

# حل معادلات ناویر-استوکس دو بعدی به روش المانهای مرزی بدون نیاز به گسسته‌سازی میدان محاسباتی

وحید اصفهانیان

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مرتضی بهبهانی‌نژاد

دانشجوی دکترای گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

محقق صنایع شهید باقری

فرشاد کوثری

استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۶/۱۲/۱۷، تاریخ تصویب ۷۸/۳/۸)

## چکیده

روش المانهای مرزی اخیراً بعنوان یکی از ابزارهای بسیار مفید در تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی شناخته شده است. عدم نیاز به گسسته‌سازی میدان محاسباتی و حل مسئله با استفاده از اطلاعات روی مرز مهمترین ویژگی و نقطه قوت این روش به شمار می‌آید. با مطرح شدن روش تقابل دوگانه استفاده از این روش برای حل مسائل غیرخطی و همچنین مسائل خطی که درگیر عبارات انتگرالی بر روی میدان ناشی از عبارت چشمه می‌باشند اهمیت بیشتری یافته است. در این مقاله چگونگی اعمال این روش برای حل معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر مورد بحث قرار گرفته است و نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که این روش از دقت بسیار مطلوبی برخوردار می‌باشد.

**واژه های کلیدی:** روش المانهای مرزی، ناویر-استوکس، روش تقابل دوگانه، جریان تراکم‌ناپذیر، جواب اساسی،

معادلات انتگرالی

## مقدمه

المانهای محدود تحلیل کند. عدم نیاز به تولید شبکه درون میدان محاسباتی، حل مسئله فقط بر روی نقاط مرزی و در واقع حل مسئله با یک بعد کمتر و لذا نیاز به حافظه کامپیوتری کمتر، از مزایای عمده این روش به شمار می‌آیند. با توجه به اینکه در این روش فقط گسسته‌سازی بر روی مرز انجام می‌گیرد، میتوان براحتی از کدهای مدلسازی سطح موجود نظیر ایریز و پاترن برای پیش‌پردازش استفاده نمود. مشکلات تولید شبکه محاسباتی بویژه اگر نیاز باشد جهت دستیابی به طرح بهینه، مرزهای دامنه محاسباتی چندین مرحله تغییر نماید، بیش از پیش نمایان خواهد شد. از دیگر مزایای استفاده از

یکی از جدیدترین روشهای حل عددی برای اغلب مسائل مهندسی روش المانهای مرزی است. این روش حدوداً از سال ۱۹۷۰ بعنوان یک ابزار کاربردی قوی شروع و طی سالهای متمادی توسعه یافت. در ابتدا استفاده از این روش فقط به حل معادلات حاکم خطی محدود گشته بود. تقریباً از سال ۱۹۸۰ به بعد استفاده از این روش برای حل معادلات غیرخطی جریانهای سیال در مقالات ارائه شد. تاکنون این روش توانسته است بسیاری از مسائل غیرخطی را تحت شرایط خاصی حل نماید و انتظار می‌رود در آینده نه چندان دور قادر باشد بسیاری از مسائل غیرخطی را با سهولت بیشتری نسبت به روشهای اختلاف محدود و

این روش آن است که پس از بدست آوردن جواب بر روی مرزها، میتوان جواب را در هر نقطه مورد نظر درون دامنه و نه فقط در نقاط خاص شبکه، با دقت بالائی بدست آورد.

در روش المانهای مرزی در ابتدا معادله انتگرالی معادل با معادله حاکم بدست آمده، که این معادله دارای چند عبارت انتگرالی است. در صورتیکه معادله حاکم معادله‌ای باشد که جواب اساسی برای آن وجود داشته باشد، عبارات انتگرالی بدست آمده همگی انتگرالهای مرزی خواهند بود. در غیراینصورت باید معادله حاکم را به دو قسمت تقسیم کرد، بگونه‌ای که یک قسمت دارای عملگری باشد که جواب اساسی برای آن در دسترس است و قسمت دیگر بعنوان یک عبارت چشمه در نظر گرفته می‌شود. این امر منجر به یک عبارت انتگرالی بر روی دامنه محاسباتی شده که بزرگترین مشکل موجود در روش المانهای مرزی، محاسبه این انتگرال می‌باشد. برای حل این مشکل روشهای گوناگونی وجود دارد که برای عبارات چشمه عمومی و کلی روش تقابل دو گانه، DRM، توسط بسیاری از محققین ترجیح داده می‌شود. در مقاله حاضر از این روش برای حل این مشکل استفاده شده است. با استفاده از این روش نیازی به شبکه بندی درون ناحیه محاسباتی نبوده و فقط لازم است از تعدادی نقاط داخلی که براحتی میتوان مختصات آنها را مشخص نمود، استفاده شود.

در این مقاله حل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر دائم درون یک حفره به روش المانهای مرزی و تقابل دوگانه مورد بحث قرار گرفته است. معادلات ناویر-استوکس برای اولین مرتبه توسط بوش و تانر [۱] به روش المانهای مرزی مورد بررسی قرار گرفت. این محققین با استفاده از جواب اساسی معادلات استوکس و در نظر گرفتن عبارتهای غیرخطی جابجائی بعنوان عبارتهای چشمه، فرمولاسیون انتگرالی مرزی معادلات را بدست آورده که علاوه بر انتگرالهای مرزی با یک انتگرال بر روی دامنه نیز مواجه بودند که به ناچار برای حل آن به گسسته‌کردن دامنه متوسل شدند. پس از آن یک فرمولاسیون مشابهی توسط توساکا و انیشی [۲] ارائه شد که توسط آن انتگرال ناشی از عبارات غیرخطی ابتدا با یک بار انتگرالگیری جزء به جزء به دو انتگرال تبدیل گشت که یکی از این انتگرالها انتگرال مرزی و دیگری یک انتگرال بر روی دامنه بود که شامل سرعتها و مشتق جواب اساسی بود. با اینکه برای حل این

انتگرال نیز مجددا روش گسسته‌سازی دامنه مورد استفاده قرار گرفت ولی با این حال از آنجائیکه این انتگرال فاقد عبارات مشتق سرعتها بود، نسبت به روش بوش و تانر از ارجحیت و کارائی بیشتری برخوردار بود. دارگوش و بانرجی [۳] نیز با استفاده از جواب اساسی استوکس معادلات ناویر-استوکس را همراه با معادله انرژی برای جریان دائم، تراکم‌ناپذیر و ترموویسکوز به روش المانهای مرزی مورد تحلیل قرار دادند که آنها نیز برای محاسبه انتگرال روی دامنه از گسسته‌سازی میدان استفاده نمودند.

روشهای تابع جریمه که در فرمولاسیونهای اختلاف محدود و المانهای محدود متداول می‌باشد، در حل معادلات ناویر-استوکس به روش المانهای مرزی نیز توسط کروکی و همکاران [۴] و همچنین توسط کیتاگاو و همکاران [۵] مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش تابع جریمه برای ارتباط دادن فشار به دیورژانس میدان سرعت مورد استفاده قرار می‌گیرد که بدین ترتیب معادلات ناویر-استوکس به معادلات الاستیسیته ناویر با یک عبارت نیروی جسمی ناشی از عبارات غیرخطی جابجائی تبدیل می‌گردند.

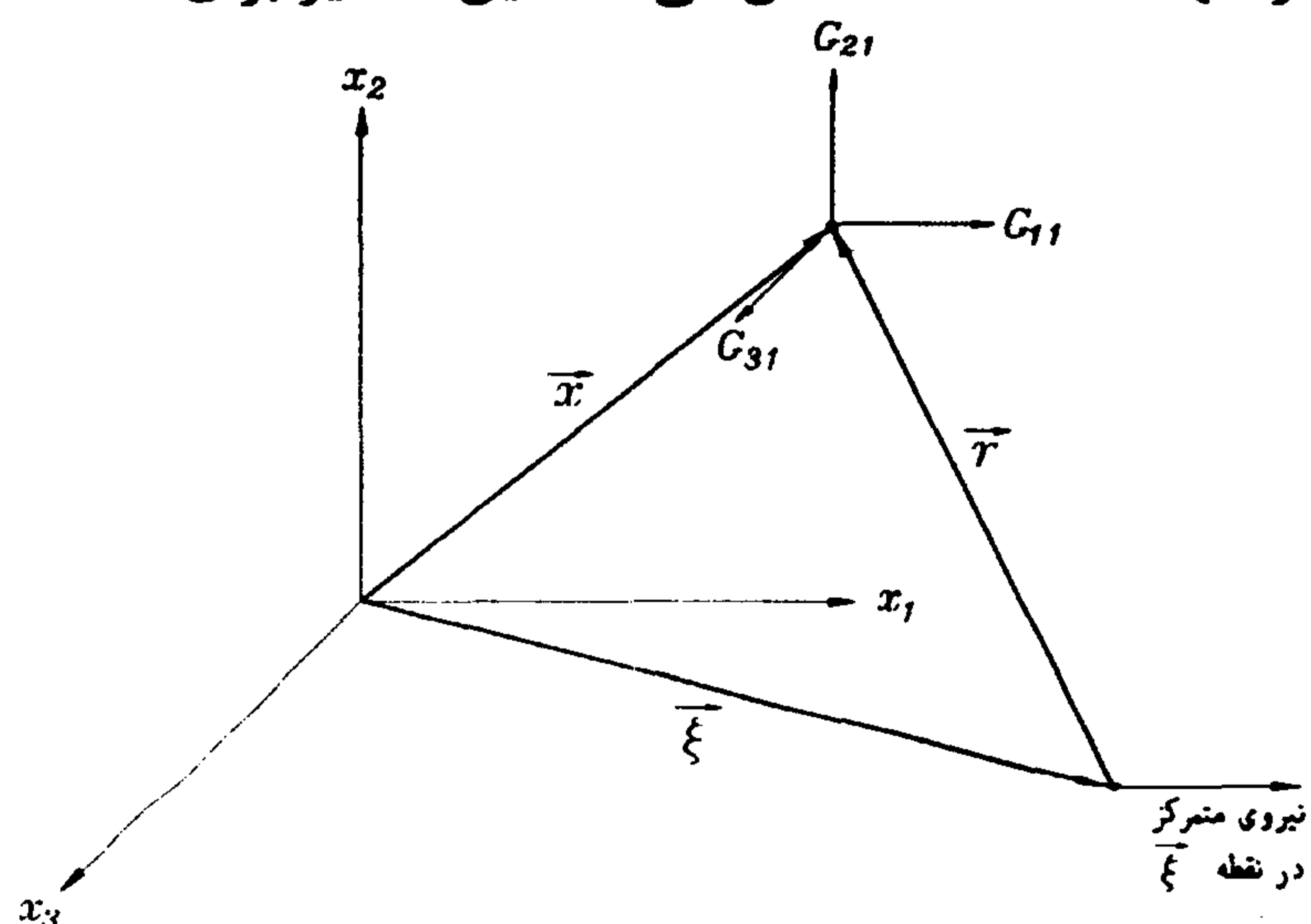
علاوه بر حل مستقیم معادلات ناویر-استوکس دائم، شکل غیردائم این معادلات برای دستیابی به جواب دائم نیز مورد استفاده بسیاری از محققین قرار گرفت. توساکا و انیشی [۶] با استفاده از گسسته‌سازی زمانی این معادلات را به یک معادله غیرخطی جابجائی و معادلات خطی استوکس تبدیل نمودند. کاکودا و توساکا [۷] از دو روش مختلف شکافت زمانی استفاده نمودند که این دو روش منجر به یک معادله جابجائی-پخش و یک معادله اویلر خطی گردید. مرور و مقایسه سه روش ذکر شده در بالا نیز توسط توساکا و کاکودا [۸] انجام شده است. همچنین توسط دارگوش و بانرجی [۹] حل این معادلات با استفاده از جواب اساسی معادلات استوکس غیردائم انجام شده است که این روش به یک فرمولاسیون انتگرالی مرزی و یک عبارت انتگرالی بر روی زمان و دامنه منجر گردیده است.

در کلیه روشهایی که در بالا به آنها اشاره شده است، همواره یک عبارت انتگرالی بر روی دامنه که ناشی از عبارات جابجائی غیرخطی است، وجود دارد که برای محاسبه آن نیاز به گسسته‌سازی دامنه محاسباتی است. هنگامی که بحث گسسته‌سازی میدان محاسباتی مطرح

دیفرانسیل پاره‌ای بالا برای نقطه  $x \in \Omega$  عبارت است از [۱۲]

$$u_k(x) = \int_{\Gamma} K_{kj}(x, y) u_j(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} G_{ik}(x, y) t_i(y) d\Gamma_y + \int_{\Omega} G_{ik}(x, y) g_i(y) d\Omega_y \quad (۶)$$

که در آن  $t_i(y) = \sigma_{ij}(u_j(y), p(y)) n_j(y)$  بردار نیروی کشش،  $\sigma_{ij}(u_i, p) = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$  تانسور تنش ناشی از میدان جریان  $(u_i(y), p)$  و بردار نرمال یکه برونسو بر مرز  $\Gamma$  در نقطه  $y$  می‌باشد.  $G_{ik}(x, y)$  که استوکسیت نامیده می‌شود جواب تکین اساسی معادلات استوکس بوده که در موقعیت  $y$  و در جهت  $k$  قرار دارد.  $K_{kj}$  نیز بردار کشش ناشی از این استوکسیت بوده که به آن استرسلت گفته می‌شود. شکل (۱) چگونگی ایجاد استوکسیت را توسط بار متمرکز در جهات مختلف نشان می‌دهد. این مقادیر برای حالت



شکل ۱: تأثیر بار متمرکز در نقطه  $\xi$  بر روی نقطه  $\bar{x}$ .

دوبعدی عبارتند از

$$G_{ik}(x, y) = -\frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{r_i r_k}{r^2} - \delta_{ik} \ln r \right)$$

$$K_{kj}(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^4} n_k(y)$$

$$r = |x - y|, \quad r_i = x_i - y_i$$

(۷)

می‌گردد، از محبوبیت و جذابیت روش المانهای مرزی کاسته می‌شود، چرا که در واقع گسسته‌سازی میدان نیز اضافه شده و دیگر برای حل مسئله فقط گسسته‌سازی مرزها مورد نظر نمی‌باشد. در این مقاله حل معادلات ناویر-استوکس دوبعدی در یک حفره با استفاده از تکنیک تقابل دوگانه در روش المانهای مرزی مورد بحث قرار گرفته‌است که توسط این روش عبارات انتگرالی موجود بر روی دامنه محاسباتی با استفاده از یک سری جوابهای اختصاصی به انتگرالهای مرزی تبدیل می‌گردند [۱۱، ۱۰]. بدین ترتیب با استفاده از این روش می‌توان این معادلات غیرخطی را بدون نیاز به گسسته‌سازی میدان و فقط با گسسته‌سازی مرزهای محاسباتی تحلیل نمود.

## معادلات حاکم

باتوجه به اینکه سیال تراکم ناپذیر فرض شده‌است بقای جرم توسط معادله پیوستگی بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (۱)$$

معادله بقای ممنتوم نیز با توجه به ثابت بودن دانسیته و ویسکوزیته سیال و همچنین عدم وجود نیروهای حجمی عبارت خواهد بود از

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad (۲)$$

با توجه به این معادلات، فرمولاسیون سرعت-فشار معادلات ناویر-استوکس در حالت دائم به شکل اندیسی زیر نوشته می‌شود:

$$u_{i,j} = 0 \quad (۳)$$

$$\rho u_j u_{i,j} = -p_{,i} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} \quad (۴)$$

حال اگر ترمهای جابجائی را با  $g_i$  نمایش دهیم خواهیم داشت

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} - p_{,i} = g_i \quad (۵)$$

در واقع عبارتهای غیرخطی توسط  $g_i$  از عبارتهای خطی جدا شده‌اند. معادله انتگرالی متناظر با سیستم معادلات

$$\frac{\partial \hat{u}_{il}}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

حال اگر قضیه گرین در مورد این مسئله اعمال شود، بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \hat{u}_{il}(x, z^m) = & \int_{\Gamma} K_{kj}(x, y) \hat{u}_{jl}(y, z^m) d\Gamma_y \\ & - \int_{\Gamma} G_{ik}(x, y) \hat{t}_{il}(y, z^m) d\Gamma_y \\ & + \int_{\Omega} G_{ik}(x, y) f(y, z^m) \delta_{il} d\Omega_y \end{aligned} \quad (13)$$

و یا

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G_{ik}(x, y) f(y, z^m) \delta_{il} d\Omega_y = & \hat{u}_{il}(x, z^m) \\ & - \int_{\Gamma} K_{kj}(x, y) \hat{u}_{jl}(y, z^m) d\Gamma_y \\ & + \int_{\Gamma} G_{ik}(x, y) \hat{t}_{il}(y, z^m) d\Gamma_y \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن بردار نیروی کشش برای معادله استوکس غیر همگن بالا بوده و عبارت است از

$$\hat{t}_{il}(y, z) = \sigma_{ij}(\hat{u}_{il}(y, z), \hat{p}_l(y, z)) n_j(y) \quad (15)$$

سرانجام با جایگذاری (۱۳) در (۹) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G_{ik}(x, y) f(y, z^m) \delta_{il} d\Omega_y = & \sum_{m=1}^p \alpha_i^m \{ \hat{u}_{kl}(x, z^m) \\ & - \int_{\Gamma} K_{kj}(x, y) \hat{u}_{jl}(y, z^m) d\Gamma_y \\ & + \int_{\Gamma} G_{ik}(x, y) \hat{t}_{il}(y, z^m) d\Gamma_y \} \end{aligned} \quad (16)$$

و بنابر این از (۱۶) و (۶) یک رابطه انتگرالی تعریف شده بر روی فقط مرز بصورت زیر نتیجه می‌شود:

اکنون اگر نقطه داخلی  $x$  به سمت مرز میل داده شود، با توجه به خصوصیت پرش پتانسیل دوگانه، معادله انتگرالی برای نقاط روی مرز بصورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} c_{kj} u_j(x) = & \int_{\Gamma} K_{kj}(\xi, y) u_j(y) d\Gamma_y \\ & - \int_{\Gamma} G_{ik}(\xi, y) t_i(y) d\Gamma_y \\ & + \int_{\Omega} G_{ik}(\xi, y) g_i(y) d\Omega_y \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن  $c_{ij} = \Theta(\xi) \delta_{ij} / 2\pi$  بوده و  $\Theta(\xi)$  زاویه داخلی در نقطه  $\xi \in \Gamma$  می‌باشد. همانگونه که مشاهده می‌شود یکی از عبارات انتگرالی بالا بر روی کل ناحیه  $\Omega$  تعریف شده است که برای محاسبه آن از روش تقابل دوگانه استفاده خواهد شد.

### روش تقابل دوگانه

در روش تقابل دوگانه تابع  $g_i$  در فضای توابع  $f$  بصورت زیر بسط داده می‌شود

$$g_i = \rho u_j u_{i,j} = \sum_{m=1}^p f(x, y^m) \alpha_i^m \delta_{il} \quad (9)$$

سری بالا شامل توابع  $f$  که وابسته به هندسه مورد نظر بوده و ضرائب  $\alpha$  می‌باشد که چگونگی بدست آوردن این ضرائب بعداً تشریح خواهد شد. با توجه به این امر میتوان نوشت

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G_{ik}(x, y) g_i(y) d\Omega_y = & \sum_{m=1}^p \alpha_i^m \int_{\Omega} G_{ik}(x, y) f(y, z^m) \delta_{il} d\Omega_y \end{aligned} \quad (10)$$

اکنون فرض کنید که  $\hat{u}_{il}$  و  $\hat{t}_{il}$  جوابهای معادله استوکس غیرهمگن زیر باشند

$$\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_{il}(x, y^m)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \hat{p}_l(x, y^m)}{\partial x_i} = f(x, y^m) \delta_{il} \quad (11)$$

مراجع موجود در زمینه DRM انتخاب این نوع تابع نه با تجزیه و تحلیل ریاضی بلکه بر اساس تجربه محققین بوده است. بهر حال مطالعات اخیر در مورد تئوری میانجی ریاضی بر اساس توابع پایه شعاعی تا اندازه‌ای این انتخاب را توجیه می‌سازد [۱۳].

### جواب اختصاصی

به منظور بدست آوردن جواب اختصاصی متناظر با معادله استوکس غیر همگن از همان روشی که برای جواب اساسی معادله استوکس همگن ارائه شده است استفاده می‌شود [۱۴]. در ابتدا تانسور مرتبه دوم  $\hat{u}_{ij}(x, y)$  بر حسب یک پتانسیل کمکی  $\psi(r)$  بصورت زیر تعریف می‌گردد

$$\hat{u}_{ij}(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k} \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (19)$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا مشاهده می‌شود که معادله بیوستگی بطور خودکار ارضاء می‌گردد. با جایگذاری (۱۹) در (۱۱) بدست می‌آید

$$\mu \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} \delta_{ij} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i \partial x_i} \right) - \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial x_i} = (1+r) \delta_{ij} \quad (20)$$

حال اگر فرض کنیم که  $\psi(r)$  در معادله همساز دوگانه صدق کند، یعنی

$$\mu \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k \partial x_k} = 1+r \quad (21)$$

آنگاه میدان فشار باید معادله زیر را ارضاء نماید:

$$\mu \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial \hat{p}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

که در اینصورت نتیجه می‌شود که

$$\hat{p}_i = -\mu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i} \quad (23)$$

$$u_k(x) = \int_{\Gamma} K_{kj}(x, y) u_j(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} G_{ik}(x, y) t_i(y) d\Gamma_y + \sum_{m=1}^p \alpha_i^m \left\{ \hat{u}_{kl}(x, z^m) - \int_{\Gamma} K_{kj}(x, y) \hat{u}_{jl}(y, z^m) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} G_{ik}(x, y) \hat{t}_{il}(y, z^m) d\Gamma_y \right\} \quad (17)$$

وچنانچه نقطه  $\xi$  نیز یکی از نقاط مرزی باشد، معادله انتگرالی بالا با توجه به پرش پتانسیل دوگانه بر روی مرز عبارت خواهد بود از

$$c_{kj}(\xi) u_j(\xi) = \int_{\Gamma} K_{kj}(\xi, y) u_j(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} G_{ik}(\xi, y) t_i(y) d\Gamma_y + \sum_{m=1}^p \alpha_i^m \left\{ c_{kj}(\xi) \hat{u}_{jl}(\xi, z^m) - \int_{\Gamma} K_{kj}(\xi, y) \hat{u}_{jl}(y, z^m) d\Gamma_y + \int_{\Gamma} G_{ik}(\xi, y) \hat{t}_{il}(y, z^m) d\Gamma_y \right\} \quad (18)$$

حال نحوه بدست آوردن جواب اختصاصی  $\hat{u}_{ij}$  و بردار کشش مربوط به آن،  $\hat{t}_{ij}$ ، و همچنین ضرایب  $\alpha_i$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. از طرفی برای یافتن جواب اختصاصی با توجه به رابطه (۱۱) در ابتدا باید تابع  $f$  را تعیین نمود. بنابراین موارد زیر بایستی مشخص شوند

- تابع  $f$
- جواب اختصاصی
- ضرایب  $\alpha$

### تابع $f$

مطالعه نتایج تحقیقات قبلی در روش تقابل دوگانه نشان می‌دهد که با اینکه انواع توابع  $f$  می‌توانند بعنوان یک پایه برای بسط عبارات چشمه مورد استفاده قرار گیرند، ولی معمولاً بهترین نتایج با انتخاب  $f = 1+r$  که در آن  $r = |x - y|$  می‌باشد، حاصل شده‌اند. با توجه به

برای رهایی از عبارت مشتق مجدداً خود  $u_i(x)$  نیز در همین فضا بسط داده می‌شود. یعنی

$$u_i(x) = F(x, y^m) \beta_i^m \quad (30)$$

بنابراین میتوان نوشت

$$\beta_i^k = [F(y^m, y^k)]^{-1} u_i(y^m) \quad (31)$$

با مشتق‌گیری از (۳۰) بدست می‌آید

$$u_{i,j}(x) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} F(x, y^m) \right] \beta_i^m \quad (32)$$

و با جایگذاری مقادیر  $\beta$  از رابطه (۳۱) نتیجه می‌شود

$$u_{i,j}(x) = \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} F(x, y^m) \right] \times [F(y^m, y^k)]^{-1} u_i(y^m) \quad (33)$$

حال اگر ماتریس  $U_i(y^m, y^n)$  بصورت زیر تعریف شود

$$U_i(y^m, y^n) = u_i(y^m) \delta_{mn} \quad (34)$$

میتوان نتیجه گرفت که

$$\left[ \rho u_j u_{i,j} \right] (y^m) = \rho U_j(y^m, y^n) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} F(x, y^m) \right] [F(y^m, y^k)]^{-1} u_i(y^m) \quad (35)$$

با توجه به روابط (۲۹) و (۳۵) بدست می‌آید

$$\alpha_i^k = [F(y^m, y^k)]^{-1} \rho U_j(y^m, y^n) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} F(x, y^m) \right] [F(y^m, y^k)]^{-1} u_i(y^m) \quad (36)$$

با توجه به اینکه رابطه بالا وابسته به جواب یعنی  $U_j$  می‌باشد، روش حل نیازمند تکرار خواهد بود. برای شروع به حل در ابتدا یک جواب برای حدس اولیه در نظر گرفته شده (معمولاً حل میدان استوکس) و سپس حل مسئله به روشهای تکراری تا همگرا شدن به جواب انجام می‌شود.

جواب معادله (۲۱) عبارت خواهد بود از

$$\mu \psi = \frac{r^4}{64} + \frac{r^5}{225} \quad (24)$$

حال با جایگذاری پتانسیل  $\psi$  بدست آمده در معادله (۱۹) و (۲۳) روابط زیر برای میدان جریان استوکس غیر همگن بدست می‌آید

$$\hat{u}_{ij}(x, y) = \frac{1}{\mu} \left[ r^2 \left( \frac{3}{16} + \frac{4r}{45} \right) \delta_{ij} - r_i r_j \left( \frac{1}{8} + \frac{r}{15} \right) \right] \quad (25)$$

$$\hat{p}_i(x, y) = -r_i \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{3} \right) \quad (26)$$

تانسور تنش متناظر با این میدان و همچنین بردار کشش مربوطه نیز عبارت خواهد بود از

$$\sigma_{ij}(\hat{u}_{ij}(x, y), \hat{p}_i(x, y)) = r_i \left( \frac{1}{4} + \frac{r}{5} \right) \delta_{ij} + r_i \left( \frac{1}{4} + \frac{r}{5} \right) \delta_{ij} + r_j \left( \frac{1}{4} + \frac{r}{5} \right) \delta_{ij} - \frac{2r_i r_j r_i}{15r}$$

$$\hat{t}_{ij}(x, y) = \sigma_{ij} n_j = r_i \left( \frac{1}{4} + \frac{r}{5} \right) n_i + r_i \left( \frac{1}{4} + \frac{r}{5} \right) n_i + r_j \left( \frac{1}{4} + \frac{r}{5} \right) n_j \delta_{ij} \quad (27)$$

$$- \frac{2r_i r_j r_i}{15r} n_j \quad (28)$$

### ضرایب $\alpha$

برای بدست آوردن ضرایب  $\alpha$  رابطه (۹) برای تمامی گره‌های روی مرز و داخل میدان محاسبه می‌شود. در اینصورت

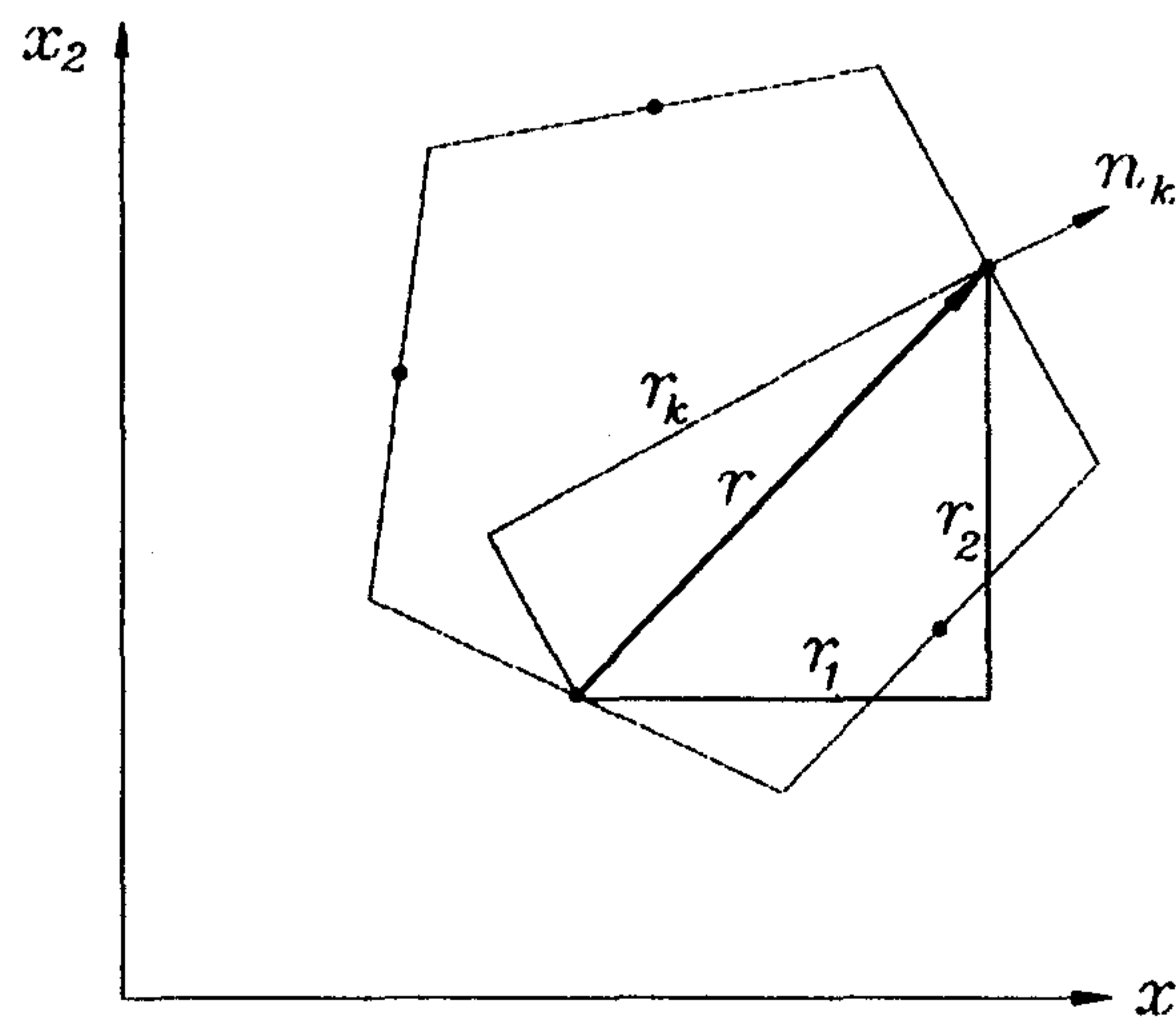
$$\alpha_i^k = [F(y^m, y^k)]^{-1} g_i(y^m) = [F(y^m, y^k)]^{-1} \rho u_j u_{i,j}(y^m) \quad (29)$$

### روش حل عددی

رابطه (۱۸) مبنای محاسبات برای روش حل عددی است. در روش حل عددی انتگرالهای تعریف شده بر روی مرز بصورت مجموع انتگرالهای تعریف شده بر روی المانهای مرزی نوشته شده و سپس با محاسبه این انتگرالها به روش گوس، یک سیستم معادلات جبری بدست می آید [۱۵، ۱۶]. با حل این سیستم معادلات و مشخص شدن جواب در هر مرحله، سمت راست معادلات تصحیح شده و تا همگرا شدن جواب این مراحل ادامه می یابد. با توجه به رابطه (۱۸) میتوان نوشت

$$c_{kj}(\xi)u_j(\xi) - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} K_{kj}(\xi, y)u_j(y)d\Gamma_y + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} G_{ik}(\xi, y)t_i(y)d\Gamma_y = \sum_{m=1}^p \alpha_i^m \{c_{kj}(\xi)\hat{u}_{jl}(\xi, z^m) - \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} K_{kj}(\xi, y)\hat{u}_{jl}(y, z^m)d\Gamma_y + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} G_{ik}(\xi, y)\hat{t}_{il}(y, z^m)d\Gamma_y\} \quad (37)$$

که در این رابطه نیز اگر  $\xi$  یک نقطه داخلی باشد،  $c_{kj}(\xi)$  برابر با  $\delta_{kj}$  بوده و اگر نقطه مرزی باشد، با توجه به زاویه جسم در آن نقطه محاسبه می شود. شکل (۲) مولفه های بردار  $r$  که عبارتند از  $r_1, r_2, r$  و  $r$  در جهت  $n_k$  که با  $r_k$  نمایش داده می شود را نشان می دهد.



شکل ۲: بردارهای  $r_1, r_2, r$  نسبت به یکدیگر.

هنگامیکه انتگرالگیری بر روی المانی که بار متمرکز بر روی آن قرار دارد، انجام می گیرد با یک انتگرال منفرد مواجه خواهیم شد که دارای تکنیکی ضعیف می باشد. در این صورت، با توجه به شکل (۳) میتوان نوشت

$$r_k = 0, \quad r_1 = r \cos \theta, \quad r_2 = r \sin \theta \quad (38)$$

حال اگر  $G_{11} = \int_{\Gamma_i} G_{11}(\xi, y)d\Gamma_y$ ، با توجه به (۷) بدست می آید

$$G_{11} = \int_{\Gamma_i} \frac{1}{4\pi\mu} \left( \frac{r_1^2}{r^2} - \ln r \right) d\Gamma = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{4\pi\mu} (\cos^2 \theta - \ln r) dr = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{4\pi\mu} (\cos^2 \theta - \ln r) dr = \frac{l}{4\pi\mu} [\cos^2 \theta - \ln(l/2) + 1] \quad (39)$$

که در آن  $l$  طول المان مرزی می باشد. به همین ترتیب بدست می آید:

$$G_{22} = \frac{l}{4\pi\mu} [\cos^2 \theta - \ln(l/2) + 1] \quad (40)$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{l}{4\pi\mu} \sin \theta \cos \theta \quad (41)$$

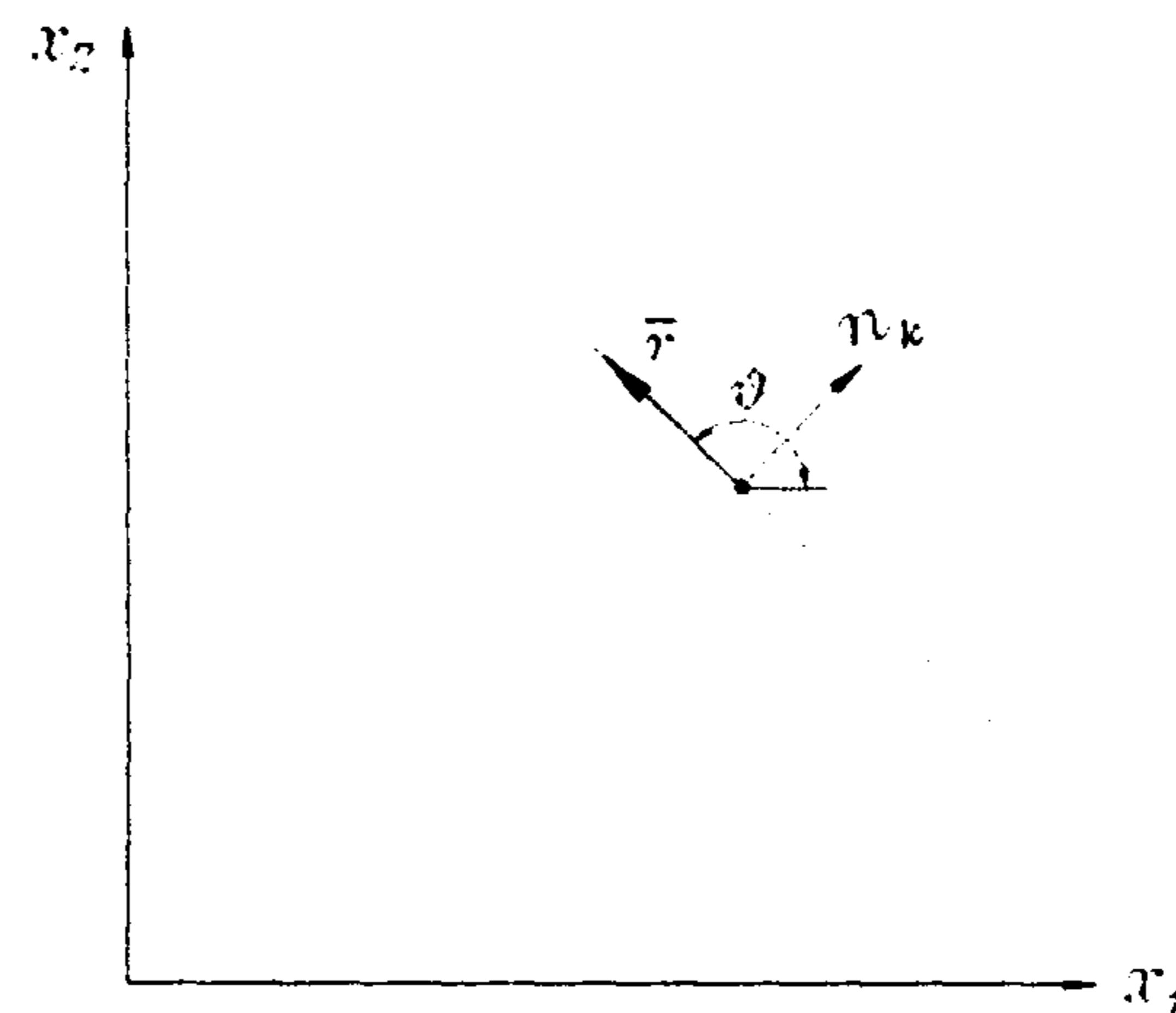
همچنین با توجه به اینکه  $r_k n_k = 0$  می باشد، لذا انتگرالهایی که شامل  $K_{kj}$  می باشند برابر با صفر خواهند بود.

پس از محاسبه انتگرالهای فوق به روش گوس سیستم معادلات زیر حاصل خواهد شد.

$$Gt - Hu = (G\hat{T} - H\hat{U})\alpha \quad (42)$$

در رابطه فوق  $G$  و  $H$  ماتریسهای مربعی و یا مستطیلی بوده که عناصر آنها از انتگرالگیری هسته های  $G_{ik}$  و  $K_{kj}$  بر روی المانهای مرزی بدست می آید. هنگام محاسبه برای نقاط مرزی این ماتریسها مربعی و هنگام محاسبه برای نقاط

نیروهای اینرسی سیال رفته‌رفته بیشتر می‌گردد و لذا برای دستیابی به دقت بیشتر برای جوابهای بدست‌آمده لازم است اطلاعات بیشتری از رفتار سیال در ناحیه محاسباتی در اختیار باشد. انتخاب تعداد نقاط داخلی بیشتر موجب می‌شود که اطلاعات بیشتری از دامنه محاسباتی در اختیار قرار گرفته و بنابراین هرچه عدد رینولدز افزایش می‌یابد لازم است تعداد نقاط داخلی نیز افزایش یابد. برنامه تهیه شده برای اعداد رینولدز ۱۰ و ۱۰۰ اجرا شده‌است و نتایج آن با نتایج بدست آمده از کدهای اختلاف محدود مورد مقایسه قرار گرفته‌است.



شکل ۳: بردار  $r$  برای المان دارای بار متمرکز.

داخلی، این ماتریسها مستطیلی خواهند بود. با جایگذاری مقادیر  $\alpha$  از رابطه (۳۶) میتوان نوشت:

$$Gt - Hu = Su \quad (43)$$

که در آن

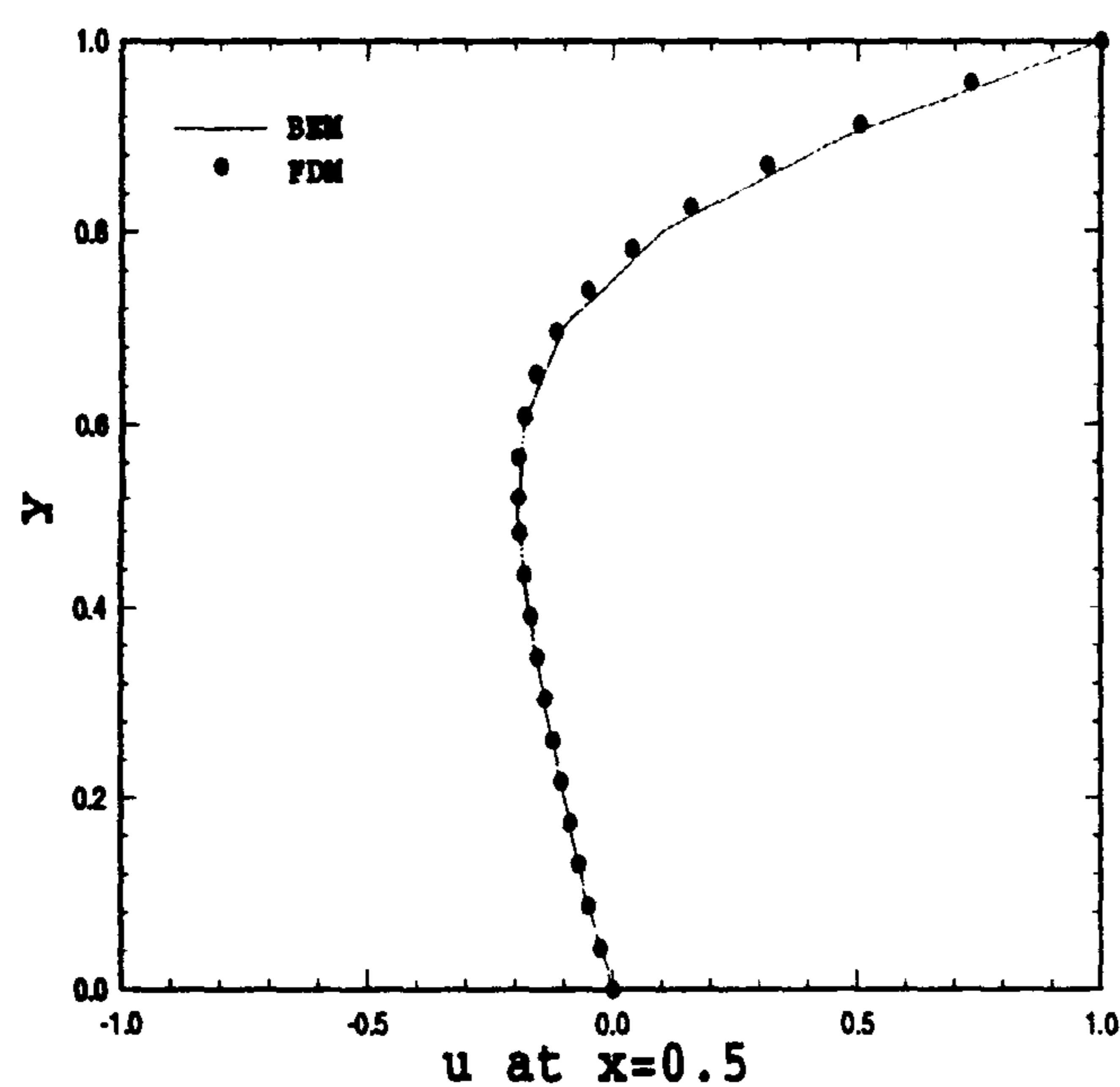
$$S = (G\hat{T} - H\hat{U})F^{-1}U_j F_j F^{-1} \quad (44)$$

کلیه ماتریسهای بالا بجز  $U_j$  تابعی از هندسه بوده و فقط لازم است یکبار محاسبه و ذخیره شوند.

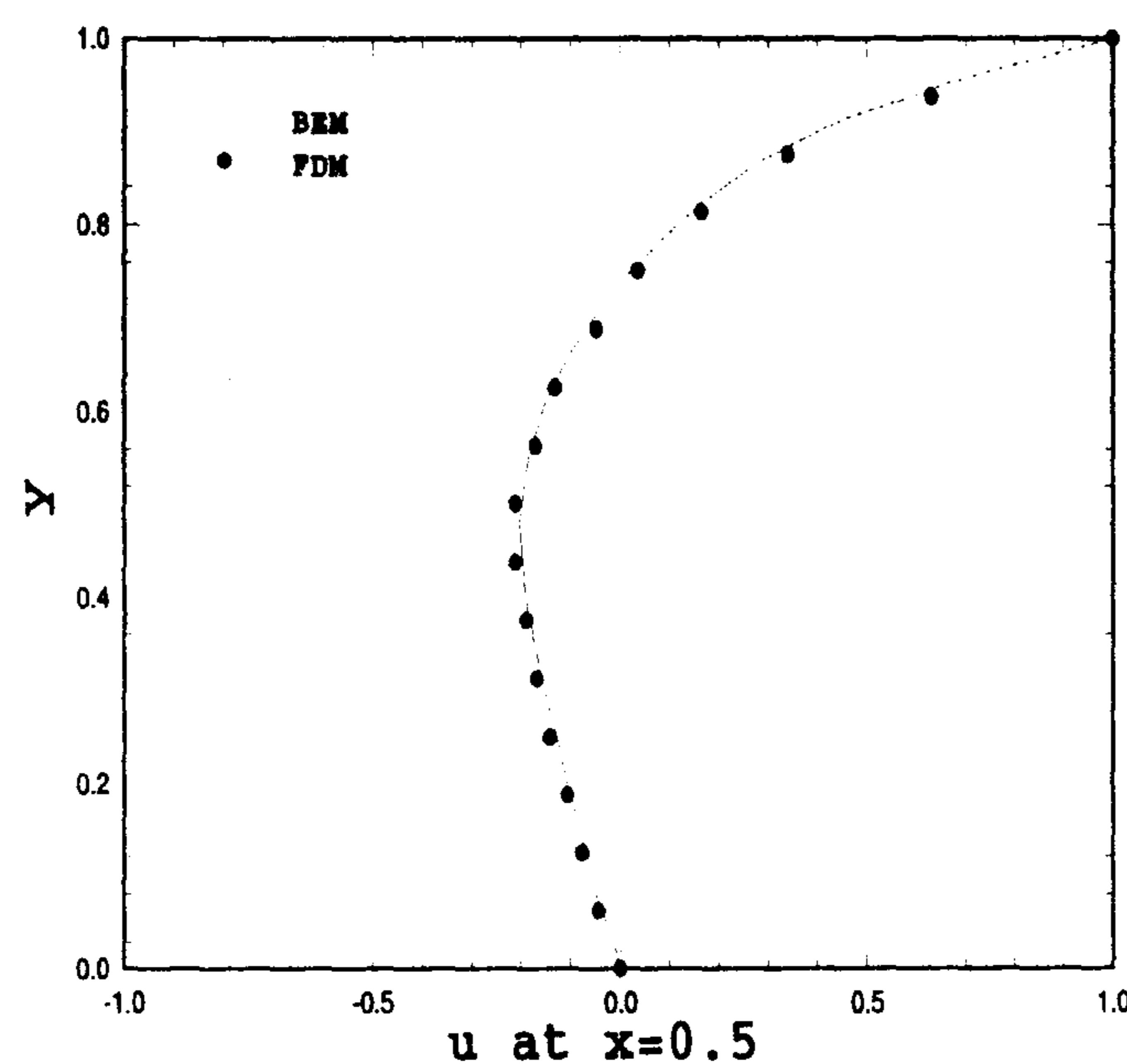
### نتایج حل عددی

در این بخش نتایج حل معادلات ناویر-استوکس در حفره برای اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌است. برای حل مسئله از المانهای ثابت استفاده شده‌است که این امر موجب شده‌است که از یک طرف اعمال آن در برنامه کامپیوتری ساده‌تر بوده و از طرف دیگر مشکل گوشه‌ها نیز مرتفع گردد. در صورت استفاده از المانهای خطی و یا المانهای مرتبه بالاتر، در گوشه‌های ناحیه محاسباتی، گره وجود خواهد داشت. با توجه به اینکه نیروهای کشش در گوشه‌ها پیوسته نمی‌باشند، قرار گرفتن گره در گوشه موجب دردسر خواهد بود زیرا در اینصورت نیروهای کشش در گوشه‌ها پیوسته فرض خواهند شد. یک روش حل این مشکل استفاده از المانهای ناپیوسته است که در کارهای تحقیقاتی آتی ارائه خواهد شد.

مقایسه نتایج حل عددی بدست‌آمده با نتایج حل مسئله به روش اختلاف محدود دقت جوابهای بدست‌آمده را مورد تایید قرار می‌دهد. با افزایش عدد رینولدز تاثیر



شکل ۴: سرعت افقی سیال در خط مرکزی حفره در  $Re = 10$



شکل ۵: سرعت افقی سیال در خط مرکزی حفره در  $Re = 100$



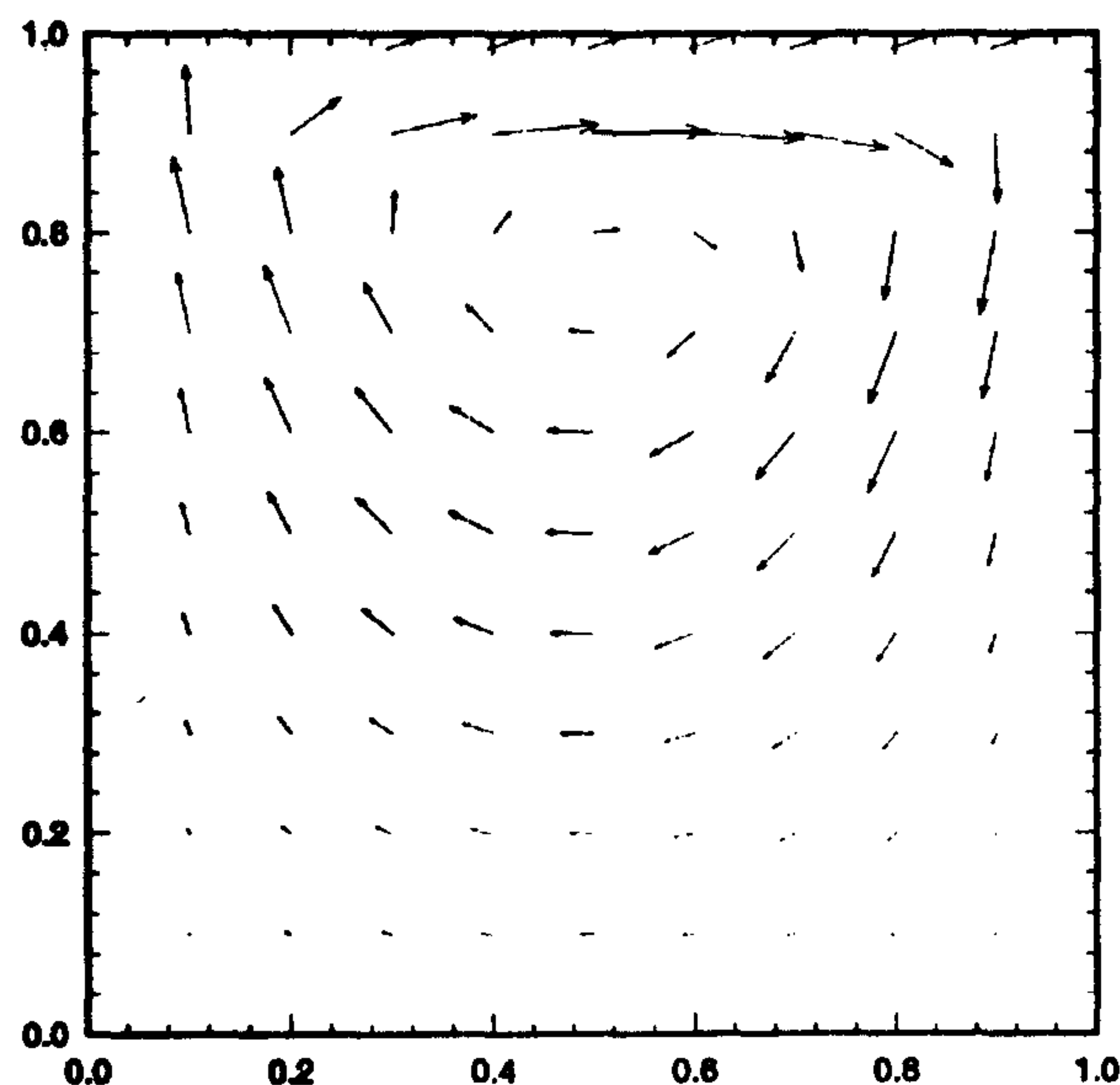
که نتایج این مرجع از دقت بالایی برخوردار باشند. در شکل‌های (۶) و (۷) بردارهای سرعت برای این دو حالت ارائه شده است و تغییر مرکز گردابه اصلی با تغییر عدد رینولدز بخوبی مشاهده می‌شود.

### تشکر و قدردانی

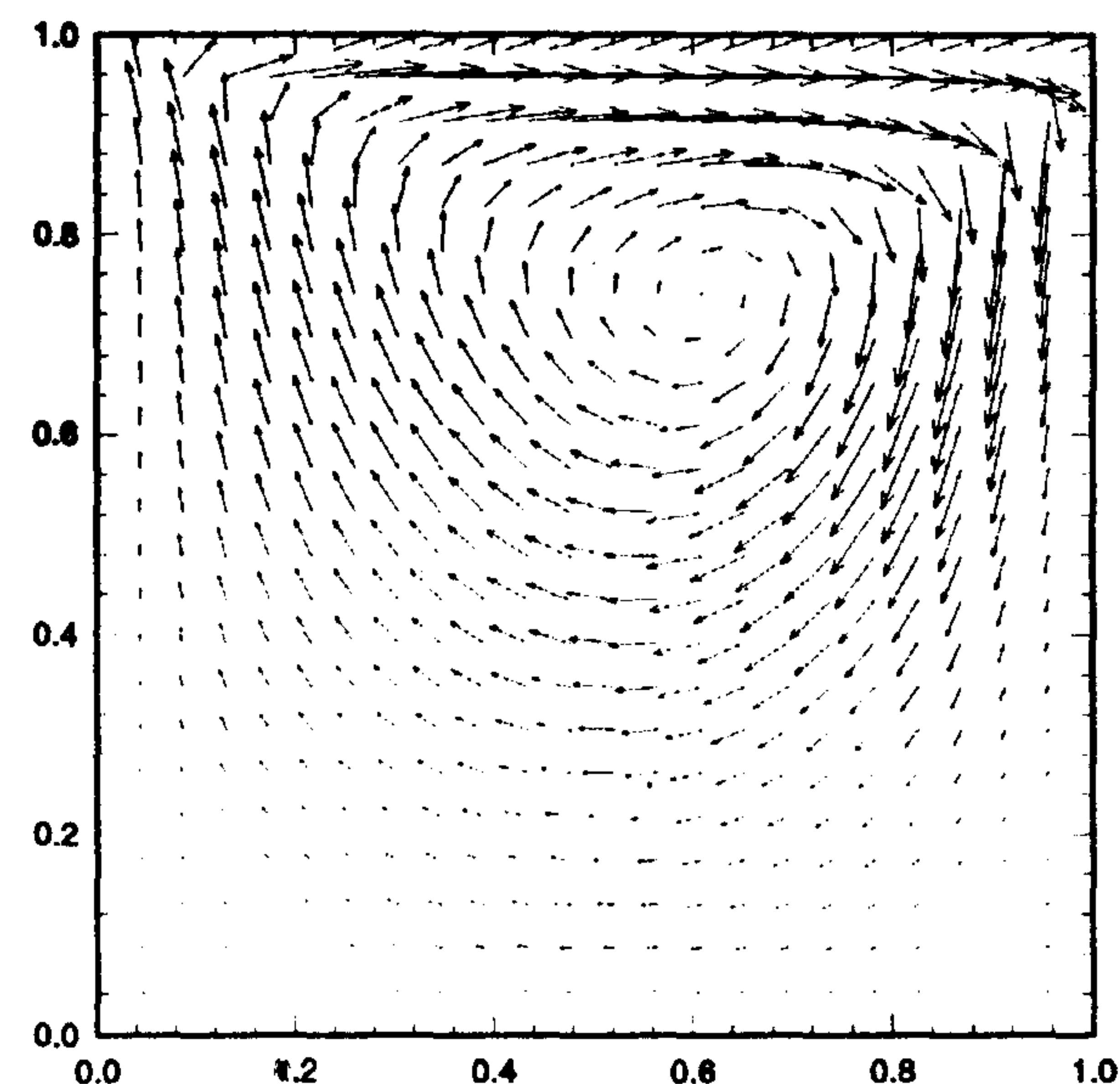
نگارندگان از صنایع شهید باقری بدلیل در اختیار قرار دادن کلیه امکانات لازم و مساعدت‌های بی شائبه و همچنین معاونت پژوهشی دانشکده فنی دانشگاه تهران نهایت تشکر و قدردانی را می‌نمایند.

برای حالتیکه  $Re = 10$  می‌باشد، تعداد ۴۰ المان مرزی و برای حالتیکه  $Re = 100$  می‌باشد، تعداد ۹۶ المان مرزی در نظر گرفته شده است. همچنین تعداد ۸۱ و ۵۲۹ نقطه داخلی بترتیب برای  $Re = 10$  و  $Re = 100$  در نظر گرفته شده است.

شکل‌های (۴) و (۵) سرعت افقی سیال را در خط مرکزی حفره در هر حالت نشان می‌دهند. مقایسه نتایج بدست آمده برای  $Re = 100$  با نتایج گیا [۱۷] نشان می‌دهد که نتایج بدست آمده حتی در اعداد رینولدز متوسط از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشند. با توجه به اینکه در مرجع مزبور برای دامنه محاسباتی یک شبکه  $129 \times 129$  در نظر گرفته شده است، میتوان انتظار داشت



شکل ۷: بردارهای سرعت سیال در  $Re = 100$ .



شکل ۶: بردارهای سرعت سیال در  $Re = 10$ .

### مراجع

- 1 - Bush, M. B. and Tanner, R. I. (1983). "Numerical solution of viscous flow using integral equation methods." *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 3, PP. 71-92.
- 2 - Tosaka, N. and Onishi, K. (1985). "Boundary integral equation formulation for steady navier-stokes equations using the stokes fundamental solution." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 2, 128-132.
- 3 - Dargush, G. F. and Banerjee, P. K. (1990). "Advanced boundary element methods for steady incompressible thermoviscous flow." in *Boundary Element Methods in Nonlinear Fluid Dynamics*, Elsevier Applied Science, Lonon.
- 4 - Kuroki, T., Onishi, K. and Tosaka, N. (1985). "Thermal fluid flow with velocity evaluation using boundary elements and penalty function method." in *BEM VII*, Comp. Mech. Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin..
- 5 - Kitagawa, K., Brebbia, C. A., Wrobel, L. C. and Tanaka, M. (1986). "Boundary element analysis of viscous flow by penalty function formulation." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 3, PP. 194-200.

- 6 - Tosaka, N. and Kakuda, K. (1994). "Development of BEM for convective viscous flow problems. " *Int. J. Solids Structures*, Vol. 31, PP. 1847-1859.
- 7 - Kakuda, K., and Tosaka, N. (1990). "Boundary element approach to viscous flow problems based on the time splitting technique. " in *BEM XII*, Comp. Mech. Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin.
- 8 - Tosaka, N. and Onishi, K. (1986). "Boundary integral equation formulation for unsteady incompressible viscous fluid flow by time-differencing." *Engineering analysis by Boundary Elements*, Vol. 3, PP. 101-104.
- 9 - Dargush, G. F. and Banerjee, P. K. (1991b). "A time-dependent incompressible viscous BEM for moderate reynolds number. " *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 31, PP. 1627-1648.
- 10 - Partridge, P. W. and Brebbia, C. A. (1993). "The dual reciprocity method." *In Advanced Formulation in Boundary Element Methods*, Comp. Mech. Publications, Southampton and Elsevier Applied Sci., London.
- 11 - Partridge, P. W., Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C. (1992). *The Dual Reciprocity Boundary Element Methods*. Comp. Mech. Publications, Southampton and Elsevier Applied Sci., London.
- 12 - Ladyzhenskaya, O. A. (1963). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, New York
- 13 - Powell, M. J. D. (1992). "The theory of radial basis function approximation in 1990." in *Advances in Numerical Analysis*, Vol. 1, Clarendon Press, Oxford
- 14 - Happel, J. and Brenner, H. (1973). *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Martinus Noordhoff, The Netherlands.
- 15 - Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (1989). *Boundary Elements: An Introductory Course*. Comp. Mech. Publications, Southampton and McGraw-Hill, New York
- 16 - Paris, F. and Canas, J. (1997). "Boundary Element Method: Fundamentals and Applications." Oxford University Press, New York.
- 17 - Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T. (1982). "High-Re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and multigrid method." *J. Comp. Phys.*, Vol. 48, PP. 347-411.
- 18 - Pollandt, R. (1997). "Solving nonlinear differential equations of mechanics with the boundary element method and radial basis functions." *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 40, PP. 61-73.
- 19 - Power, H. and Wrobel, L. C. (1995). *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Comp. Mech. Publications, Southampton.
- 20 - Trevelyan, J. (1994). *Boundary Element Methods for Engineers: Theory and Application*. Comp. Mech. Publications, Southampton.
- 21 - Yamada, T., Wrobel, L. C. and Power, H. (1994). "On the convergence of the dual reciprocity boundary element method." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 13, PP. 291-298 .

## واژه نامه

1- ARIES	ایریز
2- Biharmonic	همساز دوگانه
3- Convection-diffusion	جابجائی-پخش
4- Dual Reciprocity Method (DRM)	روش تقابل دوگانه
5- Fundamental solution	جواب اساسی
6- PATRAN	پاترن
7- Penalty function	تابع جریمه
8- Preprocessing	پیش پردازش
9- Radial basis functions	توابع پایه شعاعی
10- Stokeslet	استوکسلت
11- Stresslet	استرسلت
12- Time-splitting	شکافت زمانی