست می‌آید که اولی "پاسخ طبیعی " (یعنی جزء اول پاسخ کلی) به‌صورت $y_1 = C_e^{-\lambda t}$ است‌که نشان‌دهنده رشد بدون اشباع متغیر Z است وبستگی به‌تابع μ ندارد . این‌پاسخ توسط‌جزء " اجباری" دیگر که بستگی به‌مقادیر تابع μ دارد تعدیل می‌شود . چنانچه تابع η را مطابق با رابطه زیر تعریف کنیم :

$$\eta(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda\mu(s)e^{\lambda(s-t_0)}\,ds \quad (۱۱)$$

پاسخ کامل معادله دیفرانسیال به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$Y(t) = \frac{1}{Z(t)} = \left[\frac{1}{Z(t_0)} + \eta(t)\right]e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (۱۲)$$

مثال ۱ : اکتشافات و تولیدات نفتی

چنانچه فرض شود Q_d و Q_p به‌ترتیب انباشته اکتشافات*** و تولیدات نفتی**** یک‌کشور یا منطقه معینی باشد می‌توان روابط‌فوق را درمورد تغییرات زمانی این‌دو متغیر مورداستفاده قرارداد . عموماً " فرض می‌شودکه در هردومنحنی از الگوی رشد پرل ورید که‌توسط‌روابط (۲) و (۵) مشخص‌می‌شود پیروی‌می‌کنند بطوریکه‌انباشته‌تولیدات نسبت‌به‌اکتشافات دارای تاخیر زمانی معین Δt می‌باشدو تفاوت این‌دو کمیت در هرلحظه عبارت از بقیه منابع ثابت شده‌یا "رزرو" منابع نفتی***** است‌که با Q_2 نشان‌داده می‌شود :

ضمناً " فرض می‌شودکه عامل محدودکننده Q_d و Q_p عبارت از حدمنابع نفتی Q_∞ موجود در منطقه موردنظر است که یا اکتشاف شده است و یا درآینده (با قیمت وتکنولوژی داده شده) قابل اکتشاف و بهره‌برداری****** است با استفاده‌ازآنچه‌گفت می‌توان درعوض مفروضات فوق‌الگوی زیر را برای رشد Q_d و Q_p درنظر گرفت :

$$dQ_d = \lambda Q_\lambda(1 - Q_d/Q_\infty)dt \quad (۱۴)$$

$$dQ_p = \lambda Q_p(1 - Q_p/Q_d)dt \quad (۱۵)$$

پاسخ رابطه (۱۴) با استفاده از عبارت (۵) بدست می‌آید :

$$\frac{Q_d(t)}{Q_\infty} = \frac{C_0}{C_0 + (1 - C_0)e^{-\lambda(t-t_0)}} \quad (۱۶)$$

که در آن :

$$C_0 = \frac{Q_d(t_0)}{Q_\infty} \quad (۱۷)$$

باقراردادن‌مقدار Q_d درعبارت (۱۵) پاسخ‌آن‌یعنی Q_p بدست می‌آید :

$$\frac{Q_p(t)}{Q_\infty} = \frac{C_0}{C_0 + [\lambda(1 - C_0)(t - t_0) + C_1]e^{-\lambda(t-t_0)}} \quad (۱۸)$$

* Bernoulli

** Riccati

*** Commulative discoveries

**** Commulative production

***** Remaining proven reserves

****** Ultimately recoverable resources

کـــه در آن $C_1 = \frac{Q_d(t_0)}{Q_p(t_0)}\left[1-\frac{Q_p(t_0)}{Q_\infty}\right]$ (۱۹)

ملاحظه می‌شود که در حد داریم :

$$\lim_{t=\infty} Q_d(t) = \lim_{t=\infty} Q_p(t) = Q_\infty \qquad (۲۰)$$

اما منحنی‌نمایش Q_p بامنحنی‌لجستیکی قدری تفاوت خواهد داشـــــت .

مثال ۲: جمعیـــت

فرض کنیم که تغییرات جمعیت یک کشور درهرلحظه (تابـع p) از رابطه (۲) پیروی‌کند . همچنین فرض‌کنیم‌که رشد یک کمیت دیگر (تابع Q)که می‌تواند برای‌مثال میزان تقاضا برای یک نوع بخصوص از کالا یاخدمات و غیره باشـد دارای محدودیتی‌باشد که توسط کل جمعیت‌کشور درآن‌لحظه تعیین می‌شود . در آن صورت داریم :

$$dP(t) = \lambda P(t)[1-\mu P(t)]dt \qquad (۲۱)$$

$$dQ(t) = \alpha Q(t)[1-\beta Q(t)/P(t)]dt \qquad (۲۲)$$

برای‌سادگی‌فرض‌می‌کنیم

پاسخ رابطه (۲۲) با استفاده از عبارت (۵) بدست می‌آید :

$$\frac{1}{P(t)} = \mu + \left[\frac{1}{P_0}-\mu\right]e^{-\lambda t} \qquad (۲۳)$$

بامقایسه رابطه (۲۲) با روابط (۸) و (۱۱) نتیجه می‌شود :

$$\eta(t) = \int_0^t \left[\mu\alpha\beta + \alpha\beta\left(\frac{1}{P_0}-\mu\right)e^{-\lambda s}\right]e^{\alpha s}ds \qquad (۲۴)$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$Q(t) = \frac{1}{C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + C_3 e^{-\alpha t}} \qquad (۲۵)$$

کـــه در آن :

$$C_1 = \beta\mu \qquad (۲۶)$$

$$C_2 = \frac{\alpha\beta(1-\mu P_0)}{(\alpha-\lambda)P_0} \qquad (۲۷)$$

$$C_3 = \frac{1}{Q_0} - C_1 - C_2 \qquad (۲۸)$$

مثال دوم بخوبی نشان میدهد که چگونه هنگامی‌که عامل محدودکننده برای یک کمیت‌خود توسط‌کمیات دیگـر محدود می‌شود محدودیت آن" انتشار" می‌یابد . مثال اول درواقع حالتی‌خاص از آن است که در آن $\alpha=\lambda$ می‌باشد . با استفاده ازنتیجه مثال دوم روشن می‌شود که یک انتخاب مناسب برای تابع μ در رابطه (۸) عبارت‌است از :

$$\mu(t) = \mu_\infty + (\mu_0-\mu_\infty)e^{-\alpha t} \qquad (۲۹)$$

و یا درحالت کلی‌تر می‌توان نوشت :

$$\mu(t)=\mu_\infty + \sum C_i e^{-\alpha_i t} \qquad (۳۰)$$

ازطرف دیگر باتوجه به‌رابطه (۱۰) می‌توان نتیجه‌گرفت کـه چنانچه‌تابع μ بصورت‌زیرازمجموع‌چندتابع تشکیل‌شده‌باشد :

$$\mu(t) = \sum \varphi_i(t) \qquad (۳۱)$$

می‌توان بااستفاده از قاعده جمع اثرها* پاسخ y رابصورت مجموع پاسخ ما نوشت :

$$Y(t) = \frac{1}{Z(t)} = Ce^{-\lambda t} + \sum_i \Psi_i(t) \qquad (۳۲)$$

کـــه در آن داریم :

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}\Psi_i(t)\right] = \lambda e^{\lambda t}\varphi_i(t) \qquad (۳۳)$$

و یا چنانچه تبدیل لاپلاس توابع ψ_i و Ψ_i را درنظر بگیریـم (توابع ψ_i Ψ_i) :

$$\hat\Psi_i(s) = \frac{\lambda\hat\varphi_i(s)}{\lambda+s} \qquad (۳۴)$$

اکنون بااستفاده از قضیه‌مقدار نهایی** می‌توان ثابت‌کرد که‌تحت‌شرایط مناسب (برای‌مثال‌شرایطی‌که‌تحت آن تبدیل لاپلاس تابع μ ومشتق آن تعریف شده باشد) چنانچـــــه تابع ψ_i دارای مجانب باشد یعنی :

$$\lim_{t=\infty}\Psi_i(t) = \lim_{S=0} s\hat\varphi_i(s) = \varphi_\infty \qquad (۳۵)$$ و

درآن‌صورت‌تابع Ψ_i نظیر آن‌هم دارای مجانب خواهد بود :

$$\lim_{S=0}\Psi_i(t) = \lim_{S=0} s\hat\varphi_i(s) = \lim_{S=0}\frac{\lambda s\hat\varphi_i(s)}{\lambda+s} = \varphi_\infty \qquad (۳۶)$$

به بیان دیگر تحت این شرایـــط مناسب منحنـــی‌هـــای $y(t) = \frac{1}{Z(t)}$ و $\mu(t)$ دارای یک‌مجانب واحد خواهند بـــود :

$$\lim_{t=\infty} y(t) = \lim_{t=\infty}\mu(t) \qquad (۳۷)$$

بدین‌ترتیب دیده‌می‌شود که‌الگوی‌مورد بحث‌ماگذارازرشدنمایی (یعنی تصاعد هندسی) به‌رشد بحالت اشبـــاع $\mu(t)$

* Superposition

** Final value theorem

(برای مقادیر بزرگ t) را نشان می‌دهد اگر (t) μ درحد به‌سمت یک‌مقدار ثابت میل کند می‌توان بادقت بسیار خوب به‌جای آن در رابطه (۸) حدش را قرار داد و معادله (۲) را نتیجه گرفت .

چنانچه خواسته‌شود معادله (۲) قدری بیشتر تعمیم داده‌شود می‌توان درآن علاوه‌بر λ, μ رانیزتابع زمان فرض کرد :

$$dZ(t)=\lambda(t)Z(t)[1-\mu(t)Z(t)]dt \quad (۳۸)$$

بامعرفی $y(t)$ (رابطه (۹) برابر با عکس متغیر Z خواهیم داشت :

$$y(t)+\lambda(t)y(t)=\lambda(t)\mu(t) \quad (۳۹)$$

پاسخ معادله (۳۹) پس از حل چنین بدست می‌آید :

$$\frac{1}{Z(t)}=y(t)=\left[\frac{1}{Z(t_o)}+\int_{t_o}^{t}\lambda(s)\mu(s)e^{\int_{t_o}^{s}\lambda(\tau)d\tau}\right]e^{-\int_{t_o}^{t}\lambda(s)ds} \quad (۴۰)$$

مثـــال ۳: فرض کنیم حاصلضرب λ در μ مقداری‌ثابت باشد درآن‌صورت می‌توان معادله ۳۸ را بصورت زیر نوشت :

$$dZ(t)=kZ(t)[\varphi(t)-Z(t)]dt \quad (۴۱)$$

معادله (۴۱) به‌شکل ریکاتی‌است ومی‌توان در آن تغییرمتغیر زیر را وارد کـرد :

$$u(t)=\ln\frac{Z(t)}{Z(t_o)}+k\int_{t_o}^{t}Z(s)ds \quad (۴۲)$$

درآنصورت معادله (۴۱) به‌شکل ساده زیر درمی‌آید :

$$\dot{u}(t)=k\varphi(t) \quad (۴۳)$$

باتوجه‌به‌آن‌که از رابطه (۴۲) مقدار u درزمان t_o برابرباصفر بدست می‌آیــد :

$$u(t)=k\int_{t_o}^{t}\varphi(s)ds \quad (۴۴)$$

بامحاسبه e^u وانتگرال‌گیری‌ازآن‌تابع مقادیر $Z(t)$ بدست‌می‌آید :

$$\frac{1}{Z(t)}=\frac{1}{Z(t_o)}e^{-u(t)}+ke^{-u(t)}\int_{t_o}^{t}e^{u(s)}ds \quad (۴۵)$$

مثـــال ۴: با استفاده از مثال ۳ می‌توان الگوی‌مثال اول را بصورت‌قدری‌متفاوت زیردرنظر گرفت (بافرض $\lambda = kQ$)

$$dQ_d(t)=kQ_d(t)[Q_\infty-Q_d(t)]dt \quad (۴۶)$$

$$dQ_p(t)=kQ_p(t)[Q_d(t)-Q_p(t)]dt \quad (۴۷)$$

رابطه (۴۶) معادل‌رابطه (۱۴) است و پاسخ‌آن نیز ازرابطه (۱۶) بدست می‌آید اما رابطه (۴۷) با رابطه (۱۵) قدری متفاوت‌است و درحالی‌که دومی یک‌معادله‌دیفرانسیل ازنوع رابطه (۸) است رابطه (۴۷) یک‌معادله‌دیفرانسیل‌ازنوع‌رابطه (۴۱) است . بامقایسه‌این‌دورابطه و روابط (۴۲) الی (۴۵) خواهیم داشـــت :

$$\varphi(t)=Q_d(t)=\frac{Q_d(t_o)}{C_o+(1-C_o)e^{-\lambda(t-t_o)}} \quad (۴۸)$$

که در آن C مانند رابطه (۱۷) تعریف می‌شود :

$$U(t)=k\int_{t_o}^{t}\varphi(s)ds=\ln[C_oe^{\lambda(t-t_o)}+(1-C_o)] \quad (۴۹)$$

$$\int_{t_o}^{t}e^{u(s)}ds=\int_{t_o}^{t}[C_oe^{\lambda(t-t_o)}+(1-C_o)]ds= \quad (۵۰)$$

$$=\frac{C_o}{\lambda}[e^{\lambda(t-t_o)}-1]+(1-C_o)(t-t_o)$$

$$\frac{Q_p(t)}{Q_\infty}=\frac{C_o+(1-C_o)e^{-\lambda(t-t_o)}}{C_o+[\lambda(1-C_o)(t-t_o)+C_{-1}-C_o]e^{-\lambda(t-t_o)}} \quad (۵۱)$$

کـــــه در آن :

$$C_{-1}=\left[\frac{Q_p(t_o)}{Q_\infty}\right]^{-1} \quad (۵۲)$$

ملاحظه می‌شود که دراین‌حالت هم خواهیم داشت :

$$\lim_{t\to\infty}Q_p(t)=\lim_{t\to\infty}Q_d(t)=Q_\infty \quad (۵۳)$$

درمورد تعمیم مثال دوم هم می‌توان از روش مشابه استفاده کرد با این‌تفاوت که دراین‌حالت خواهیم داشت :

$$e^{u(t)}=(\alpha+\beta e^{\lambda t})^{\gamma} \quad (۵۴)$$

پاسخ کامل معادله دیفرانسیل از قراردادن عبارت فوق در رابطه (۴۵) بدست می‌آید .

$$e^{u(t)}=(\alpha+\beta e^{\lambda t})^{\gamma} \quad (۵۵)$$

*final value theorem

فهرست مراجـــــع :

۱ ــ لوکس، کارو و افشار برکشلو، علی : " کاربرد الگوی پرل‌ورید دربررسی‌منابع نفتی‌ایران " . نشریه دانشکده علوم ، تهران ۱۳۶۱ ، (زیرچاپ) .
۲ ــ لوکس کارو و افشاربرکشلو ، علی و رحیـــــمی ، عبدالحسین : " بررسی جمعیت و منابع نفتی ایران با الگوی پرل‌ورید " . ارائه شده جهت سمینار روشهای برنامه‌ریـــزی و بودجه ایران ، اردیبهشت ۱۳۶۱ .