# مدل و الگوریتم یک مساله کنترل موجودی با در نظر گرفتن هزینه حمل و نقل

**فریبرز جولای*[۱] و رضا توکلی مقدم[۲]، جعفر رزمی[۳] و پدارم صهبا[۴]**

[۱]دانشيار گروه مهندسي صنايع - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[۲]دانشيار گروه مهندسي صنايع - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[۳]استاديار گروه مهندسي صنايع - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[۴]دانش آموخته كارشناسي ارشد مهندسي صنايع - پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۴/۴/۲۶ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۵/۳/۳۰ ، تاریخ تصویب ۸۵/۱۰/۲)

## چکیده

در این مقاله، یک سیستم لجستیکی تامین کننده/خرده فروش، به عنوان یک محیط دوسطحی مورد بررسی قرار گرفته است. در هر یک از سطوح، یک موقعیت وجود دارد؛ تامین کننده یکتا در سطح اول مسئول تامین سفارشات خرده فروش در سطح دوم می باشد. ضمنا از حالت کمبود باید اجتناب شود. در این راستا یک مدل بر اساس مدل سنتی EOQ ارائه شده است. هزینه موجودی، هزینه سفارش دهی، هزینه حمل و نقل و ... در مدل منظور می گردند. در مدل، حمل چند مرحله ای در خلال دوره های سفارش دهی با تعدادی مشخص از وسایل نقلیه مجاز است. تصمیمات مدل برای مدیریت سیستم شامل تصمیمات طراحی (تعداد بهینه وسایل نقلیه مورد نیاز) و تصمیمات عملیاتی (اندازه سفارش بهینه و تعداد و مراحل حمل) می باشد. الگوریتمی جهت حل مدل ارائه گردیده است که پیاده سازی گردیده و در وب سایت این مقاله (www.PedramSahba.com) قابل دسترس و اجرا می باشد. مثال عددی و تحلیل حساسیت جهت نشان دادن قابلیت های مدل و نیز تصدیق و تعیین اعتبار آن ارائه شده است.

**واژه های کلیدی:** مدل های یکپارچه[۱] – سیستم دو سطحی[۲] – کنترل موجودی – حمل ونقل

## مقدمه

در دنياي رقابتي امروز طراحي محصولات جديد، توليد و توزيع سرعت گرفته است؛ همزمان نياز به افزايش بازدهي و كاهش هزينه ها به وجود آمده است. اين عوامل باعث مي شود تا شركت ها به طور مستمر به دنبال راه هاي بهبود عمليات باشند. مدل ها و الگوريتم هاي بهينه سازي، سيستم هاي پشتيبان تصميم گيري، ابزارهاي تحليل كامپيوتري نمونه هايي از تلاش سازمان ها براي افزايش كارايي و بقاء در بازار رقابتي مي باشند.

اخيرا ديدگاهي جديد درباره توليد و توزيع به وجود آمده است كه نتايج خيره كننده اي در سازمان هاي استفاده كننده از اين ديدگاه داشته است. اين ديدگاه عبارت است از يكپارچه سازي تصميم گيري در كاركردهاي[۳] مختلفي نظير مكانيابي، برنامه ريزي توليد، مديريت موجودي، توزيع و فرآيند تامين. در سال هاي اخير، در نظر گرفتن توام مشخصات و احتياجات از كاركردهاي مختلف براي انجام يک بهينه سازي جامع، مورد توجه محققين قرار گرفته است كه حاصل آن مدل هايي يكپارچه است. ايده پشت اين مدل ها، بهينه سازي همزمان متغيرهاي تصميم گيري از فرآيندهاي مختلف بر خلاف بهينه سازي متوالي سنتي است. در بهينه سازي متوالي سنتي خروجي بهينه يک مرحله، ورودي مرحله ديگري است.

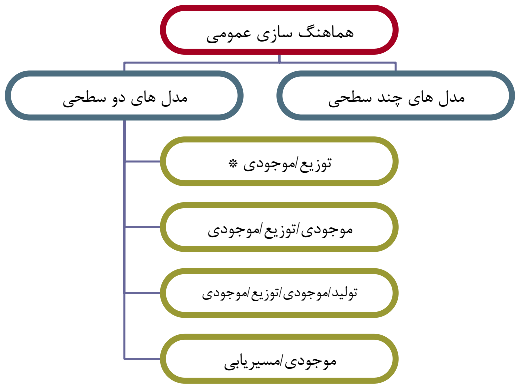
## مرور مراجع

در مقوله هماهنگ سازي در سازمان ها[۴]، دو نوع مساله وجود دارد:

۱. مسائل هماهنگ سازي عمومي[۵]: هماهنگي ميان كاركردهاي مختلف
۲. مسائل هماهنگ سازي چند سطحي[۶]: هماهنگي ميان كاركردهاي مشابه در چند سازمان مختلف

در اين مقاله هدف بررسي «مسائل هماهنگ سازي عمومي» بوده و دسته بندي مدل هاي تصميم گيري يكپارچه ارائه شده در اين زمينه بر اساس تعداد سطوح و نوع تصميمات به عمل آمده در هر سطح نظير مديريت توليد، توزيع و يا موجودي، مي باشد. وجود حمل اضطراري[۷] در مدل مي تواند به عنوان معيار جزئي تر به كار گرفته شود. (شكل ۱)

* نویسنده مسئول : تلفن : ۸۸۰۲۱۰۶۷ ، فاکس : ۸۸۰۱۳۱۰۲ ، Email: fjolai@ut.ac.ir




**شكل ۱: دسته بندي مدل هاي يكپارچه.**

در زمينه مدل هاي بيش از دو سطحي، كوهن و لي [۱] ساختار مدلي استراتژيك و يک راهكار تجزيه سلسله مراتبي را ارائه نمودند. محدوده كاري آنها تحليل تاثيرات متقابل كاركردهاي مختلف در يک شبكه كامل زنجيره تامين بود. براي مدلسازي اين تاثيرات متقابل، آنها چهار زيرمدل شامل كنترل مواد، كنترل توليد، موجودي محصول و كنترل شبكه توزيع كه هر يک نماينده بخشي از كل زنجيره تامين مي باشد، ارائه نمودند. مک و وانگ [۲] راهكاري جهت حل مسائل موجودي/توليد/توزيع با استفاده از الگوريتم ژنتيک ارائه نموده اند. مدل ارائه شده شامل سه سطح بوده كه به ترتيب دربردارنده چندين تامين كننده، يک كارخانه توليدي و چندين خرده فروش مي باشند. هدف اين مدل، رسيدن به جواب بهينه توام سطوح موجودي، مقادير توليدي و مقادير حمل مي باشد، بطوريكه هزينه كل سيستم شامل هزينه نگهداري موجودي، كمبود، توليد و حمل و نقل كمينه شود.

در مدل هاي توزيع/موجودي، توزيع به عنوان سطح اول و خرده فروش يا مشتري نهايي به عنوان سطح دوم در نظر گرفته شده است. در هر يک از سطوح اول و يا دوم ممكن است يک و يا چند عامل وجود داشته باشند. در اين دسته مسائل، سيستمي شامل يک انبار مركزي وجود دارد كه تامين كننده مشتري يا مشترياني است كه از لحاظ جغرافيايي پراكنده اند.لازم به ذكر است كه مدل ارائه گرديده در اين مقاله در دسته مسائل توزيع/موجودي قرار مي گيرد. در حالت مشتري يكتا، بلومنفلد و همكاران [۳] طي تحليلي ميان ذخيره اطمينان در سطح دوم و هزينه هاي تسريع در سطح اول موازنه اي برقرار مي كنند. ظرفيت ناوگان حمل و نقل نامحدود در نظر گرفته شده است و در هر دوره تنها يک حمل مقدور است. يانو و گرچاک [۴] روشي ارائه نمودند كه به صورت همزمان ذخيره اطمينان موقعيت مشتري در سطح دوم، تعداد وسايل نقليه مورد نياز براي حمل عادي و نيز زمان ميان انجام حمل ها را ضمن كمينه كردن هزينه كل عملياتي، محاسبه مي نمايد. ژائو و همكاران [۵] در يک سيستم دو سطحي مدلي ارائه نمودند كه هزينه كل موجودي در سطح دوم و حمل و نقل در سطح اول را بهينه مي كند. در اين مدل فرضيات ساده سازي زيادي وجود دارد.

ارنست و پايک [۶] مدل يانو و گرچاک را توسعه داده و موجودي سطح اول را در آن لحاظ نمودند (موجودي/توزيع/موجودي). هدف كلي اين تحقيق دستيابي همزمان به سطح مبناي موجودي در هر دو سطح، ظرفيت بهينه وسايل نقليه و تناوب حمل بوده است.

در زمينه مدل هاي توليد/موجودي/توزيع/موجودي، بلومنفلد و همكاران [۷] علاقمند به موازنه ميان هزينه هاي حمل و نقل، موجودي و راه اندازي توليد در شبكه مي باشد. بدين ترتيب كه با در نظر گرفتن سه حالت حمل مستقيم ميان نقاط، حمل نامنظم و روش تركيبي به اندازه بهينه محموله دست مي يابند. چيين [۸] حالت حمل مستقيم ميان يک موقعيت تامين كننده و يک موقعيت مصرف كننده را مورد تحليل قرار داده است.

در حال حاضر توجه به مسايل توام موجودي و توزيع رو به گسترش است. در اينگونه مسايل مديريت موجودي و حمل و نقل يكپارچه مي شوند. فدرگروئن و سيمچي-لوي [۹] مروري جامع در اين زمينه انجام داده اند. در زمينه اينگونه از مسايل، يک تصميم گيرنده مسئوليت برآورده نمودن تقاضا در موقعيت هاي گوناگون تقاضا را عهده دار است؛ اين تصميم گيرنده اين مهم را از طريق مديريت ناوگان وسايل نقليه انجام مي دهد. تصميم گيرنده بايد به طور مداوم سطح موجودي را در مكان هاي مصرف بسنجد و از مكان وسايل نقليه اطلاع حاصل نمايد. تصميم گيرنده به دنبال اين است كه در چه زماني، چه مقدار و از چه مسيري موجودي كالا را از طريق وسايل نقليه انتقال دهد. اينگونه مسايل به طور كلي، مسايل مسيريابي موجودي (IRP) خوانده مي شوند كه يكي از مسايل محوري در زمينه VMI[8] است [۱۰].

چنگ و دوران [۱۱] مساله حمل و نقل جهاني نفت خام را مورد بررسي قرار داده اند. در اين مقاله يک سيستم پشتيبان تصميم گيري مبتني بر يکپارچه سازي شبيه سازي[۹] و کنترل بهينه[۱۰] سيستم موجودي/حمل و نقل، ارائه گرديده است. ضمن اينکه مساله طراحي/کنترل بهينه به عنوان يک فرآيند تصميم گيري ماركوفي[۱۱] مدلسازي شده است.

## تعريف مساله

زماني که محصولات از تامين کننده به مصرف کننده تحويل داده مي شوند، هزينه اي جهت حمل و نقل مصرف مي شود. در مدل سنتي مقدار سفارش اقتصادي[۱۲] هزينه حمل و نقل و هزينه توليد با هم در نظر گرفته شده است. در سيستم هاي لجستيکي واقعي، هزينه حمل و نقل شامل مولفه هاي ثابت و متغير است. مولفه هاي ثابت که در هر دوره ثابت در نظر گرفته مي شوند، مربوط به کرايه حمل، حقوق راننده و آماده سازي وسيله نقليه جهت حمل مي باشد. هزينه متغير مربوط به ميزان سوخت مصرف شده مي باشد که در تناسب مستقيم با ميزان مسافت طي شده است. به بياني مختصر، در نظر گرفتن هزينه حمل و نقل به صورت ثابت و يا متناسب با مقدار سفارش غير منطقي است [۵].

مساله ديگري که مديران لجستيک با آن مواجه مي باشند، تعيين تعداد وسايل نقليه مورد نياز در سطح استراتژيک سازمان مي باشد. تعداد وسايل نقليه بايد طوري تعيين گردد که ضمن پاسخگويي به تقاضا، با هزينه اي بهينه استفاده شوند. در حالت ساده و در سطح تاکتيکي، سازمان تعداد وسايل نقليه مشخصي در اختيار دارد و به دنبال نحوه حمل بهينه مي باشد.

اگر محيط تحت بررسي، دو سطحي فرض شود، بطوريکه در سطح اول تامين کننده اي واحد و در سطح دوم مصرف کننده اي واحد وجود داشته باشد، هدف مساله يکپارچه سازي تصميم گيري در سيستم حمل و نقل و توزيع سطح اول و تصميم گيري در سيستم موجودي سطح دوم مي باشد؛ با تعيين تعداد بهينه وسايل نقليه، نحوه حمل و مقدار سفارش بهينه است. با چنين توضيحي در صورت ابداع مدلي با قابليت تصميم گيري يکپارچه در اين زمينه، مي توان از آن در محيط VMI نيز استفاده نمود.

ديگر فرضيات مدل بدين شرح مي باشد:

۱. کمبود مجاز نيست.
۲. نرخ تقاضا قطعي است.
۳. ظرفيت وسايل نقليه يکسان است.
۴. تعداد وسايل نقليه مي تواند معلوم باشد و يا به صورت بهينه تعيين گردد.
۵. حمل مکرر در هر دوره ممکن مي باشد.
۶. يک وسيله نقليه مي تواند با تمام ظرفيت و يا کمتر از ظرفيت مبادرت به حمل نمايد.

## پارامترها و متغيرها

پارامترهاي بکار رفته در مدل، به شرح زيرند:

$K_f$: هزينه سفارش دهي ثابت (به ازاي هر دوره)

$K_v$: هزينه سفارش دهي متغير (به ازاي هر مرحله حمل)

s: هزينه توليد (قيمت هر واحد)

$\beta$: ميزان تقاضا در واحد زمان

c: هزينه متغير هر سفر

f: هزينه کرايه هر وسيله در واحد زمان (حمل ثابت نوع ۱)

w: هزينه آماده سازي هر وسيله در هر دوره براي حمل (حمل ثابت نوع ۲)

h: هزينه نگهداري هر واحد در واحد زمان

p: ظرفيت حمل هر وسيله نقليه

t: زمان مورد نياز هر حمل

m: تعداد وسايل نقليه در دسترس

در ابتدا فرض مي شود دو متغير تصميم گيري وجود دارند:

y: مقدار سفارش

n: تعداد حمل هاي مورد نياز جهت حمل y

## توسعه مدل

مدل ارائه شده، توسعه اي از مدل استاندارد EOQ است؛ به عنوان مثال از برخي فرضيات ساده سازي، نظير ورود يکباره کالا به انبار، صرف نظر شده است. همچنين تعيين تعداد وسايل نقليه و تعداد حمل وارد مدل و انواع هزينه هاي حمل و نقل در مدل در نظر گرفته شده است. نحوه محاسبه هزينه هاي سفارش دهي و موجودي نيز با مدل استاندارد متفاوت است. محدوديت هايي نيز در نظر گرفته شده است:

محدوديت اول مشخص کننده تعداد حمل هاي لازم براي حمل کل سفارش y است:

$$(n-1)p < y \le np \quad (۱)$$

محدوديت هاي ديگر کمي پيچيده تر هستند. فرض کنيد m وسيله نقليه در اختيار سازمان است. فرض مي شود در طول دوره، وسايل نقليه مجاز باشند هر تعداد که مقدور باشد، حمل انجام دهند. اين حمل ها آنقدر ادامه خواهد يافت تا در آن دوره اندازه سفارش اقتصادي به طور کامل حمل شود؛ بديهي است تعداد حمل هر وسيله در هر دوره داراي محدوديت زماني خواهد بود. اگر y اندازه سفارش و $\beta$ نرخ مصرف باشد آنگاه زمان مجاز حمل، برابر با زمان يک دوره يا $y/\beta$ خواهد بود. (شکل ۲) اگر d تعداد حمل هاي مجاز هر وسيله نقليه در هر دوره باشد، بنابراين محدوديتي به اين شکل وجود دارد:

$$d \le \frac{y}{\beta.t} \quad (۲)$$

از طرفي تعداد کل حمل هاي يک دوره (n) محدود به تعداد وسايل نقليه و تعداد حمل هاي مجاز آنهاست:

$$md \ge n \Rightarrow d \ge \frac{n}{m} \quad (۳)$$

محدوديت (۲) و (۳) در رابطه زير خلاصه مي شوند:

$$\frac{n}{m} \le d \le \frac{y}{\beta.t} \quad (۴)$$

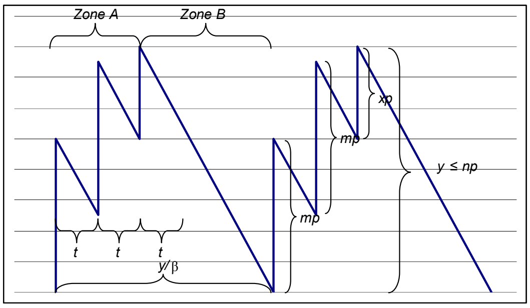
از آنجا که d عددي صحيح است، محدوديت جديد با حذف d، اينچنين مي شود:

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \le \frac{y}{\beta.t} \Rightarrow y \ge \beta.t \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \quad (۵)$$

مي توان اين محدوديت را تفسير و از صحت آن اطمينان حاصل کرد. در محدوديت، $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ به معنايي تعداد مراحل حمل در يک دوره است اگرچه ممکن است $\frac{n}{m}$ غير صحيح باشد. مطابق شکل (۲) هر افزايش موجودي به معني ورود وسايل نقليه است. از آنجا که هر يک از اين حمل ها t واحد زمان به طول خواهد انجاميد، فرآيند حمل t واحد زمان قبل از شروع دوره سفارش دهي شروع مي شود و $\lceil \frac{n}{m} \rceil t$ واحد زمان به طول مي انجامد؛ به همين دليل لزوما دوره بعد بايد حداقل t واحد زمان بعد از پايان فرآيند حمل آغاز گردد. بنابراين طول يک دوره حداقل $\lceil \frac{n}{m} \rceil t$ واحد زمان خواهد بود و درنتيجه در اين مدت ميزان مصرف برابر است با:

$$\beta.t \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$$

بنابراين محدوديت دوم (رابطه ۵)، به اين معني است که مقدار سفارش (y) طوري تعيين شده است که حداقل کفاف تقاضاي دوره حمل را بدهد.




**شکل ۲ : موجودي نسبت به زمان.**

از طرف ديگر از محدوديت اول (رابطه ۱) و دوم (رابطه ۵) داريم:

$$\left.\begin{array}{l}(n-1)p \le y \le np \\ \beta.t\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \le y\end{array}\right\} \Rightarrow \beta.t\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \le np \quad (۶)$$

اين رابطه مفهومي شبيه به رابطه (۵) دارد و چون ترکيبي از محدوديت هاي ديگر مدل است در مدل وجود دارد، ليکن استفاده از آن مي تواند حل مدل را ساده تر نمايد. با وجود محدوديت اول و دوم، با هر n معلوم، y داراي يک حد بالا (درمحدوديت اول) و دو حد پايين (در محدوديت هاي اول و دوم) خواهد بود. حال اگر محدوديت جديد کمکي (رابطه ۶) ارضاء نشود به اين معني است که حد پايين (محدوديت دوم) از حد بالا (محدوديت اول) فراتر رفته است. به عبارت ديگر به ازاي اين n فضاي شدني براي y وجود ندارد. اما موضوع جالب رابطه زير است:

$$\frac{n}{m} \le \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \Rightarrow \beta.t\frac{n}{m} \le \beta.t\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \le np$$
$$\Rightarrow \beta.t \le mp \quad (۷)$$

در اين محدوديت n حذف شده است، بنابراين در ابتداي مساله اين رابطه مي تواند در جهت آزمون شدني بودن کل مساله در نظر گرفته شود. اين رابطه به اين معني است که توان حمل بايد در زمان حمل حداقل پاسخگوي تقاضاي دوره حمل باشد.

براي محاسبه دقيق هزينه موجودي، طول هر دوره مطابق شكل (۲) به دو قسمت A و B تقسيم شده است. قسمت A قسمتي است كه حمل صورت مي پذيرد و قسمت B قسمتي است كه موجودي مصرف مي شود. براي محاسبه هزينه موجودي قسمت A، هزينه موجودي رخ داده در هر حمل را جداگانه محاسبه و جمع مي زنيم. بديهي است كه $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ زير قسمت خواهيم داشت.

متوسط موجودي در دندانه اول قسمت A ($A_1$) برابر است با:

$$\bar{I}_{A_1} = \frac{mp \quad + \quad (mp - t\beta)}{2}$$

به همين صورت داريم:

$$\bar{I}_{A_2} = \frac{((mp - t\beta) + mp) + (((mp - t\beta) + mp) - t\beta)}{2}$$

$$\bar{I}_{A_j} = \frac{(2j)mp - (2j-1)t\beta}{2} \qquad (۸)$$

بنابراين با ضرب متوسط موجودي هر قسمت در مدت زمان آن (t) و نرخ هزينه موجودي (h) هزينه موجودي هر قسمت به دست خواهد آمد. هزينه موجودي در هر دوره، در قسمت A برابر است با:

$$IC_A = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} \frac{(2j)mp - (2j-1)t\beta}{2} .t.h = \alpha(n) \qquad (۹)$$

براي محاسبه هزينه موجودي در قسمت B ابتدا متوسط موجودي در اين قسمت محاسبه مي شود.

$$I_{\max,B} = y - \left( \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor t \right) (\beta) \qquad (۱۰)$$

$$\overline{I_B} = \frac{y - \left( \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor t \right) (\beta)}{2} \qquad (۱۱)$$

با لحاظ نرخ هزينه نگهداري و زمان نگهداري، هزينه موجودي قسمت B در هر دوره محاسبه خواهد شد.

$$IC_B = \frac{y - \left( \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor t \right) (\beta)}{2} * \left( \frac{y}{\beta} - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor t \right) * h$$

$$IC_B = \frac{h}{2} \frac{\left( y - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor t\beta \right)^2}{\beta} \qquad (۱۲)$$

در زمينه مقدار سفارش اقتصادي، هزينه سفارش دهي به هزينه اي اطلاق مي شود كه با افزايش دفعات سفارش دهي، افزايش پيدا مي كند. اين هزينه شامل امور دفتري آماده سازي، صدور سفارش، پيگيري و دريافت سفارش، حمل فيزيكي سفارش، بازرسي و هزينه Setup ماشين آلات مي باشد. در مدل توسعه يافته، ممكن است بهينه باشد كه بيش از یک مرحله حمل براي حمل كامل سفارش اقتصادي رخ دهد، در اين صورت مساله اي كه پيش خواهد آمد، چگونگي در نظر گرفتن هزينه سفارش دهي است. در چنين حالتي طبيعي است كه امور دفتري، صدور سفارش تنها يكبار در یک دوره سفارش دهي رخ دهد. حال آنكه، مابقي عناصر هزينه اي شامل پيگيري و دريافت سفارش، بازرسي و غيره به ازاي هر مرحله حمل رخ خواهد داد. اين مفاهيم و عناصر كلي بوده و مي تواند براي هر مورد خاص، تفاوت ماهوي داشته باشد، ليكن آنچه در اينجا مورد تاكيد است، رخداد یک هزينه ثابت سفارش به ازاي هر دوره و هزينه اي ديگر به ازاي هر مرحله حمل در آن دوره مي باشد. اگر هزينه سفارش دهي به ازاي هر دوره $K_f$ و به ازاي هر مرحله حمل $K_v$ باشد، $K_f$ در هر دوره يكبار و $K_v$ در هر دوره $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ بار پرداخت خواهد شد:

$$OC = K_f + K_v \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \qquad (۱۳)$$

هزينه متغير حمل، برابر با هزينه اي است كه به ازاي هر حمل پرداخت خواهد شود. اين هزينه عمدتا مربوط به سوخت مي باشد. كل اين هزينه در هر دوره برابر است با:

$$VTC = nc \qquad (۱۴)$$

در مدل توسعه يافته دو نوع هزينه ثابت در نظر گرفته شده است:

۱. كرايه وسايل نقليه در مدت حمل
۲. هزينه آماده سازي وسايل نقليه در هر دوره

نحوه محاسبه كرايه ساده است. البته اين هزينه لزوما كرايه نبوده بلكه مفهوما هزينه اي است كه به ازاي واحد زمان براي نگهداري وسايل نقليه در طول دوره حمل پرداخت مي شود. براي محاسبه هزينه كرايه كافي است زمان در خدمت بودن وسايل نقليه در تعداد آنها و نرخ هزينه ضرب گردد (هزينه ها در هر دوره محاسبه شده اند):

$$F_1TC = mft\lceil \tfrac{n}{m} \rceil \qquad (۱۵)$$

كه $t\lceil \frac{n}{m} \rceil$ زمان بكارگيري وسايل نقليه در مدت حمل است. اگر t عددي صحيح نباشد، ممكن است اين زمان عددي صحيح نباشد؛ لذا با توجه به نوع قرارداد كرايه، اين عدد مي تواند به عدد بزرگتر از خود گرد شود:

$$F_1TC = mf\lceil t\lceil \tfrac{n}{m} \rceil \rceil \qquad (۱۶)$$

هزينه ثابت ديگري كه مي تواند در اين مدل لحاظ شود هزينه آماده سازي وسايل نقليه جهت حمل است كه در هر دوره يك بار احتساب خواهد شد. اين هزينه بدين صورت محاسبه خواهد شد:

$$F_1TC = mw \quad (17)$$

كه w هزينه آماده سازي هر وسيله مي باشد.

در مدل، m به عنوان پارامتر در نظر گرفته شده است؛ ليكن در قسمت هاي آتي تغييراتي در ماهيت آن داده خواهد شد.

با اين توضيحات مدل رياضي بدين شكل ارائه مي شود:

$$TCU = \frac{K_f}{\frac{y}{\beta}} + \frac{K_v\left\lceil \frac{n}{m}\right\rceil}{\frac{y}{\beta}} + \frac{sy}{\frac{y}{\beta}} + \frac{nc}{\frac{y}{\beta}} + \frac{mf\left\lceil t\left\lceil \frac{n}{m}\right\rceil\right\rceil}{\frac{y}{\beta}} + \frac{mw}{\frac{y}{\beta}} + \frac{\alpha(n)}{\frac{y}{\beta}} + \frac{h}{2}\frac{\left(y-\left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor t\beta\right)^2}{y}$$

s.t.

1. $(n-1)p < y \le np$
2. $\left\lceil \frac{n}{m}\right\rceil t\beta \le y$
3. n is Integer (18)

تابع $\gamma$ نسبت n براي سادگي شكل مدل بدين صورت تعريف مي شود:

$$\gamma(n) = \beta\left(K_f + K_v\left\lceil \frac{n}{m}\right\rceil + nc + mft\left\lceil \frac{n}{m}\right\rceil + mw + \alpha(n)\right) \quad (19)$$

## روش حل مدل

محدوديت هاي مدل، به طريقي آشكار y و n را به هم وابسته نموده است؛ بطوريكه با nهاي معلوم، حدود y با استفاده از محدوديت ها محاسبه مي شود. ضمنا با جايگذاري n در تابع هزينه، تابع تنها به y وابسته خواهد بود. البته با n معلوم، اين تابع تنها براي آن بازه y، كه از طريق محدوديت ها حاصل شده است معتبر خواهد بود. براي دستيابي به نقطه اي بهينه بايد كمينه مقدار تابع و y بهينه در محدوده متناظر با n مشخص شود و نهايتا مقادير كمينه تابع در محدوده n هاي مختلف با هم مقايسه و مقدار بهينه تابع كل حساب مي شود. تابع هر محدوده كه وابسته به y و با مقدار جايگذاري شده n است را مي توان با $TCU_n(y)$ نشان دهيم. با استفاده از مشتق گيري نيز مي توانيم نقطه $y^*$ را در اين محدوده تعيين كنيم. ممكن است $y^*$ به عنوان نتيجه دهنده كمينه تابع هدف به ازاي n معلوم، در محدوده مجاز نباشد؛ به عبارت ديگر تابعي كه از جايگذاري n حاصل شده داراي نقطه كمينه اي خارج از محدوديت اول و دوم براي y است. در اينصورت از آنجايي كه يك y كمينه كننده داخل محدوده مورد نياز است به مكانيزمي ديگر براي تعيين كمينه احتياج است.

اگرچه تابع كل، تابعي گسسته است، ليكن اين تابع در هر محدوده حاصل از محدوديت ها پيوسته است. تابع هر محدوده را با $TCU_n(y)$ نشان مي دهيم:

$$TCU_n(y) = \frac{\gamma(n)}{y} + s\beta + \frac{h}{2}\frac{\left(y-\left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor t\beta\right)^2}{y} \quad (20)$$

براي پيدا كردن نقطه كمينه تابع با n معلوم، از تابع مشتق گرفته و برابر با صفر قرار داده شد:

$$\frac{dTCU_n(y)}{dy} = 0 \Rightarrow y^* = \sqrt{\frac{2\gamma(n)}{h} + \left(\left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor t\beta\right)^2} \quad (21)$$

مشتق دوم تابع پيوسته و به صورت زير است:

$$\frac{d^2TCU_n(y)}{dy^2} = \frac{2\gamma(n) + h\left(\left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor t\beta\right)^2}{y^3} \quad (22)$$

براي پيدا كردن نقطه كمينه در هر محدوده و محدود كردن تعداد محدوده هاي مورد بررسي دو قضيه زير قابل استفاده خواهند بود:

**قضيه ۱:** اگر مقدار $y_n^*$ در محدوده بود، مقدار تابع $TCU_n(y_n^*)$ كمينه خواهد بود؛ يعني:

$$f(n) = TCU_n(y_n^*)$$

( $f(n)$ برابر با كمينه مقدار تابع در محدوده n است.)

در غير اينصورت مقدار تابع به ازاي يكي از حدود حاصل از محدوديت اول و دوم كمينه خواهد بود:

$$y_1 = \max\left((n-1)p+1, \left\lceil \frac{n}{m}\right\rceil t\beta\right)$$

$$y_2 = np$$

$$f(n) = \min\{TCU_n(y_1), TCU_n(y_2)\}$$

### اثبات

تابع $TCU_n(y)$، همواره محدب است و نقطه كمينه $y_n^*$ در آن موجود است.

$$y^* = \sqrt{\frac{2\gamma(n)}{h} + \left(\left\lfloor \frac{n}{m}\right\rfloor t\beta\right)^2}$$

و مشتق دوم (رابطه ۲۲) همواره مثبت است:

$$\forall y > 0 \Rightarrow \frac{d^2 TCU_n(y)}{dy^2} > 0$$

اگر نقطه $y_n^*$ در محدوديت اول و دوم صدق كند، بديهي است به ازاي آن كمترين مقدار تابع حاصل مي شود:

$$f(n) = TCU_n(y_n^*)$$

در غير اين صورت از آنجا كه تابع محدب، مشتق دوم آن همواره مثبت و مشتق اول آن صعودي است، تابع يا در حال صعود است يا نزول، بنابراين يكي از حدود آن كمينه و ديگري بيشينه است. به بياني روشن تر اگر تابع در آن محدوده صعودي باشد، حد چپ كمينه و حد راست بيشينه تابع را حاصل خواهند كرد و اگر نزولي باشد، بالعكس. بنابراين قضيه ثابت مي شود.

**قضيه ۲:** اگر $f(n_j)$ در هر یک از دو شرط زير صدق كند، براي تمام $n_i$ هاي بزرگتر از $n_j$ ، $f(n_i)$ نمي تواند كمتر از $f(n_j)$ باشد:

$$1.\ f(n_j) = TCU_{n_j}(y_{n_j}^*)$$

$$2.\ f(n_j) \le TCU_{n_k}(y_{n_k}^*), n_k = n_j + 1$$

**اثبات**

۱. $y_n^*$ و $TCU_n(y_n^*)$ نسبت به n، غير نزولي مي باشند؛ لذا اگر

$$n_i > n_j$$

داريم:

$$TCU_{n_i}(y_{n_i}^*) > TCU_{n_j}(y_{n_j}^*)$$

بنابراين

$$f(n_i) \ge TCU_{n_i}(y_{n_i}^*) > TCU_{n_j}(y_{n_j}^*) = f(n_j)$$

۲. از آنجا كه $f(n_k)$ حاصل نقطه بهينه و يا حاصل نقاط مرزي است مي توان گفت:

$$f(n_j) \le TCU_{n_k}(y_{n_k}^*) \le f(n_k)$$

اما مي دانيم كه $TCU_n(y_n^*)$ غير نزولي و به ازاي $n_i$ هاي بزرگتر از $n_k$ افزايش مي يابد:

$$n_i > n_k \Rightarrow$$

$$f(n_j) \le TCU_{n_k}(y_{n_k}^*) < TCU_{n_i}(y_{n_i}^*) \le f(n_i)$$

از اين قضيه مي توان نتيجه گرفت كه اگر بعد از بررسي چند n متوالي به مقداري كمينه از تابع دست پيدا كرده باشيم:

$$TCU_{\min}(n_j) = \min\{f(n_r) \mid for \quad all \quad n_r \le n_j\}$$

و براي $n_k = n_j + 1$ داشته باشيم:

$$TCU_{\min}(n_j) \le TCU_{n_k}(y_{n_k}^*)$$

آنگاه به ازاي $n_i$ هاي بزرگتر از $n_k$ نمي توان جوابي بهتر براي تابع هدف كل بدست آورد، زيرا:

$$TCU_{\min}(n_j) \le TCU_{n_k}(y_{n_k}^*) < TCU_{n_i}(y_{n_i}^*) \le f(n_i)$$

## الگوريتم حل مدل توسعه يافته

با استفاده از قضاياي بالا و نتيجه گيري، الگوريتمي قابل اجرا براي حل مدل قابل استفاده است:

قدم ۱: اگر $t\beta \le mp$ نبود *پايان الگوريتم*

(پارامترهاي مساله فضاي شدني براي مدل ايجاد نمي كنند)

قدم ۲: مقدار اوليه n در نظر گرفته شود.

n=1

قدم ۳: مادامي كه فضاي شدني به ازاي n وجود ندارد (محدوديت اول و دوم) به n یک واحد اضافه شود.

قدم ۴: $y_n^*$ محاسبه شود (رابطه ۲۱)

قدم ۵: اگر $y_n^*$ در محدوديت اول و دوم صدق مي كرد، آنگاه به قدم ۶ رفته و الگوريتم پايان مي يابد، در غير اين صورت به قدم ۷ برويد.

قدم ۶: اگر $y_n^*$ در محدوديت ها صدق مي كرد:

$$f(n) = TCU_n(y_n^*)$$

و

$$TCU_{\min} = \min\{TCU_{\min}, f(n)\}$$

(مقدار اوليه $TCU_{\min}$ برابر با بي نهايت است.)

پايان الگوريتم

قدم ۷: اگر $y_n^*$ در محدوديت ها صدق نمي كرد، آنگاه:

$$y_1 = \max\left((n-1)p + 1, \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil t\beta\right)$$

$$y_2 = np$$

$$f(n) = \min\{TCU_n(y_1), TCU_n(y_2)\}$$

و

$$TCU_{\min} = \min\{TCU_{\min}, f(n)\}$$

قدم ۸: براي $n_k = n + 1$ ، $TCU_{n_k}(y_{n_k}^*)$ محاسبه شود.

قدم ۹: اگر

$$TCU_{\min} \le TCU_{n_k}(y_{n_k}^*)$$

آنگاه الگوريتم پايان مي يابد، در غير اين صورت

$$n = n + 1$$

و به قدم ۳ برگرديد.

در پیاده سازي الگوریتم از زبان برنامه نویسي C++ استفاده شده است. كلاسي تحت عنوان EOQM با ارث بري از اينترفيس IEOQ طراحي شده، به طوريكه هر يک با متد GetResults()، كلاسي به نام EOQResults را برمي گرداند كه حاوي فيلدهاي داده ها و خروجي بهينه مساله و متدهايي جهت نمايش اين نتيجه ها مي باشد. متد GetResults() در قالب Singleton Pattern طراحي شده و در اولين اجراي آن، الگوريتم تنها يكبار اجرا خواهد شد و با اجراي دوباره متد، نمونه كلاس EOQResults كه شامل نتايج اجراي واحد الگوريتم است و در داخل كلاس به صورت غير قابل دسترس از خارج ذخيره شده است، برگردانده خواهد شد. كلاس مربوطه در قالب يک فايل dll در وب سايت اين مقاله قابل اجرا و نيز قابل دريافت است.

**مثال ۱**

پارامترها به اين ترتيب خواهند بود:

| | | | |
|---|---|---|---|
| K | = | 100 | $ |
| β | = | 100 | unit/day |
| s | = | 0.3 | $/unit |
| c | = | 40 | $/trip |
| f | = | 40 | $/(day.vehicle) |
| h | = | 0.02 | $/(unit.day) |
| U | = | 8 | hour/day |
| t | = | 4 | hour/day |
| d | = | 2 | trip/day |
| p | = | 200 | unit |
| L | = | 2 | day |

نتيجه حل اين مساله در جدول (۱) آمده است.

همان طور كه در نتيجه قدمهاي الگوريتم مشخص است، هيچ يک از y* ها در محدوده مطلوب قرار ندارند و همه جواب ها نتيجه نقاط مرزي هستند. در n=13، y* در محدوده مجاز مي باشد. الگوريتم قبل از قدم ۱۰ خواهد ايستاد. جواب بهينه مدل اين است كه با ۳ وسيله نقليه، در طي يک روز ۶ حمل انجام و ۱۲۰۰ واحد كالا منتقل خواهد شد.

**جدول ۱: خروجی اجرای الگوریتم حل مدل اولیه.**

| *n* | *Y-L* | *Y-U* | *Y** | *TCU** | *TCU1* | *TCU2* | *Fn* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *50* | *200* | *1360.15* | *57.2* | *400.5* | *124.5* | *124.5* |
| *2* | *201* | *400* | *1500* | *60* | *143.95* | *90.25* | *90.25* |
| *3* | *401* | *600* | *1646.21* | *61.92* | *100.59* | *80.17* | *80.17* |
| *4* | *601* | *800* | *1886.8* | *66.74* | *94.24* | *81.5* | *81.5* |
| *5* | *801* | *1000* | *1989.97* | *68.8* | *86.45* | *78.6* | *78.6* |
| *6* | *1001* | *1200* | *2116.6* | *70.33* | *82.77* | *77.33* | *77.33* |
| *7* | *1201* | *1400* | *2308.68* | *74.17* | *84.39* | *80.07* | *80.07* |
| *8* | *1401* | *1600* | *2393.74* | *75.87* | *82.91* | *79.81* | *79.81* |
| *9* | *1601* | *1800* | *2511.97* | *77.24* | *82.42* | *80.06* | *80.06* |
| *Algorithm ended before step 10* | | | | | | | |
| ***Results:*** | | | | | | | |
| *n* | = | *6* | | | | | |
| *y** | = | *1200* | | | | | |
| *TCU** | = | *77.3333333333333* | | | | | |
| *r* | = | *12* | | | | | |
| *x* | = | *200* | | | | | |
| *m* | = | *3* | | | | | |
| ***Costs:*** | | | | | | | |
| *Ordering* | = | *8.33333333333333* | | | | | |
| *Purchasing* | = | *30* | | | | | |
| *Var. Trans* | = | *20* | | | | | |
| *Fix. Trans* | = | *7.5* | | | | | |
| *Inventory* | = | *11.5* | | | | | |

**مثال ۲**

در اين بخش مثالي نزديک بـه دنيـاي واقعـي جهـت بررسـي صـحت مـدل و روش حـل آن ارائـه مـي گـردد. پارامترهاي مثال به اين شرح مي باشند:

روز = واحد زمان

| | | | |
|---|---|---|---|
| $K_f$ | = | 70 | $ |
| $K_v$ | = | 30 | $ |
| β | = | 100 | unit/day |
| s | = | 0.3 | $/unit |
| c | = | 40 | $/trip |
| f | = | 30 | $/(day.Vehicle) |
| w | = | 3 | $/vehicle |
| h | = | 0.02 | $/(unit.day) |
| t | = | 1 | day |
| p | = | 25 | unit/vehicle |
| L | = | 2 | day |

لازم بـه ذکـر اسـت کـه ايـن مثـال طـوري طراحـي شده است که تـا حـدي بـه نقـاط مـرزي نزديـک بـوده و محدوديت ها را فعال نمايد.

ظرفيت حمـل هـر وسـيله نقليـه ۲۵ واحـد اسـت و مصرف روزانه ۱۰۰ واحـد؛ مـدت حمـل نيـز ۱ روز اسـت، بنابراين آنچه منطقا از داده هاي مساله استنتاج مـي شـود اين است که وقتي موجودي صفر اسـت (ابتـداي دوره) در روز بايد ۴ حمل انجام شود تا حداقل مصرف روزانه تـامين گردد. بنابراين بدون وارد شدن به بررسي محدوديت هـاي مدل مي توان گفت به ازاي m=1,2,3 مساله داراي فضـاي شـدني نيسـت. در الگـوريتم حـل، اولـين قـدم آزمـون محدوديت βt≤mp است که به همين معنـي اسـت. يعنـي بايد 100*1≤25*m که براي m=1,2,3 برقرار نخواهد بـود، اما اين قدم الگوريتم براي آن است که در اولـين قـدم بـه صورت سرانگشتي از وجود فضاي شدني اطمينـان حاصـل شود و بدون وجود ايـن قـدم و محـدوديت کـه چگـونگي استخراج آن از محدوديت هاي مدل مشروحا توضيح داده شده است، محدوديت هاي مدل فعال شده و الگـوريتم در قدم سوم، به دنبال فضاي شدني مي گـردد. بـديهي اسـت اگر شرط سرانگشتي ذکر شده ارضاء نشود، آنگاه الگـوريتم هيچگاه موفق به يافتن فضاي شدني نخواهد شد.

اما در m=4 حالت پيچيـده تـري رخ خواهـد داد. در ايـن حالـت ميـزان حمـل در هـر مرحلـه حمـل برابـر بـا mp=4*25=100 خواهد بود و ميزان مصرف در ايـن زمـان برابر tβ=1*100=100 خواهد بود. بنابراين ميـزان تقاضـا و ورود به انبار برابر است. (شکل ۳) لازم به ذکـر اسـت کـه نمودار موجودي نسبت به زمان قطعا بـدين شـکل خواهـد بود و تنها تصميم مدل و الگوريتم، تعيين تعداد حمـل (n) در يک دوره است.

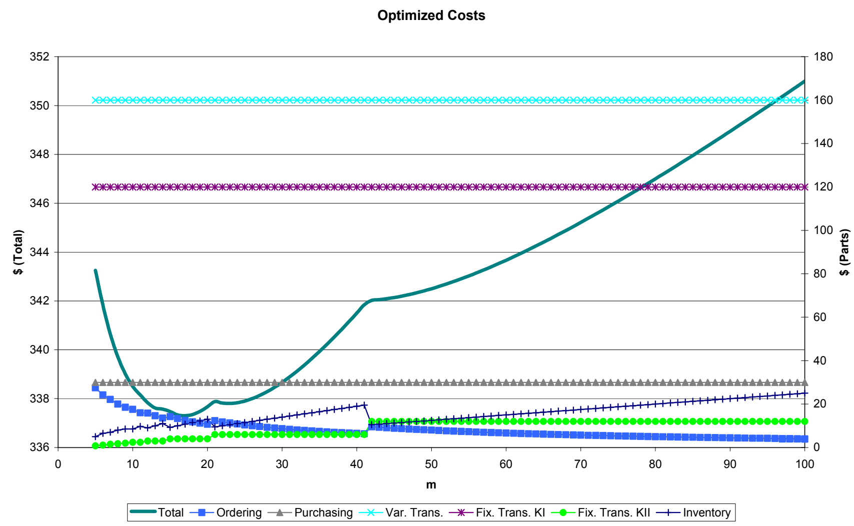

**شکل ۳: نمودار موجودي نسبت به زمان در حالت خاص.**

در اين حالت هر يک از نقـاطي کـه موجـودي در آن صفر است مي تواند پايان دوره و شروع دوره بعد باشـد. در ضمن هزينه موجودي در واحد زمان، هزينه سفارش دهـي متغيـر، هزينـه حمـل متغيـر و هزينـه حمـل ثابـت نـوع اول(کرايه) همواره ثابت خواهند بود و تـاثيري بـر تصـميم گيري ندارند. هزينه خريد نيز که به خـودي خـود ثابـت و همواره غير موثر در تصـميم گيـري اسـت. بنـابراين تنهـا مولفه هاي باقيمانده در تابع هدف عبـارت اسـت از هزينـه ثابت سفارش دهي و هزينـه آمـاده سـازي وسـايل نقليـه. بنابراين با افزايش n، TCU همواره کـاهش خواهـد يافـت. بنابراين با ميل کردن n به بينهايت ايندو مولفه نيز به صفر ميل مي کنند. نتيجه منطقي اين است که هر چـه انـدازه دوره بزرگتر در نظـر گرفتـه شـود دو عامـل هزينـه هـاي سفارش ثابت و آماده سازي وسـايل نقليـه در دوره پخـش شده و هزينه کل پائين مي آيد. اما آنچنان که ذکر گرديد، به هر صورت تنها يک فرم موجودي و يک فرم حمل بـراي وسايل نقليه وجـود دارد و در واقـع تصـميم گيـري زمـان سفارش اصلي بايد در دنياي واقعي و طي مـذاکرات ميـان تامين کننده و مصرف کننده در مورد هزينه سفارش دهي ثابت انجام شود. از آنجا که وسايل نقليه به صـورت کامـل در اختيار تامين يک نوع کالاست، بنـابراين هزينـه آمـاده سازي براي حمل کالا در هر دوره کاذب خواهد بود.

به ازاي m=5 فضاي شدني وجود خواهد داشت و قدم اول الگوريتم اجازه ادامه خواهد داد:

$$mp \geq t\beta \Rightarrow 5*25 \geq 1*100 \Rightarrow 125 \geq 100$$

امـا در قـدم سـوم بـه ازاي nهـاي مختلـف بعضا حالت هاي غير شدني نيز پيش مي آيد که از نظمي خاص پيـروي مـي کنـد. بـه ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 1$، ۴ تکـرار، بـه ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 2$، ۳ تکرار، به ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 3$، ۲ تکرار و بـه ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 4$، يک تکرار محدوديت دوم فعال مي شود. علاوه




**شكل ٤: هزينه هاي حاصل از اجراي الگوريتم به ازاي $m$ هاي مختلف.**

بر اين به ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 1$، ۳ تكرار، به ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 2$، ۲ تكرار، به ازاي $\lceil \frac{n}{m} \rceil = 3$، يک تكرار مساله داراي فضاي شدني نيست، چرا كه حد پايين متصور در محدوديت دوم از حد بالاي محدوديت اول فراتر مي رود و در تكرار هاي n برابر با 4,8,12و16 محدوديت دوم به عنوان حد پائين بازه درگير است. حال مي خواهيم بدانيم با وجود توسعه يافتن مدل بر اساس m ثابت، به ازاي كدام m هزينه كمينه خواهد شد؟ در واقع به دنبال بردار بهينه $(y^*,n^*,m^*)$ هستيم. از آنجا كه m محدود است و نمي تواند مقدار غير معمول بگيرد، به راحتي با جايگذاري mهاي مختلف از كوچكترين m ممكن تا بزرگترين m ممكن در مدل و اجراي الگوريتم، كمترين $TCU^*$ و m مربوطه يافته خواهد شد. در واقع با ادغام اين الگوريتم كوچک با الگوريتم مدل به الگوريتمي رسيده ايم كه حل مدلي با سه متغير تصميم گيري به صورت بهينه توسط آن انجام مي شود. همانطور كه مشروحا توضيح داده شد و از آنجا كه m عددي صحيح است، كوچكترين m ممكن برابر است با:

$$m = \left\lfloor \frac{t\beta}{p} \right\rfloor + 1 \qquad (۲۳)$$

فرض مي كنيم حداكثر ۱۰۰ وسيله براي شركت قابل دسترس باشد، در اين صورت الگوريتم به ازاي m=5 تا m=100 اجرا و مقدار هزينه بهينه نسبت به m در شكل (۴) ترسيم گرديده است. همانطور كه مشاهده مي شود، شكل نمودار داراي پيچيدگي و حتي داراي نقاط بهينه منطقه اي است.

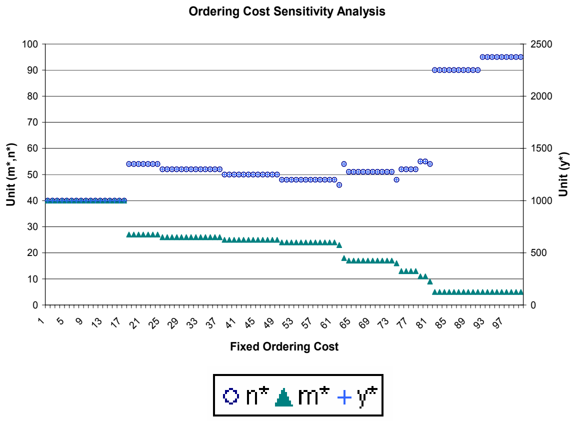
مطابق شكل (۴) كمينه هزينه در m=17 رخ مي دهد. اين هزينه برابر با 337.29$ مي باشد. الگوريتم پس از ۳۹۴ تكرار متوقف شده است. اندازه سفارش اقتصادي برابر با 1275 واحد و انجام 51 حمل در هر دوره بهينه مي باشد.

## تحليل حساسيت

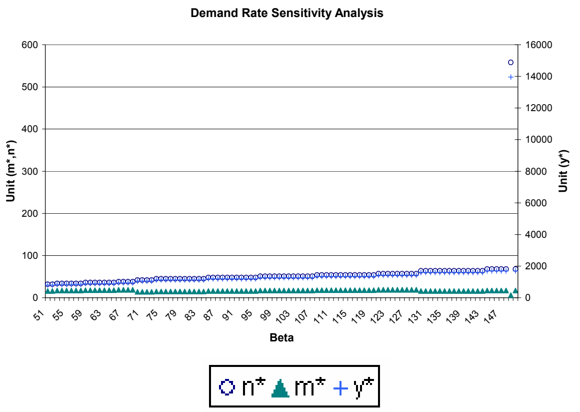
حساسيت منطقي مدل نسبت به پارامترها حاكي از اعتبار مدل خواهد بود. به جهت ملموس بودن حساسيت مدل نسبت به تغيير پارامترها، تحليل حساسيت در مثال ارائه شده، انجام گرفته است و حاصل در شكل هاي (۵) تا (۱۰) آورده شده است. تعداد وسايل نقليه آزاد در نظر گرفته شده است تا مقدار بهينه تعيين گردد.

در مثال حل شده، هزينه سفارش دهي ثابت $K_f$ برابر با 70 واحد و هزينه سفارش دهي متغير $K_v$ برابر با 30 واحد در نظر گرفته شده است؛ حال با فرض ثابت ماندن مجموع دو پارامتر فرض كنيد نسبت اينده تغيير داده شود. اگر هزينه سفارش دهي متغير مربوط به هر مرحله حمل زياد باشد؛ در اين صورت به منظور عدم پرداخت اين هزينه گزاف، منطقا بايد تعداد مراحل حمل در يک دوره كاهش يابد. به عبارت ديگر $n^*$ به سمت $m^*$ نزديک تر شود و بالعكس در صورتي كه بخش بيشتري از هزينه سفارش دهي مربوط به مقدار ثابت آن باشد، بايد به صورتي سفارش صادر شود كه طي يک سفارش و به عبارت ديگر طي يكبار پرداخت هزينه

سفارش دهي ثابت، تعـداد مراحـل حمـل بيشـتري انجـام گيرد. ضمنا اگر هزينه هـاي سـفارش دهـي اجـازه تعـداد مراحل حمل بيشتري دهد، آنگاه مي توان از وسايل نقليـه كمتري با تعداد مراحل حمل بيشتري استفاده نمود تـا در ديگر هزينه ها نظير كرايه صرفه جويي شود(شكل ۵).



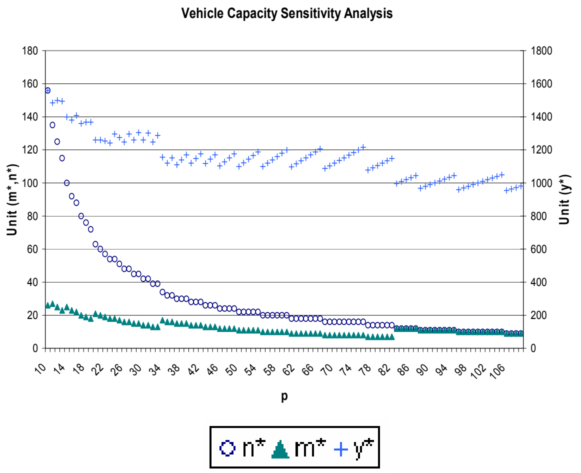

**شكل ۵: تحليل حساسيت نرخ هزينه سفارش دهي.**




**شكل ۶: تحليل حساسيت نرخ مصرف.**

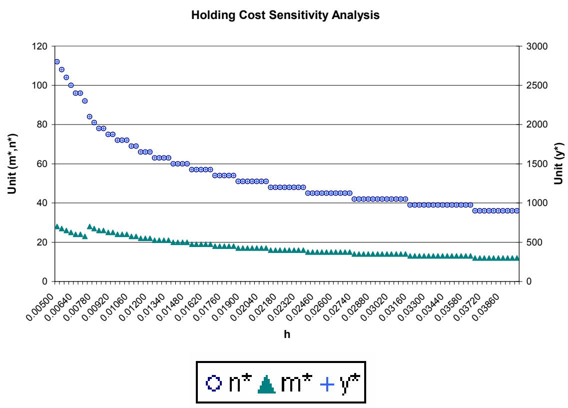
با تعداد وسيله ثابـت ( $m$ )، مسـلما بـا افـزايش نـرخ مصرف ($\beta$)، طي حمل هاي بيشتـر، مقـدار بيشـتري بايـد حمـل شـود؛ در اينصـورت تعـداد مراحـل حمـل افـزايش خواهند يافت. (شكل ۶) در نمودار مربوطه يک نقطه بهينه حاصل از مشتق گيري وجود دارد.

فرض كنيد با تعداد وسـيله نقليـه ثابـت، ناگهـان بـه ظرفيت حمل وسـايل افـزوده شـود. مسـلما در اينصـورت تعداد حمل نصف خواهد شد. به عبـارت ديگـر $n^*$ كـاهش خواهد يافت. از سوي ديگر، اگر تعـداد حمـل ( $n^*$ ) ثابـت باشد، با افـزايش ظرفيـت مقـدار بيشـتري حمـل صـورت خواهد پذيرفت، يعني $y^*$ افزايش خواهد يافت. اگر تعـداد وسايل نقليه مورد نياز به صـورت بهينـه تعيـين گـردد در اينصورت بديهي است كه با افزايش ظرفيت نياز كمتري به وسايل نقليه خواهد بود. علاوه بر ايـن، ايـن نكتـه كـه $p$ فاكتوري مهم در محدوديت اول است، حساسـيت مـدل را نسبت به اين پارامتر افزايش مي دهد (شكل ۷).




**شكل ۷: تحليل حساسيت ظرفيت وسايل نقليه.**

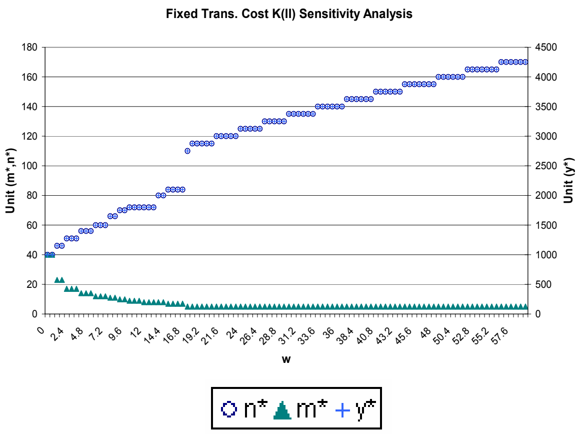
اگر هزينه موجودي افزايش يابد؛ نتيجه منطقـي ايـن موضوع، تمايل به كاهش موجودي و در عـوض سفارشـات مكرر خواهـد بـود. در حالـت وسـايل نقليـه متغيـر ( $m$ )، ضمن اينكه ميزان سفارش به تـدريج در راسـتاي كـاهش موجودي كاهش مي يابد، تعداد وسايل نقليه بهينه ( $m^*$ ) نيز به تدريج و با كم شدن نياز به حمل كـاهش مـي يابـد (شكل ۸).




**شكل ۸: تحليل حساسيت نرخ هزينه نگهداري.**

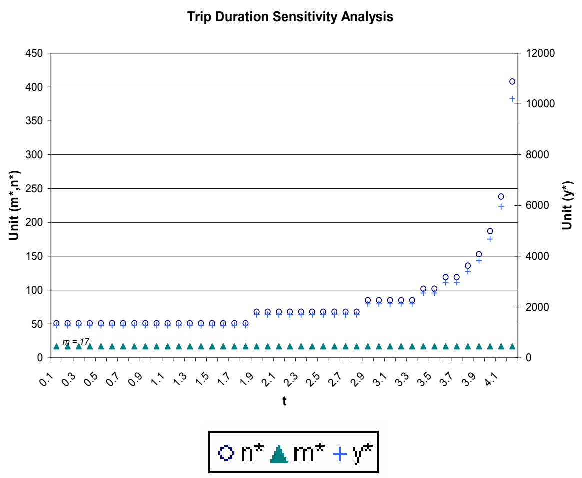
اگر نرخ هزينـه حمـل ثابـت نـوع دوم افـزايش يابـد، نتيجه منطقي اين است كه سعي شود طول دوره افـزايش يابد، تا با يكبار پرداخت هزينه آماده سازي حمل بيشـتري صورت گيرد. افزايش دوره به معني افزايش مقدار سـفارش اقتصـادي ( $y^*$ ) اسـت كـه در ارتبـاط مسـتقيم بـا $n^*$ مي باشد. علاوه بر اين پيامد بعدي كـاهش تعـداد وسـايل نقليه ( $m^*$ ) است؛ چرا كه هزينه آماده سازي به هر وسيله در يک دوره تعلق مي گيـرد و بـراي تعـديل ايـن افـزايش

چاره اي جز كاهش تعداد وسايل نقليه تا حد امكان وجـود ندارد (شكل ۹).




**شكل ۹: تحليل حساسيت نرخ هزينه ثابت حمل (آماده سازي).**

زمان حمل (t) مانند ظرفيت هر وسيله (p) پارامتري مهم در مدل است كه مدل حساسيت بالايي بـه آن نشـان مي دهد. اين پارامتر علاوه بر چند مولفه تـابع هزينـه ، در محدوديت دوم نيـز وجـود دارد. در حالـت تعـداد وسـايل ثابت، بـا افـزايش زمـان حمـل (t)، $n^*$ و $y^*$ بـه تـدريج افزايش پيدا مي كننـد. زيـرا بـا افـزايش t، در حـالتي كـه بهينگي $n^*$ و $y^*$ بـدون تغييـر اسـت، هزينـه موجـودي كاهش مي يابد. در اينصورت مـدل تمايـل دارد حـال كـه هزينه موجودي كم است، سفارش بيشتري صادر كرده و از هزينه هاي سفارش دهي ثابت و آماده سازي وسايل نقليـه بكاهد؛ لذا افزايش $n^*$ و $y^*$ ديده مي شود (شكل ۱۰).




**شكل ۱۰: تحليل حساسيت زمان هر حمل.**

عكس العمل هاي منطقي سازمان در مقابل هر تغيير پارامتري تشريح شد؛ شكل هاي مربوطه نشان مـي دهنـد كـه رفتـار مـدل نسـبت بـه تغييـر پارامترهـا، منطقـي و هوشمندانه است. لازم به ذكر است جهت تهيه نمودارهاي تحليل حساسيت، الگوريتم حل مـدل ۱۶۰۸۰۰ بـار اجـرا گرديده است.

به طور كلي مي توان گفـت، افـزايش نسـبت هزينـه سفارش دهي ثابت به متغير، ظرفيت حمل وسـايل نقليـه، هزينه موجودي و نرخ هزينه حمل ثابت نوع دوم، مشخصا سبب كاهش و افزايش زمان حمل سبب افـزايش نيـاز بـه وسايل نقليه ($m^*$) خواهد گرديد. افزايش نسـبت هزينـه سفارش دهي ثابت به متغير، نـرخ مصـرف، هزينـه حمـل ثابت نوع اول و دوم و زمان حمل مشخصا سـبب افـزايش اندازه سفارش بهينه ($y^*$) و افزايش نرخ هزينه موجـودي سبب كاهش اندازه سفارش بهينه ($y^*$) مي گردد.

## نتيجه گيري

در اين مقاله، مساله اي در يـك سيسـتم لجسـتيكي تامين كننده/خـرده فـروش مطـرح و مـورد بررسـي قـرار گرفت. ابتدا مرور ادبياتي در زمينـه مـدل هـاي يكپارچـه انجام و سپس مدلي ارائه شد كـه در آن عـلاوه بـر هزينـه هاي سفارش دهـي و موجـودي، هزينـه هـاي حمـل نيـز احتساب گرديدند. ايـن مـدل، در سـطح تـاكتيكي شـامل تصميم گيري هاي عملياتي نظير اندازه سـفارش بهينـه و نحوه حمل و در سطح استراتژيك شامل تصميم گيـري در مورد طراحي ناوگان حمل و تعـداد وسـايل نقليـه بهينـه، مي باشد. از آنجا كـه مـدل غيـر خطـي و شـامل چنـدين متغير تصميم گيري بود، با اثبـات نمـودن قضايايي، يـك الگوريتم حل ارائه گرديد كه به جواب بهينه مساله منجـر مي شود. اين الگوريتم نهايتـا پيـاده سـازي و مثـالي ارائـه گرديد. در تحليل حساسيت، حساسيت مدل نسبت به هـر يك از پارامترها سنجيده شد. بـراي اثبـات كـارايي ده هـا هزار بار الگوريتم اجرا و منطق رفتار مـدل مـورد تحليـل و تاييد قرار گرفـت؛ ايـن رفتـار منطقـي، نمايـانگر اعتبـار و كاربرد مدل مي باشد.

در ادامه اين مطالعه مـي تـوان حـالتي كـه ظرفيـت وسـايل نقليـه يكسـان نباشـند، در نظـر گرفتـه شـود؛ همچنين فرض افزايش موقعيت ها در هر سطح مي توانـد مورد بررسي قرار گيرد. اقلام متعدد[13] كـه بـا تخصـيص منابع توام خواهد بود زمينه ديگري بـراي توسـعه مـدل و مساله است. ضمنا افزودن تصميم گيري هاي كاركردهـاي ديگر نظير مديريت موجودي، توزيع و برنامه ريزي توليـد، در هر يك از سـطوح دوگـانه مفروض و يا سـطوح جديد

و در واقـــع توسعه يكپارچگي تصميم گيري در سيستم، موردي است كه جاي مطالعه بيشتري دارد.

**تقدير و تشكر**

اين پژوهش با حمايت مالي دانشگاه تهران تحت قرارداد شماره ۸۱۰۹۰۰۳/۱/۰۲ صورت پذيرفته است.

## مراجع

1 - Cohen, M. A. and Lee, H. L. (1988). "Strategic analysis of integrated production-distribution systems: models and methods." *Operations Research,* Vol. 36, No. 2, PP.216–228.

2 - Mak, K. L. and Wong, Y. S. (1995). "Design of integrated production-inventory-distribution systems using genetic algorithm." *Proc., 1st IEE/IEEE Int. Conf. on Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications,* Sheffield, Engl. PP.454–460

3 - Blumenfeld, D. E., Hall, R.W., and Jordan, W. C. (1985b). "Trade-off between freight expediting and safety stock inventory costs." *Journal of Business Logistics,* Vol. 6, No. 1, PP.79–100.

4 - Yano, C. A. and Gerchak, Y. (1989). "Transportation contracts and safety stocks for Just-in-time deliveries." *Journal of Manufacturing and Operations Management*, Vol. 2, PP.314–330.

5 - Zhao, Q. H., Wang, S. H., Lai, K.-K. and Xia, G. P. (2004). "Model and algorithm of an inventory problem with the consideration of transportation." *Computers & Industrial Engineering,* Vol.46,PP. 389-397.

6 - Ernst, R. and Pyke, D. F. (1993). "Optimal base stock policies and truck capacity in a two-echelon system." *Naval Research Logistics,* Vol. 40, PP.879–903.

7 - Blumenfeld, D. E., Burns, L. D., Diltz, J. D. and Daganzo, C. F. (1985a). "Analyzing trade-offs between transportation, inventory and production costs on freight networks." *Transportation Research,* Vol.19B, No.5, PP.361–380.

8 - Chien, T. W. (1993). "Determining profit-maximizing production/shipping policies in a one-to-one direct shipping, stochastic demand environment." *European Journal of Operational Research*, Vol. 64, PP.83–102.

9 - Federgruen, A. and Simchi-Levi, D. (1995). "Analysis of Vehicle Routing and Inventory Routing Problems." *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 8, PP.297–373.

10 - Kleywegt, A. J., Nori, V. S. and Savelsbergh, M. W. P. (2002). "The stochastic inventory routing problem with direct deliveries." *Transportation Science,* Vol. 36, No. 1, PP.94–118.

11 - Cheng, L. and Duran, M. A. (2004). "Logistics for world-wide crude oil transportation using discrete event simulation and optimal control." *Computer & Chemical Engineering,* Vol. 28, PP.897-911.

## واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Integrated Models
2 - Two-Echelons
3 - Functions
4 - Coordination in Organizations
5 - General Coordination Problem
6 - Multi-Plant Coordination Problem
7 - Expedited Transportation
8 - Vendor Managed Inventory (VMI)
9 - Discrete Event Simulation
10 - Stochastic Optimal Control
11 - Markov Decision Process
12 - Economic Order Quantity (EOQ)
13 - Multiple Items