مقايسه نتايج حل ترموالاستيک نيم‌فضا ميان تئوريهاي کلاسيک، L-S و G-L

محمد شرعيات[1*] و عليرضا عسکري[2]

[1] استاديار دانشکده مهندسي مکانيک - دانشگاه صنعتي خواجه‌نصيرالدين طوسي

[2] دانش آموخته کارشناسي ارشد مهندسي مکانيک - دانشگاه صنعتي خواجه‌نصيرالدين طوسي

(تاريخ دريافت ۸۴/۴/۴ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۴/۲۸ ، تاريخ تصويب ۸۶/۷/۷)

چکيده

در مقاله کنوني، روش Transfinite Elements براي حل مسأله ترموالاستيسيته دوبعدي بکار گرفته مي‌شود. نتايج تحليل مسأله نيم‌فضاي دو بعدي براي تئوري کلاسيک کوپل و تئوري ترموالاستيسيته با يک و دو Relaxation Time يا تئوريهاي Lord-Shulman (L-S) و Green-Lindsay (G-L) مقايسه مي‌شوند. معادلات حوزه زمان با تبديل لاپلاس به حوزه فرکانسي منتقل شده و با اعمال روش اجزاء محدود روي آنها مقادير گرهي در حوزه تبديل يافته لاپلاس حاصل مي‌گردند. به کمک تبديل معکوس، نتايج به حوزه زمان منتقل مي‌شوند. در انتها ضمن مقايسه نتايج سه تئوري کلاسيک و هايپربوليک، اين نتايج مورد بحث و بررسي قرار مي‌گيرند. از نتايج بدست‌آمده مشاهده مي شود که تئوري کلاسيک، تنشهاي کششي بزرگتري را براي نقاط قبل از پيشاني موج و تئوريهاي L-S و G-L تنشهاي فشاري بزرگتري را براي نقاط بعد از آن پيش‌بيني مي‌کند. همچنين، در مکان پيشاني موج ترموالاستيک، دماي بزرگتري در نتايج تئوريهاي مدرن نسبت به تئوري کلاسيک مشاهده مي‌گردد.

واژه‌هاي کليدي: ترموالاستيسيته- تنشهاي حرارتي- Relaxation Time -Transfinite Element

مقدمه

تئوري ترموالاستيسيته ترکيبي از تئوريهاي هدايت حرارت و الاستيسيته مي‌باشد. اين تئوري تأثير گرما روي تغيير شکل جسم الاستيک و همچنين تأثير متقابل تغيير شکل روي حالت دمايي جسم را مورد توجه قرار مي‌دهد. تئوري ترموالاستيسيته کلاسيک بر پايه تئوري کلاسيک هدايت حرارت بنا نهاده شده است. بدليل سهمي بودن نوع معادله انتقال حرارت اين تئوري، سرعت انتشار سيگنال حرارتي، نامحدود پيش‌بيني مي شود؛ به عبارت ديگر طبق اين تئوري، اگر جسم هادي تحت اعمال يک تحريک گرمايي ناگهاني قرار گيرد، اثرات اين تحريک بطور آني در فواصل بسيار دور از منبع حرارت احساس خواهد شد. اين پيش‌بيني از ديد فيزيکي غير واقعي انگاشته مي‌شود. در طول نيم‌قرن گذشته تئوريهاي غيرکلاسيک ترموالاستيسيته شکل گرفته‌اند که معادله انتقال حرارت آنها از نوع هذلولي مي‌باشد. اين تئوريها بر خلاف تئوري کلاسيک، سيگنال گرمايي را بصورت موج در نظر مي‌گيرند و سرعت محدود براي آن پيش‌بيني مي‌کنند. خواننده جهت اطلاعات بيشتر در زمينه معرفي تئوريها به مراجع [۱-۴] ارجاع داده مي شود.

بدليل اهميت بررسي مسائل ترموالاستيسيته در علوم و مهندسي پژوهشهاي فراواني متوجه آنها شده است. در زمينه حل مسائل ترموالاستيسيته، مي‌توان به حل مسائل Danilovskaya اشاره کرد. مسائل سه‌گانه Danilovskaya شامل نيم فضايي ترموالاستيک مي باشند، که روي مرز آزاد خود تحت اعمال شوک حرارتي قرار مي‌گيرند [۵-۶]. شوک حرارتي به صورت، به ترتيب افزايش دما با تابع پله واحد، انتقال حرارت از طريق جابجايي و افزايش دما با سرعت ثابت تا مقداري معين اعمال مي‌شود. اين مسائل به صورت يک‌بعدي تحليل مي‌گردند. از جملة حلهاي صورت گرفته روي مسائل يک بعدي Danilovskaya مي‌توان به حل تحليلي Sternberg و Chakravorty [۷]، حل المان مرزي حسيني و اسلامي [۸] و همچنين Chan و Dargush [۹]، حل فضاي حالت Yossef و El-Maghraby [۱۰] و همچنين Ezzat و همکارانش [۱۱] اشاره کرد.

در ارتباط با حل مسائل دوبعدي، حسيني و همکارانش [۱۲] مسأله دوبعدي ترموالاستيسيته کوپل را به کمک روش المان مرزي تحليل کردند. آنها يک لايه که بصورت صلب به يک نيم‌فضا متصل شده را تحت حرارت ناشي از

* نويسنده مسئول : تلفن : ۰۹۱۲۲۷۲۷۱۹۹ ، فاکس : ۸۸۶۷۴۷۴۸ ، Email: m_shariyat@yahoo.com

چند پالس متوالي ليزر بررسي و نتايج مربوط به دو ليزر با زمان پالس متفاوت را مقايسه كردند. Sherief و Megahed [۱۳] مسأله دوبعدي ترموالاستيسيته كوپل را با تئوري ترموالاستيسيته با دو relaxation time تحليل كردند. آنها نيز يک نيم‌فضا که روي سطح آزاد خود منبع حرارتي داشت را در نظر گرفتند. تعدادي از حلهاي صورت گرفته براي مسائل ترموالاستيسيته دوبعدي در مراجع [۲۰-۱۴] يافت مي‌شوند.

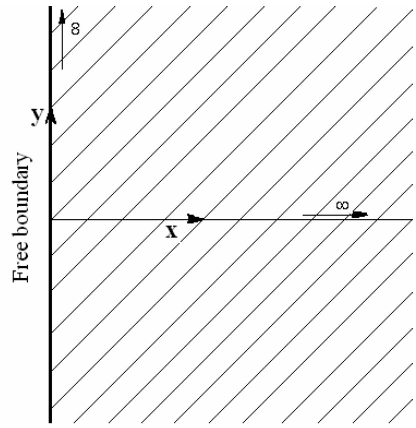
تا قبل از دهه نود قرن گذشته، حلهاي عددي صورت گرفته جهت حصول حل زمان- كوتاه براي مسائل ترموالاستيسيته با تقسيم‌بندي زمان مورد بررسي به المانهاي كوچک (time marching) علاوه بر مش‌بندي فضايي حوزه مسأله صورت مي‌گرفت. بدليل بالا بودن سرعت انتشار گرما در محيط ترموالاستيک، استفاده از اين‌گونه تكنيک‌هاي عددي ديناميكي براي حلهاي زمان- كوتاه در حوزه ترموالاستيسيته كاري دشوار و بسيار زمان- بر مي باشد. Tamma و Railkar [۲۱] در سال ۱۹۸۷ رهيافت تركيبي جديد TransFinite Elements Method (روش اجزاء محدود مبتني بر روشهاي تبديل) كه به اختصار TFEM ناميده مي‌شود را ارائه كردند و آن را براي چند مسأله ترموالاستيسيته بكار بردند [۲۴-۲۲]. با معرفي روش تركيبي جديد، ديگر جايي براي روشهاي عددي ديناميكي در حوزه مسائل ترموالاستيسيته، در ارتباط با حلهاي زمان- كوتاه، وجود ندارد. در مقاله حاضر با نظر به دقت خوب TFEM و همينطور با توجه به اين نكته كه در بسياري از مسائل، يافتن حل پايه براي استفاده در شيوه المان مرزي، دشوار بوده يا امكان پذير نمي‌باشد، از روش TFEM استفاده شده است. در روش Transfinite elements از معادلات ديفرانسيل اصلي در حوزه زمان تبديل لاپلاس گرفته و آنها را به حوزه لاپلاس (فركانسي) منتقل مي‌كنيم. سپس با اعمال روش اجزاء محدود معمولي مقادير گرهي در حوزه لاپلاس بدست مي‌آيند. نهايتاً با تبديل معكوس لاپلاس مقادير گرهي فيزيكي در حوزه زمان حاصل مي‌شوند. حسن اعمال تبديل لاپلاس اين است كه با انتقال معادلات از حوزه زمان، محدوديت استفاده از روش اجزاء محدود مرتفع مي‌گردد. از آنجا كه در روش عادي اجزاء محدود براي مشاهده چگونگي انتشار موج ترموالاستيک، عموماً نياز به انتخاب فواصل زماني بسيار كوتاه (براي مثال، از مرتبه 10^{-13}) پيش از بازتاب و تداخل امواج مي‌باشد، خطاي گرد شدن اعداد بسيار چشمگير است. لذا روش عادي اجزاء محدود براي تحليل مسائل ترموالاستيسيته كوپل پيشنهاد نمي‌گردد. در روش كنوني، اين محدوديت وجود ندارد.

در اين مقاله نتايج حاصل از حل مسأله دو بعدي ترموالاستيسيته به كمک TFEM بين تئوري‌هاي كلاسيک كوپل و تئوري ترموالاستيسيته با يک و دو relaxation time مقايسه خواهد شد.

روابط حاكم بر مسأله

يک جسم جامد الاستيک و همگن آيزوتروپيک را درنظر مي‌گيريم كه فضاي $x \ge 0$ را اشغال مي‌كند. حوزه مسأله مورد بررسي مطابق شكل (۱) تعريف مي‌شود. ضمناً فرض مي‌شود، موقعيت اوليه جسم در حال سكون باشد. سطح آزاد جسم بدون تنش و تحت اثر منبع حرارتي با شدت r(y,t) مي‌باشد.بردار جابجايي به صورت زير تعريف مي‌شود.

$$\mathbf{u} = (u, v, 0) \tag{1}$$



شكل ۱: مدل نيم فضاي مسأله دوبعدي.

معادلات تئوري تعميم‌يافته ترموالاستيسيته با يک relaxation time به فرم برداري و براي ميدان دوبعدي بدين صورت بيان مي‌شوند [۱۰].

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu)\, grad\, e + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \gamma\, grad\, T \tag{2}$$

$$k \nabla^2 T = \rho\, c_E \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) + \gamma\, T_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) \tag{3}$$

روابط ياد شده براي تئوري ترموالاستيسيته با دو relaxation time به صورت زير آشكار مي‌شوند[۱۰]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\, grad\, e + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \gamma\, grad\, (T + \upsilon \frac{\partial T}{\partial t})$$
(٤)

$$k\nabla^2 T = \rho\, c_E \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) + \gamma\, T_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)$$
(۵)

λ و μ ثوابت لامه، ρ دانسيته، t متغير زمان، T دماي مطلق و γ ثابت مادي است كه با رابطه $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ تعريف مي‌شود. α_t ضريب انبساط حرارتي خطي ماده مي‌باشد. k ضريب هدايت حرارتي، T_0 دماي مرجع، c_E گرماي ويژه در حالت كرنش- ثابت و τ و υ دو relaxation time تئوري G-L مي‌باشند.

براي مولفه‌هاي تنش جسم در شرايط حاضر و از تئوري L-S داريم [۱۰]:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)e - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \gamma (T - T_0)$$
(۶)

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)e - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma (T - T_0)$$
(۷)

$$\sigma_{zz} = \lambda\, e - \gamma (T - T_0)$$
(۸)

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$
(۹)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$
(۱۰)

شرط مرزي خاص اين مسأله كه به صورت شوك حرارتي روي مرز آزاد آن اعمال مي‌شود نيز به فرم زير ظاهر مي‌شود.

$$-\frac{\partial T}{\partial x} + hT = r(y,t)$$
(۱۱)

متغيرهاي بي‌بعد مسأله، به گونه زير تعريف مي‌شوند.

$$x' = c_1\, \eta\, x, \quad y' = c_1\, \eta\, y,$$
$$t' = c_1^{\,2}\, \eta\, t, \quad u' = c_1\, \eta\, u,$$
$$v' = c_1\, \eta\, v, \quad \tau' = c_1^{\,2}\, \eta\, \tau,$$
$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$$
(۱۲)

$\eta = (\rho\, c_E / k)$ و $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu/\rho)}$ بوده و c_1 سرعت انتشار موج الاستيک در حالت دما- ثابت مي باشد.

معادلات بدون بعد حركت و انتقال حرارت در حوزه لاپلاس، از روابط (۲)، (۳) و (۱۲)، به صورت زير در مي‌آيند. از نماد پرايم براي سادگي چشم‌پوشي شده است.

$$\beta^2 s^2\, \bar{u} = (\beta^2 - 1)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x\, \partial y} \right) + \nabla^2 \bar{u} - b \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$$
(۱۳)

$$\beta^2 s^2\, \bar{v} = (\beta^2 - 1)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \nabla^2 \bar{v} - b \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$$
(۱۴)

$$(\nabla^2 - s - \tau s^2)\bar{\theta} = g (s + \tau s^2) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)$$
(۱۵)

خط بالاي كميات، بيانگر تبديل لاپلاس آنها مي‌باشد. و همچنين براي شرايط مرزي بدون بعد در حوزه لاپلاس، از روابط (۶) تا (۱۲)، داريم.

$$\bar{\sigma}_{xx} = \beta^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - b\, \bar{\theta}$$
(۱۶)

$$\bar{\sigma}_{yy} = \beta^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - b\, \bar{\theta}$$
(۱۷)

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$
(۱۸)

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + h\bar{\theta} = \bar{r}(y,s)$$
(۱۹)

ثوابت بدين صورت تعريف مي‌شوند.

$$b = \frac{\gamma T_0}{\mu}, \quad \beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad g = \frac{\gamma}{k\eta}$$
(۲۰)

براي مولفه‌هاي تنش جسم در شرايط حاضر و از تئوري G-L داريم [۱۰].

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)e - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \gamma \left(T - T_0 + \upsilon \frac{\partial T}{\partial t} \right)$$
(۲۱)

$$\sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)e - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \left(T - T_0 + \upsilon \frac{\partial T}{\partial t} \right)$$
(۲۲)

$$\sigma_{zz} = \lambda e - \gamma\left(T - T_0 + \upsilon \frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

(٢٣)

$$\sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

(٢۴)

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

(٢۵)

در اين تئوري، متغير بي‌بعد زير نيز به متغيرهاي تعريف شده در رابطه (١٢) افزوده مي‌شوند.

$$\upsilon' = c_1^{\,2}\,\eta\,\upsilon$$

(٢۶)

در اين حالت، معادلات بدون بعد حركت و انتقال حرارت در حوزه لاپلاس، از روابط (۴)، (۵) و (١٢)، به صورت زير درمي‌آيند.

$$\beta^2 s^2 \bar{u} = \left(\beta^2 - 1\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y}\right) + \nabla^2 \bar{u} - b\left(1 + \upsilon s\right)\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$$

(٢٧)

$$\beta^2 s^2 \bar{v} = \left(\beta^2 - 1\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\right) + \nabla^2 \bar{v} - b\left(1 + \upsilon s\right)\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$$

(٢٨)

$$\left(\nabla^2 - s - \tau s^2\right)\bar{\theta} = g\, s\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)$$

(٢٩)

و همچنين براي شرايط مرزي بدون بعد در حوزه لاپلاس داريم.

$$\bar{\sigma}_{xx} = \beta^2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - b\left(1 + \upsilon s\right)\bar{\theta}$$

(٣٠)

$$\bar{\sigma}_{yy} = \beta^2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - b\left(1 + \upsilon s\right)\bar{\theta}$$

(٣١)

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$

(٣٢)

$$-\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + h\bar{\theta} = \bar{r}\left(y, s\right)$$

(٣٣)

با مساوي صفر قرار دادن دو ترم relaxation time، يعني υ و τ، تئوري كلاسيک حاصل مي‌شوند.

روابط حاكم بر مدل اجزاء محدود

در ارتباط با تئوري G-L، با بكارگيري روش گلركين در حوزه لاپلاس ، فرم رابطه اجزاء محدود حاصله براي هر المان چنين است:

$$\Bigg[\int_{Boundary}\left(\mathbf{N}^T \mathbf{a}\,\mathbf{N}_{,x}\right) n_x\, d\,l - \int_{x_i}^{x_j}\int_{y_i}^{y_j}\left(\mathbf{N}^T \mathbf{a}\right)_{,x}\mathbf{N}_{,x}\, dy\, dx$$
$$+ \int_{Boundary}\left(\mathbf{N}^T \mathbf{b}\,\mathbf{N}_{,y}\right) n_y\, d\,l - \int_{x_i}^{x_j}\int_{y_i}^{y_j}\left(\mathbf{N}^T \mathbf{b}\right)_{,y}\mathbf{N}_{,y}\, dy\, dx$$
$$+ \int_{Bondary}\left(\mathbf{N}^T \mathbf{c}\,\mathbf{N}_{,x}\right) n_y\, d\,l - \int_{x_i}^{x_j}\int_{y_i}^{y_j}\left(\mathbf{N}^T \mathbf{c}\right)_{,y}\mathbf{N}_{,x}\, dy\, dx$$
$$+ \int_{x_i}^{x_j}\int_{y_i}^{y_j}\mathbf{N}^T\left\{\mathbf{d}\,\mathbf{N}_{,x} + \mathbf{e}\,\mathbf{N}_{,y} + \mathbf{f}\,\mathbf{N}\right\} dy\, dx\Bigg]\mathbf{U}^{(\mathbf{e})}$$
$$= \{\mathbf{0}\}$$

(٣٤)

كه در آن، $\mathbf{N}$ بردار توابع شكل بوده و:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & \beta^2 - 1 & 0 \\ \beta^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b\left(1 + \upsilon s\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ -g\, s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b\left(1 + \upsilon s\right) \\ 0 & -g\, s & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\beta^2 s^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 s^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(s + \tau s^2\right) \end{bmatrix}$$

(٣۵)

بردار مقادير نقاط گره به گونه زير تعريف مي‌گردد:

$$\mathbf{U}^{(\mathbf{e})^T} = < \ldots, U_i, V_i, \Theta_i, \ldots >$$

(٣٦)

روابط اجزاء محدود تئوري L-S با جايگذاري $\upsilon = 0$ و جايگزيني عبارت gs با $g(s+\tau.s^2)$ و روابط اجزاء محدود تئوري كلاسيک با مساوي صفر قرار دادن دو ترم υ و τ، حاصل مي‌شوند.

تحليل مسأله

مسأله مورد بررسي، عبارتست از يک نيم‌فضا که به جهت شرايط مرزي خاص به عنوان يک مسأله دوبعدي درنظر گرفته مي‌شود. با توجه روش عددي انتخاب شده براي حل، ناگزير از محدود کردن حوزه حل به يک ورق با ابعاد معين مي‌باشيم. طبيعتاً فواصلي را به عنوان مرز در نظر مي‌گيريم که مطمئن از نرسيدن اثر ترموالاستيک به آن منطقه باشيم. شرايط مرزي روي سطح آزاد نيم‌فضا (با توجه به شکل ۱) بدين صورت ارائه مي‌شوند.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 0 & at\ x = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 & at\ x = 0 \\ -\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + h\theta = r(y,t) & at\ x = 0 \end{cases}$$

(۳۷)

به دليل اينکه در مسأله حاضر شرايط مرزي به صورت متقارن دو طرف محور y اعمال مي‌شوند، آنرا متقارن در نظر گرفته و فقط نيمه بالايي را مش‌بندي مي‌کنيم. بنابراين براي مسأله حاضر يک ورق با ابعاد معين و با شرايط مرزي زير روي سه لبه ديگر درنظر مي‌گيريم. روي مرز پايين به صورت

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0 & at\quad y = 0 \\ v = 0 & at\quad y = 0 \\ \sigma_{xy} = 0 \xrightarrow{\frac{\partial v}{\partial x}=0} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & at\quad y = 0 \end{cases}$$

(۳۸)

و روي دو مرز بالا و سمت راست عبارتند از

$$u = v = \theta = 0$$

(۳۹)

شوک حرارتي $r(y,t)$ به صورت پله واحد روي مرز آزاد از $y = 0$ تا a اعمال مي‌شود.

براي حل معادلات اجزاء محدود، از المان چهارگوش چهار گره‌اي استفاده گرديد. المان انتخاب شده داراي ابعادي به اندازه کافي کوچک مي‌باشد، تا از پيوستگي متغيرهاي گرهي و مشتق مرتبه اول آنها روي مرز المانها اطمينان حاصل شود.

از آنجا که رابطه (۳۴)، برحسب پارامتر s بيان شده است، پس از ترکيب ماتريسهاي الماني و تشکيل ماتريسهاي کل سازه، مقادير نقاط گرهي به صورت تابعي از پارامتر s بدست مي‌آيند. براي اين منظور، لازم است که حل دستگاه معادلات حاکم بر کل جسم، به صورت پارامتريک صورت پذيرد. حل ياد شده در نرم افزار Matlab انجام شده است. پس از يافتن وابستگي مقادير نقاط گره به پارامتر s ، تغييرات زماني کميت ياد شده بر حسب زمان، با استفاده از تبديل لاپلاس معکوس توسط نرم افزار Matlab ، بدست آمده‌اند.

نتايج

براي استخراج نتايج، از ويژگيهاي مادي و هندسي زير استفاده شده است:

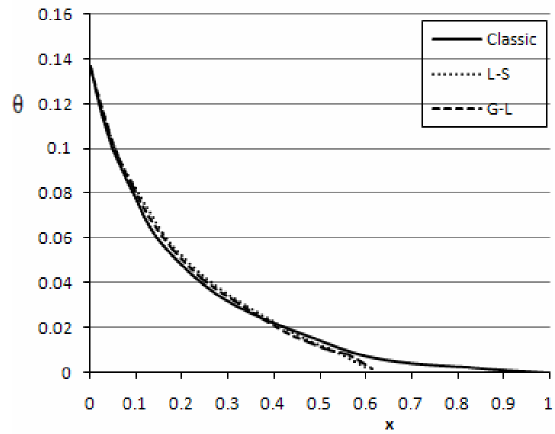
$b = 0.0167, \quad \beta = 1.703, \quad g = 3.013$

$\tau = \upsilon = 0.02, \quad a = 0.1, \quad h = 1$

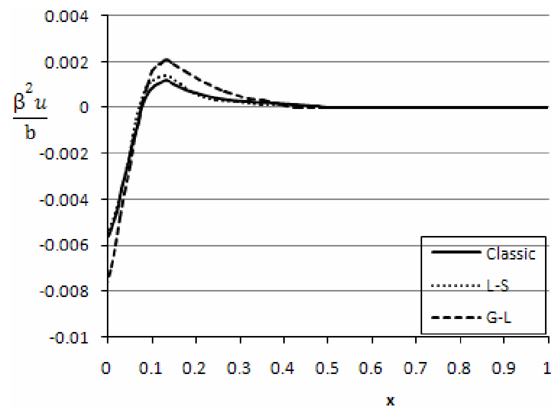
شکلهاي (۲) تا (۴) به ترتيب، نمودارهاي توزيع دما، جابجايي و تنش جهت مقايسه ميان تئوريهاي کلاسيک کوپل و تئوريهاي غيرکلاسيک L-S و G-L مي‌باشند. همانگونه که مشاهده مي‌شود، پاسخهاي تئوريهاي L-S و G-L به يکديگر نزديک مي‌باشند. مورد مهمي که در نمودار ۲ مي‌توان مدنظر قرار داد، حوزه محدودتر تأثير تئوريهاي غيرکلاسيک L-S و G-L نسبت به تئوري کلاسيک مي‌باشد. البته به دليل سرعت بينهايت سيگنال حرارتي تئوري کلاسيک، نمي‌توان براي پاسخ آن حوزه تاثير قائل شد ولي اگر از مقادير ناچيز پاسخ در نواحي دورتر چشم‌پوشي شود، آنگاه مي توان گفت که بدليل تأخير و يا به تعبيري اينرسي بالاي تئوريهاي L-S و G-L ناشي از وجود relaxation time ، حوزه پاسخ محدودتري در زمان مورد بررسي براي آنها مشاهده مي‌شود.

بدليل وجود ضريب تأخير relaxation time، پاسخ سيستم در تئوريهاي L-S و G-L لخت‌تر و با اينرسي بيشتري ظاهر مي‌گردد. به همين دليل، در اين تئوريها، نقاط دورتر از پيشاني موج جابجايي کمتري نسبت به تئوري کلاسيک دارند. اين پديده عامل توجيه تنش کششي کوچکتر پيش‌بيني شده توسط آنها نسبت به تئوري کلاسيک در نقاط قبل از پيشاني موج (نقاط با فاصله

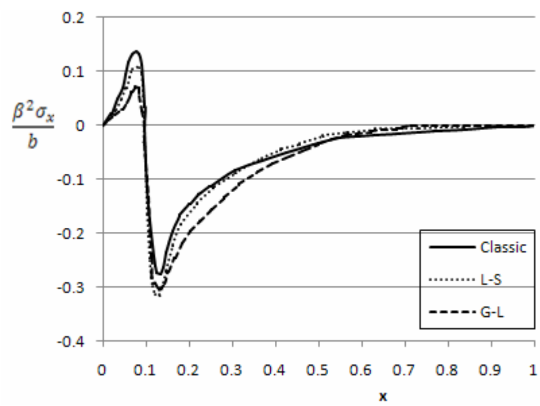
$x < 0.1$) مي‌باشد. به همين ترتيب، اينرسي بالاي نقاط كم‌تحرك در محدوده $x > 0.1$ و جابجايي سنگين‌تر آنها منجر به القاء تنش فشاري بزرگتر براي اين نقاط مي‌شود. انقباض شديدتر اين نقاط در تئوريهاي مدرن مورد نظر، گرماي بيشتري توليد كرده و همانگونه كه مشاهده مي‌شود، دماي پيش‌بيني شده توسط اين تئوريها در پيشاني موج بزرگتر از دماي پيش‌بيني شده توسط تئوري كلاسيک است.



شكل ۲ : مقايسه توزيع دما روي محور x در t = 0.1.



شكل ۳ : مقايسه توزيع جابجايي روي محور x در t = 0.1.



شكل ۴ : مقايسه توزيع تنش روي محور x در t = 0.1.

شكل (۳)، توزيع جابجايي نقاط گرهي را روي محور x نشان مي‌دهد. بزرگترين پاسخ مربوط به تئوري G-L بوده و كوچكترين پاسخ مربوط به تئوري كلاسيک مي‌باشد. ضمناً پاسخ جابجايي تئوريهاي كلاسيک و L-S به يكديگر نزديكترند تا پاسخ G-L. بجز در نقاط مجاور پيشاني موج ترموالاستيک كه در آنها شاهد پيک بزرگتري براي تئوريهاي غير كلاسيک مي‌باشيم، در ساير نقاط گرهي نتايج هر سه تئوري تقريباً منطبق مي‌باشند.

شكل (۴)، نتايج تحليل تنش سه تئوري را براي مثال كنوني نشان مي‌دهد. همانطور كه مشاهده مي شود، تئوري كلاسيک، تنشهاي كششي بزرگتري را براي نقاط قبل از پيشاني موج و تئوري L-S تنشهاي فشاري بزرگتري را براي نقاط بعد از آن پيش‌بيني مي‌كند. در فواصل دورتر، نتايج تئوري L-S نسبتاً زودتر به مقدار صفر نزديک مي‌شوند.

در مراجع [۱] و [۲] سرعت انتشار امواج الاستيک و گرما براي جنس خاصي از محيط پيوسته ارائه شده است. بر پايه نتايج مراجع مذكور، سرعت امواج الاستيک تئوريهاي هايپربوليک با دقت بسيار بالايي (با خطاي ۰/۱ درصد براي ماده مورد نظر) با سرعت موج الاستيک پيش‌بيني شده توسط تئوري كلاسيک برابر مي‌باشند. همچنين، براي تئوري L-S با relaxation time در نظر گرفته شده براي ماده مورد نظر، سرعت انتشار موج گرما حدود ۴ برابر سرعت موج الاستيک مي‌باشد [۱ و۲]. نتايج حاضر (شكلهاي ۲ تا ۴)، انطباق پيشاني موج ترموالاستيک براي تئوريهاي گوناگون را به وضوح نشان مي‌دهند ولي به دليل ناچيز بودن مقادير نمودارها در فواصل دور از پيشاني موج، مكان پيشاني موج گرما در تئوريهاي غير كلاسيک با دقت مناسبي قابل تشخيص نيست.

در هردو تئوري مدرن، مقدار پيک قبل از رسيدن موج الاستيک كمتر و پس از آن، بيشتر از تئوري كلاسيک مي‌باشد. تنش فشاري بزرگتر آنها پس از پيشاني موج الاستيک، بيانگر انقباض ماده در آن ناحيه در زمان بررسي است و از آنجا كه انقباض گرمازا است، طبيعتاً بايد شاهد دماي بزرگتري در نتايج تئوريهاي مدرن نسبت به تئوري كلاسيک در مكان پيشاني موج $x = 0.1$ باشيم. توزيع دماي نشان داده شده در شكل (۲) نيز اين پديده را تاييد مي‌نمايد.

بطور كلي، تئوريهاي L-S و G-L بجز در موارد جزئي، پاسخهاي شديدتري را در مقايسه با تئوري كلاسيک به نمايش مي‌گذارند و تنها عامل توجيه كننده اين تفاوت relaxation time موجود در تئوريهاي ياد شده مي‌باشد.

نتيجه‌گيري

فرمولبندي روش Transfinite Element بر اساس تبديل لاپلاس و تکنيک گلرکين براي مسأله دوبعدي ترموالاستيسيته ارائه شد و نتايج تئوري كلاسيک با نتايج تئوريهاي L-S و G-L مقايسه گرديد. در مقاله كنوني با نظر به دقت خوب TFEM و همينطور با توجه به اين نكته كه در بسياري از مسائل، يافتن حل پايه براي استفاده در شيوه المان مرزي، دشوار بوده يا امكان پذير نمي‌باشد، از روش TFEM استفاده شده است. حسن اعمال تبديل لاپلاس اين است كه با انتقال معادلات از حوزه زمان، محدوديت استفاده از روش اجزاء محدود عادي مرتفع مي‌گردد. از آنجا كه در روش عادي اجزاء محدود براي مشاهده چگونگی انتشار موج ترموالاستيک، عموماً نياز به انتخاب فواصل زماني بسيار كوتاه (براي مثال، از مرتبه 10^{-13}) پيش از بازتاب و تداخل امواج مي‌باشد، خطاي گرد شدن اعداد بسيار چشمگير است. لذا روش عادي اجزاء محدود براي تحليل مسائل ترموالاستيسيته كوپل پيشنهاد نمي‌گردد. در روش كنوني، اين محدوديت وجود ندارد.

به دليل لختي تئوريهاي L-S و G-L كه ناشي از وجود relaxation time مي‌باشد، ذرات مادي با اينرسي بيشتري جابجا مي‌شوند و تنشهاي فشاري بزرگتريي را به نمايش مي‌گذارند. از نتايج بدست‌آمده مشاهده مي شود كه تئوري كلاسيک، تنشهاي كششي بزرگتري را براي نقاط قبل از پيشاني موج و تئوريهاي L-S و G-L تنشهاي فشاري بزرگتري را براي نقاط بعد از آن پيش‌بيني مي‌كند. همچنين، در مكان پيشاني موج ترموالاستيک، دماي بزرگتري در نتايج تئوريهاي مدرن نسبت به تئوري كلاسيک مشاهده مي‌گردد.

مراجع

1 - Chandrasekharaiah, D. S. (1986). "Thermoelasticity with second sound: A review." *Appl. Mech. Rev.,* Vol.39, PP. 354-376.

2 - Chandrasekharaiah, D. S. (1998). "Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature." *Appl. Mech. Rev.,* Vol. 51, PP. 705-729.

3 - Hetnarski, R. B. and Ignaczak, J. (2000). "Nonclassical dynamical thermoelasticity." *Int. J. Solids and Structures,* Vol.37, PP. 215-224.

4 - Ignaczak, J. (1987). "Linear dynamic thermoelasticity-A survey: 1981-1984." *The Shock and Vibration Digest,* Vol. 19, No. 6, PP. 11-17.

5 - Danilovskaya, V. I. (1950). "Thermal stresses in an elastic half-space due to a sudden heating of its boundary (in Russian)." *Prikladnaya Matematika i Mekhanika,* Vol. 14, PP. 316-318.

6 - Danilovskaya, V. I. (1952). "On a dynamical problem of thermoelasticity (in Russian)." *Prikl. Mat. Mekh.,* Vol. 16, PP. 341-344.

7 - Sternberg, E. and Chakravorty, J. G. (1959). "On inertia effects in a transient thermoelastic problem." *ASME J. Appl. Mech.,* Vol. 26, PP. 503-509.

8 - Hosseini-Tehrani, P. and Eslami, M. R. (2000). "BEM analysis of thermal and mechanical shock in a two-dimentional finite domain considering coupled thermoelasticity." *Eng. Ana. Bound. Elem.,* Vol. 24, PP. 249-257.

9 - Chen, J. and Dargush, G. F. (1995). "Boundary element method for dynamic poroelastic and thermoelastic analysis." *Int. J. Solids and Structures,* Vol. 32, No.15, PP. 2257-2278.

10 - Yossef, H. M. and El-Maghraby, N. M. (2004). "State space approach to generalized thermoelstic problem with thermomechanical shock." *Appl. Math. Comp.,* Vol. 156, No.2, PP. 577-586.

11 - Ezzat, M. A. and El-Karamany, A. S. and Samaan, A. A. (2004). "The dependence of the modulus of elasticity on reference temperature in generalized thermoelasticity with thermal relaxation." *Appl. Math. Comp.,* Vol.147, PP. 169-189.

12 - Tehrani, P. H. and Hector, Jr., L. G., Hetnarski, R. B. and Eslami, M. R. (2001). "Boundary element formulation for thermal stresses during pulsed laser heating." *ASME J. Appl. Mech.,* Vol. 68, PP. 480-489.

13 - Sherief, H. H. and Megahed, F. A. (1999). "A two-dimentional thermoelasticity problem for a half space subjected to heat sources." *Int. J. Solids and Structures,* Vol. 36, PP. 1369-1382.

14 - Hector, L. G. and Kim, W. S. (1992). "Propagation and reflection of thermal waves in a finite medium due to axisymmetric surface sources." *Int. J. Heat Mass Transfer,* Vol. 4, PP. 897-912.

15 - Sherief, H. and Hamza, F. (1994). "Generalized thermoelastic problem of a thick plate under axisymmetric temperature distribution." *J. Thermal Stresses,* Vol. 17, PP. 435-452.

16 - Sherief, H. and Anwar, M. N. (1994). "State space approach to two-dimentional generalized thermoelasticity problems." *J. thermal stresses,* Vol. 17, PP. 567-590.

17 - Hosseini-Tehrani, P. and Eslami, M. R. (2000). "BEM Analysis Of Thermal And Mechanical Shock In A Two-Dimentional Finite Domain Considering Coupled Thermoelasticity." *Engineering Analysis With Boundary Elements,* No. 24, PP. 249-257.

18 - Hosseini-Tehrani, P., Hector Jr., L. G., Hetnarski, R. B. and Eslami, M. R. (2001). "Boundary Element Formulation For Thermal Stresses During Pulsed Laser Heating." *ASME J. Appl. Mech.,* Vol. 68, PP. 480-489.

19 - Hosseini-Tehrani, P. and Eslami, M. R. (1998). "Two-dimentional time harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by BEM formulation." *Eng. Ana. Boundary Eelem.,* Vol. 22, PP. 245-250.

20 - Larsson, F., Hansbo, P. and Runesson, K. (2003). "Space-Time Finite Elements And An coupled thermoelasticity Problem." *Int. J. Numer. Meth., Engng.*, Vol. 56, PP. 261-293.

21 - Tamma, K. K. and Railkar, S. B. (1987). "Transfinite element methodology towards a unified thermal/structural analysis." *Computers and Structures*, Vol.25, PP. 649-660.

22 - Tamma, K. K. and Railkar, S. B. (1987). "A generalized hybrid transfinite element computational approach for nonlinear/linear unified thermal-structural analysis." *Computers and Structures,* Vol.26, No.4, PP. 655-665.

23 - Tamma, K. K. and Railkar, S. B. (1990). "Evaluation of thermally induced non-fourier stress wave disturbances via tailored hybrid transfinite element formulations." *Computers and Structures*, Vol.34, No.1, PP. 5-16.

24 - Tamma, K. K. and Railkar, S. B. (1988). "On heat displacement based hybrid transfinite element formulations for uncoupled/coupled thermally induced stress wave propagation." *Computers and Structures,* Vol.30, No.5, PP. 1025-1036.

25 - Chandrasekharaiah, D. S. (1996). "One-dimentional wave propagation in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation." *J. Thermal Stresses,* Vol. 19, PP. 695-710.