

حل معادلات وابسته ترموالاستیسیته دینامیکی در استوانه جدار نازک تحت اثر شوکهای فشار، برش و درجه حرارت با استفاده از روش اجزاء محدود

بهزاد حکیم الهی

دانشجوی دکترای گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

ناصر سلطانی

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت: ۷۷/۶/۱۶، تاریخ تصویب: ۷۸/۲/۲۵)

چکیده

در مواردی که ثابت زمانی اغتشاشات حرارتی قابل قیاس با ثابت زمانی اغتشاشات مکانیکی سیستم باشد احتیاج به حل همزمان میدان توزیع تنش و درجه حرارت در قطعه می‌باشد. در این مقاله با استفاده از روابط کلی ترموالاستیسیته دینامیکی وابسته که شامل معادلات تعادل الاستیسیته و معادله انرژی می‌باشد، معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی حاکم بر پوسته استوانه‌ای جدار نازک بدست آمده است. با توجه به عدم وجود حل تحلیلی برای این معادلات از روش اجزاء محدود برای حل آنها استفاده گردید، است. در این مقاله اثر تغییر مکان محوری در معادلات وارد گردیده و توزیع درجه حرارت در ضخامت پوسته سهموی در نظر گرفته شده است. همچنین امکان اعمال شوکهای فشار، برش و درجه حرارت تابع زمان و متغیر در طول استوانه وجود دارد.

کلید واژه‌ها: ترموالاستیسیته وابسته، بارگذاری دینامیکی، اجزاء محدود، استوانه جدار نازک، گالرکین

مقدمه

مسائلی که در آنها اجسام به طور همزمان تحت اثر بارهای ضربه‌ای مکانیکی (شوک مکانیکی) و شوک حرارتی و یا در معرض یکی از بارهای مذکور قرار می‌گیرند، بعد وسیعی از کاربردهای عملی مهندسی را شامل می‌شوند. به طور نمونه می‌توان از دیگهای بخار، موتور راکت‌های سوخت جامد، توربین‌ها، مخازن تحت فشار مورد استفاده در تحولات مکانیکی، شیمیایی و یا اتمی و موتورهای جت و به طور کلی قطعاتی که در معرض فعل و انفعالات انفجاری می‌باشند نام برد. برای طراحی و تحلیل اینگونه قطعات احتیاج به بدست آوردن توزیع تنش و توزیع درجه حرارت در کل قطعه می‌باشد، تا بر اساس آنها بتوان جنس و ابعاد و استحکام مورد نیاز قطعه را تعیین کرد. برای این منظور احتیاج به حل معادلات ترموالاستیسیته می‌باشد. معادلات ترموالاستیسیته از معادله تعادل الاستیسیته و معادله انرژی تشکیل شده است که در حالت بارگذاری دینامیکی این معادلات به یکدیگر وابسته بوده و به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i \quad (1)$$

$$KV^2 T + \dot{Q} = (\gamma\lambda + \gamma\mu)\alpha T \dot{\epsilon}_{kk} + \rho c \dot{T} \quad (2)$$

در رابطه فوق σ_{ij} تانسور تنش، ρ چگالی، b_i بردار نیروهای حجمی و a_i بردار شتاب خطی، K ضریب هدایت حرارتی، T درجه حرارت مطلق، \dot{Q} نرخ انرژی تولیدی در واحد حجم جسم، λ و μ ثابت‌های لامه، α ضریب انبساط حرارتی، T_a درجه حرارت اولیه در حالت بدون تنش، $\dot{\epsilon}_{kk}$ نرخ تغییرات کرنش حجمی و c ضریب گرمایی ویژه می‌باشند.

با توجه به پیچیدگیهایی که در حل این معادلات وجود دارد، حل تحلیلی آنها به جز در موارد خاص وجود ندارد. به همین دلیل از روش‌های عددی مانند روش اجزاء محدود برای حل این گونه معادلات استفاده گردیده است. از کارهای انجام گرفته در این زمینه می‌توان به کاربرد روش گالرکین برای حل مسئله ترموالاستیسیته وابسته برای پوسته استوانه‌ای بوسیله McQuillen و Bruhl [۵] اشاره کرد که به یافتن حل تحلیلی به صورت سری منجر گردیده است. Tene و Shienman [۷]، Takezono [۶] اسلامی و واحدی [۳، ۲] و Ghoneim [۴] نیز کارهایی در این زمینه انجام

حول محور y به صورت زیر بدست می آیند:

$$\sum dF_x = dm \cdot \ddot{u} \Rightarrow \frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho h \ddot{u} - p_x \quad (۳)$$

$$\sum dF_z = dm \cdot \ddot{w} \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} = p_z - \rho h \ddot{w} \quad (۴)$$

$$\sum dM_y = dI_{yy} \cdot \ddot{\Psi} \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (۵)$$

با حذف Q_x در روابط (۴) و (۵) معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{N_\theta}{R} = p_z - \rho h \ddot{w} + \frac{\rho h^3}{12} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (۶)$$

بر این اساس، دو معادله تعادل بدست آمد که برای فرمول بندی آنها بر حسب مؤلفه های تغییر مکان u و w از روابط الاستیسیته حاکم بر پوسته استوانه ای استفاده می گردد [۸، ۹]. با استفاده از این روابط و جایگذاری آنها در روابط (۳) و (۶) و با فرض تقریب درجه دو برای توزیع درجه حرارت در جهت ضخامت معادلات تعادل الاستیسیته بر حسب تغییر مکان های u و w به صورت زیر بدست می آیند:

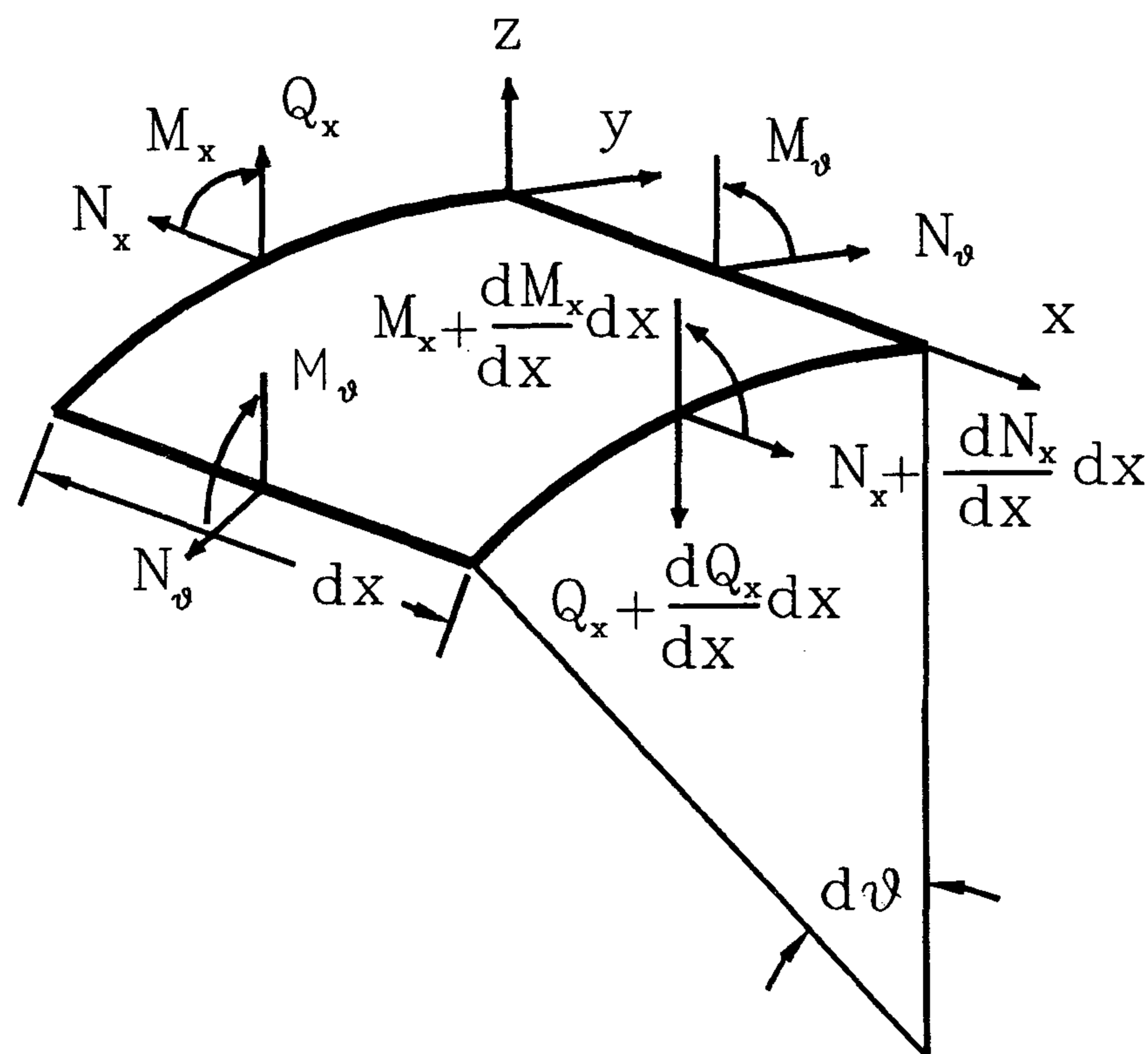
داده اند. اسلامی، شاکری و صداقتی [۱] مسئله ترموالاستیسیته وابسته را برای استوانه جدار نازک با حذف اثر تغییر مکان محوری، ثابت گرفتن شوک های مکانیکی و حرارتی در طول استوانه و خطی گرفتن توزیع درجه حرارت در جهت ضخامت مورد بررسی قرار داده اند.

نویسندگان مقاله نیز معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته وابسته در استوانه جدار نازک را برای حل به روش اجزاء محدود در حالتی که اثر تغییر مکان محوری لحاظ گردیده و شوک های مکانیکی و حرارتی در طول استوانه متغیر بوده و توزیع درجه حرارت در جهت ضخامت به صورت سهموی تقریب زده شده است بدست آورده اند [۸، ۹].

در مقاله حاضر خلاصه کار انجام شده به همراه نتایجی که با استفاده از حل چند مثال و مقایسه با روش های قبلی بدست آمده ارائه گردیده است.

معادلات حاکم بر پوسته استوانه ای جدار نازک

معادلات حاکم شامل معادلات تعادل دینامیکی و معادله انرژی (اصل اول ترمودینامیک) می باشد. معادلات تعادل دینامیکی با استفاده از شکل (۱) با نوشتن معادلات حرکت در جهت x و z و



شکل ۱: جزیی از پوسته استوانه ای.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{12}{R^2 h^2} \cdot w + \frac{12 \rho (1-\nu^2)}{E h^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho (1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{12 \nu}{R h^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{12 \alpha (1+\nu)}{R h^2} T_r + \\ (1+\nu) \alpha \frac{\partial^2 T_r}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu)}{R} \cdot \alpha T_r = \frac{12 (1-\nu^2)}{E h^2} \cdot p_z \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho (1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - (1+\nu) \alpha \left[\frac{\partial T_r}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial T_r}{\partial x} \right] = - \frac{(1-\nu^2)}{E h} p_x \end{cases} \quad (۷)$$

معادلات حاصله (۳)، (۶) و (۹) سه معادله دیفرانسیل هستند که شامل پنج مجهول $T_2(x,t)$ ، $T_1(x,t)$ ، $T_0(x,t)$ ، $w(x,t)$ ، $u(x,t)$ می باشند. با توجه به تقریب سهموی برای توزیع درجه حرارت در جهت ضخامت پوسته مقداری خطا در معادله انرژی بوجود خواهد آمد که با استفاده از روش باقیمانده وزنی گالرکین، باقیمانده فوق نسبت به ۱ و z و z^2 در محدوده مکانی $\frac{-h}{2}$ تا $\frac{h}{2}$ عمود می شود، برای این منظور:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Rsdz = 0; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Rs \cdot zdz = 0; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Rs \cdot z^2 dz = 0 \quad (11)$$

$$Rs = K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] - (\nu\lambda + \nu\mu)\alpha T_a \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R} \right] - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

با توجه به اینکه سطوح داخلی و خارجی استوانه تحت اثر انتقال حرارت جابجایی می باشند، شرایط مرزی مربوطه در جهت z به صورت زیر می باشد:

$$-K \frac{\partial T}{\partial z} = h_i [T_i - T] \quad z = -\frac{h}{2} \quad (13)$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial z} = h_o [T - T_a] \quad z = \frac{h}{2} \quad (14)$$

با محاسبه روابط (۱۱) و جایگذاری شرایط مرزی (۱۳) و (۱۴) سه معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} - \left(\frac{h_i + h_o}{Kh} \right) T_0 - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial t} + \left(\frac{h_i - h_o}{2K} + \frac{1}{R} \right) T_1 + \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12a} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} - h \left(\frac{h_i + h_o}{4K} \right) T_2 + \frac{h_i}{Kh} (T_i - T_a) - \frac{(\nu\lambda + \nu\mu)T_a}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial t} - T_1 \left[\frac{3}{2} \frac{h_i + h_o}{Kh} + \frac{12}{h^2} \right] + T_0 \left[\frac{6}{Kh^2} \frac{h_i - h_o}{2} \right] + T_2 \left[\frac{3}{2} \frac{h_i - h_o}{2K} + \frac{2}{R} \right] - \frac{h_i}{6Kh^2} (T_i - T_a) + \frac{(\nu\lambda + \nu\mu)\alpha T_a}{K} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{3}{Kh} (h_i + h_o) T_2 + \frac{h^2}{\omega} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{3h^2}{2 \cdot a} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial t} - \left[\frac{3h}{4K} (h_i + h_o) + 4 \right] T_2 + \left[\frac{3}{4K} (h_i - h_o) + \frac{1}{R} \right] T_1 - \frac{(\nu\lambda + \nu\mu)\alpha T_a}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w}{R} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{3h_i}{Kh} (T_i - T_a) = 0 \quad (17)$$

در روابط فوق $T_0(x,t)$ ، $T_1(x,t)$ و $T_2(x,t)$ ضرایب تابع تقریب زده شده برای توزیع درجه حرارت در جهت ضخامت می باشند که به صورت زیر تعریف شده است:

$$T(x,z,t) - T_a = T_0(x,t) + z \cdot T_1(x,t) + z^2 \cdot T_2(x,t)$$

معادله انرژی حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر می باشد:

$$KT_{,ii} + Q = (\nu\lambda + \nu\mu)\alpha T \dot{\epsilon}_{kk} + \rho c \dot{T} \Rightarrow \quad (18)$$

$$K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{R+z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{(R+z)^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] +$$

$$Q = (\nu\lambda + \nu\mu)\alpha T_a (\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{\theta\theta} + \dot{\epsilon}_{zz}) + \rho c \dot{T} \quad (19)$$

بدلیل کوچک بودن ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع آن ($z \ll R$) و با توجه به متقارن بودن مسئله ($\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$)، و با جایگذاری مقادیر کرنشها بر حسب تغییر مکانهای w و u و با فرض عدم تولید انرژی در واحد حجم جسم ($Q = 0$)، رابطه (۹) به شکل زیر در می آید:

$$K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = (\nu\lambda + \nu\mu)\alpha T_a \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R} \right] + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 w^{(e)}(x,t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \cdot x + \alpha_3(t) \cdot x^2 + \alpha_4(t) \cdot x^3 \\
 u^{(e)}(x,t) &= \alpha_5(t) + \alpha_6(t) \cdot x \\
 T_1^{(e)}(x,t) &= \alpha_7(t) + \alpha_8(t) \cdot x \\
 T_2^{(e)}(x,t) &= \alpha_9(t) + \alpha_{10}(t) \cdot x \\
 T_3^{(e)}(x,t) &= \alpha_{11}(t) + \alpha_{12}(t) \cdot x
 \end{aligned}
 \quad (20)$$

با توجه به اینکه برای w چهار ثابت زمانی $(\alpha_1(t)$ تا $\alpha_4(t))$ وجود دارد و اجزاء بکار رفته دو گرهی می باشند، لذا برای هر جزء روی هر گره بایستی دو مقدار وجود داشته باشد تا بتوان ضرایب $\alpha_1(t)$ تا $\alpha_4(t)$ را بدست آورد. دو درجه آزادی مربوطه w و $\frac{dw}{dx}$ در نظر گرفته می شوند. برای u ، T_1 ، T_2 و T_3 مقادیر توابع در هر گره به عنوان درجه آزادی مربوطه آن گره در نظر گرفته شده و با استفاده از مقادیر گرهی، توابع شکل برای روابط (۲۰) بدست آمده و توابع تقریب زده شده به صورت زیر تبدیل می گردند:

$$\begin{aligned}
 w^{(e)}(x,t) &= H_{oi}w_i + H_{\theta i}\theta_i + H_{oj}w_j + H_{\theta j}\theta_j = \langle H \rangle \{ w \}^{(e)} \\
 u^{(e)}(x,t) &= N_i u_i + N_j u_j = \langle N \rangle \{ u \}^{(e)} \\
 T_1^{(e)}(x,t) &= N_i T_{.i} + N_j T_{.j} = \langle N \rangle \{ T_{.} \}^{(e)} \\
 T_2^{(e)}(x,t) &= N_i T_{\cdot i} + N_j T_{\cdot j} = \langle N \rangle \{ T_{\cdot} \}^{(e)} \\
 T_3^{(e)}(x,t) &= N_i T_{\cdot i} + N_j T_{\cdot j} = \langle N \rangle \{ T_{\cdot} \}^{(e)}
 \end{aligned}
 \quad (21)$$

که $\langle N \rangle$ و $\langle H \rangle$ توابع شکل بدست آمده می باشند:

$$\langle H \rangle = \begin{Bmatrix} 1-3s^2 & (1-2s^2+s^3)l & (3s^2-2s^3) & (-s^2+s^3)l \end{Bmatrix}$$

$$\langle N \rangle = \begin{Bmatrix} 1-s & s \end{Bmatrix}$$

$$\{ w \}^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}; \{ u \}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}; \{ T_{.} \}^{(e)} = \begin{Bmatrix} T_{.i} \\ T_{.j} \end{Bmatrix};$$

$$\{ T_{\cdot} \}^{(e)} = \begin{Bmatrix} T_{\cdot i} \\ T_{\cdot j} \end{Bmatrix}; \{ T_{\cdot} \}^{(e)} = \begin{Bmatrix} T_{\cdot i} \\ T_{\cdot j} \end{Bmatrix}$$

کاربرد روش مانده وزنی کاهش یافته گالرکین برای جزئی از میدان حل روی معادلات (۱۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + A_{13} w + A_{14} \frac{\partial u}{\partial x} - A_5 T_{.} + A_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - A_7 T_2 - A_8 P_z \right]$$

$$H_{mn} dx = 0 \quad m = 0, 1 \quad n = i, j$$

در معادلات فوق a ضریب نفوذ حرارتی می باشد که از رابطه زیر بدست می آید:

$$a = \frac{K}{\rho c}
 \quad (18)$$

در نتیجه معادلات حاکم بر مسئله دینامیکی ترموالاستیسیته روی استوانه جدار نازک به صورت زیر می باشند:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + A_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + A_{13} w + A_{14} \frac{\partial u}{\partial x} - A_5 T_{.} + A_6 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - A_7 T_2 = A_8 P_z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_9 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_{10} \frac{\partial w}{\partial x} - A_{11} \frac{\partial T_{.}}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial T_2}{\partial x} = -A_{13} P_x$$

$$\frac{\partial^2 T_{.}}{\partial x^2} - A_{14} \frac{\partial T_{.}}{\partial t} - A_{15} T_{.} + A_{16} T_1 + A_{17} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} -$$

$$A_{18} \frac{\partial T_2}{\partial t} - A_{19} T_2 - A_{20} \frac{\partial w}{\partial t} - A_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -A_{22} T_i$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - A_{23} \frac{\partial T_1}{\partial t} - A_{24} T_1 + A_{25} T_{.} + A_{26} T_2 +$$

$$A_{27} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} = A_{28} T_i$$

$$\frac{\partial^2 T_{.}}{\partial x^2} - A_{29} \frac{\partial T_{.}}{\partial t} - A_{30} T_{.} + A_{31} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - A_{32} \frac{\partial T_2}{\partial t} -$$

$$A_{33} T_2 + A_{34} T_1 - A_{35} \frac{\partial w}{\partial t} - A_{36} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = -A_{37} T_i$$

(۱۹)

در روابط فوق w ، u ، T_1 و T_2 بی بعد بوده و ضرایب بی بعد A_1 تا A_{37} نیز در مراجع ۸ و ۹ آورده شده اند.

تشکیل روابط حاکم با روش مانده های وزنی کاهش یافته گالرکین

توابع w ، u ، T_1 و T_2 با تقریب نوع کانترویچ و با توجه به بالاترین مرتبه مشتقات ظاهر شده در معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله به صورت زیر بر روی یک جزء از میدان حل تقریب زده می شود:

$$[B_{10}] \{u\} + [B_{11}] \{\ddot{u}\} + [B_{12}] \{w\} + [B_{13}] \{T_x\} + [B_{14}] \{T_y\} = [B_{15}] \{P_x\} + [B_{16}]$$

$$[B_{17}] \{\dot{u}\} + [B_{18}] \{\dot{w}\} + [B_{19}] \{T_x\} + [B_{20}] \{T_y\} + [B_{21}] \{T_z\} + [B_{22}] \{\dot{T}_x\} + [B_{23}] \{\dot{T}_y\} + [B_{24}]$$

$$[B_{25}] \{\dot{w}\} + [B_{26}] \{T_x\} + [B_{27}] \{T_y\} + [B_{28}] \{\dot{T}_x\} + [B_{29}] \{T_z\} = [B_{30}] \{T_i\} + [B_{31}]$$

$$[B_{32}] \{\dot{u}\} + [B_{33}] \{\dot{w}\} + [B_{34}] \{T_x\} + [B_{35}] \{\dot{T}_x\} + [B_{36}] \{T_y\} + [B_{37}] \{T_z\} + [B_{38}] \{\dot{T}_y\} = [B_{39}] \{T_i\} + [B_{40}]$$

(۲۶)

تعریف ماتریس‌های $[B_1]$ تا $[B_{40}]$ در مرجع ۸ و ۹ ذکر گردیده‌اند. در نهایت با یکی کردن معادلات فوق، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم از زمان برای یک جزء به صورت زیر بدست می‌آید:

$$[M]^{(e)} \{\ddot{d}\} + [C]^{(e)} \{\dot{d}\} + [K]^{(e)} \{d\} = \{F\}^{(e)} \quad (27)$$

که در آن $\{d\}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\{d\} = \{w_i, \theta_i, u_i, T_{xi}, T_{yi}, T_{zi}, w_j, \theta_j, u_j, T_{xj}, T_{yj}, T_{zj}\}^T \quad (28)$$

از تشکیل معادله فوق برای کلیه اجزاء سیستم و سرهم کردن آنها، دستگاه معادلات کلی استاندارد مرتبه دوم از زمان حاکم بر مسئله بدست می‌آید.

حل دستگاه معادلات با استفاده از روش نیومارک

پس از بدست آوردن دستگاه معادلات کلی استاندارد مرتبه دوم از زمان حاکم بر مسئله، با استفاده از روش نیومارک مقادیر پارامترهای گرهی بدست می‌آید. برای این منظور لازم است تا مقادیر تغییرمکان و سرعت در لحظه صفر معین باشد (منظور از تغییرمکان و سرعت بترتیب مقادیر پارامترهای گرهی و تغییرات آنها نسبت به زمان می‌باشد) و آنگاه با استفاده از معادلات مربوط به روش نیومارک، شتاب اولیه را محاسبه کرده و از آن برای محاسبه مقادیر تغییرمکان و سرعت در لحظه بعدی استفاده نمود.

با توجه به اینکه معادله انرژی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشد، بنابراین سطرهای متناظر معادله انرژی در دستگاه

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_{10} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A_{11} \frac{\partial w}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial T_x}{\partial x} - A_{13} \frac{\partial T_y}{\partial x} + \right.$$

$$\left. A_{14} P_x - N_m dx = 0 \quad m=i,j \right.$$

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - A_{17} \frac{\partial T_x}{\partial t} - A_{18} T_x + A_{19} T_y + A_{20} \frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} - A_{21} \frac{\partial T_x}{\partial t} - A_{22} T_y - A_{23} \frac{\partial w}{\partial t} - A_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + A_{25} T_i \right] = 0$$

$$m=i,j$$

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} - A_{28} \frac{\partial T_y}{\partial t} - A_{29} T_y + A_{30} T_x + A_{31} T_z + A_{32} T_y + \right.$$

$$\left. A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} - A_{34} T_i \right] N_m dx = 0 \quad m=i,j$$

$$\int_0^l \left[\frac{\partial^2 T_z}{\partial x^2} - A_{37} \frac{\partial T_z}{\partial t} - A_{38} T_z + A_{39} \frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} - A_{40} \frac{\partial T_z}{\partial t} - \right.$$

$$\left. A_{41} T_y + A_{42} T_x - A_{43} \frac{\partial w}{\partial t} - A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \right.$$

$$\left. A_{45} T_i \right] N_m dx = 0 \quad m=i,j$$

(۲۲)

برای اعمال فشار، برش و درجه حرارت متغیر در جهت طول استوانه، بارهای وارد بر هر جزء به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$P_z^{(e)}(x,t) = (1-s)P_{zi}(t) + sP_{zj}(t) = \langle N \rangle \{P_z\}^{(e)} \quad (23)$$

$$P_x^{(e)}(x,t) = (1-s)P_{xi}(t) + sP_{xj}(t) = \langle N \rangle \{P_x\}^{(e)} \quad (24)$$

$$T_i^{(e)}(x,t) = (1-s)T_{ii}(t) + sT_{ij}(t) = \langle N \rangle \{T_i\}^{(e)} \quad (25)$$

با قراردادن معادلات فوق در معادلات (۲۲) و استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء برای تبدیل به شکل کاهش یافته، معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$[B_1] \{u\} + [B_2] \{w\} + [B_3] \{\dot{w}\} + [B_4] \{T_x\} + [B_5] \{T_y\} + [B_6] \{T_z\} = [B_7] \{P_z\} + \{B_8\}$$

نظر گرفته شده برای این پارامترها استفاده می‌گردد. بدین معنا که از توابع تقریب استفاده شده مشتق گرفته و با توجه به معلوم بودن ضرایب این توابع برحسب پارامترهای گرهی، مقدار مشتق محاسبه می‌گردد. (البته در گره‌های مشترک بین دو جزء مقدار بدست آمده از دو جزء میانگین‌گیری می‌شود). به عنوان مثال برای محاسبه M_x در گره n در یک زمان مشخص t احتیاج به مقدار $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ می‌باشد. مقدار $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ در گره n با استفاده از توابع تقریب اجزاء $n-1$ و n از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_n = 3\left(\frac{L}{l}\right)^2 w_{n-1} + \left(\frac{L}{l}\right) \theta_{n-1} - 6\left(\frac{L}{l}\right)^2 w_n + 3\left(\frac{L}{l}\right)^2 w_{n+1} - \left(\frac{L}{l}\right) \theta_{n+1}$$

نتایج

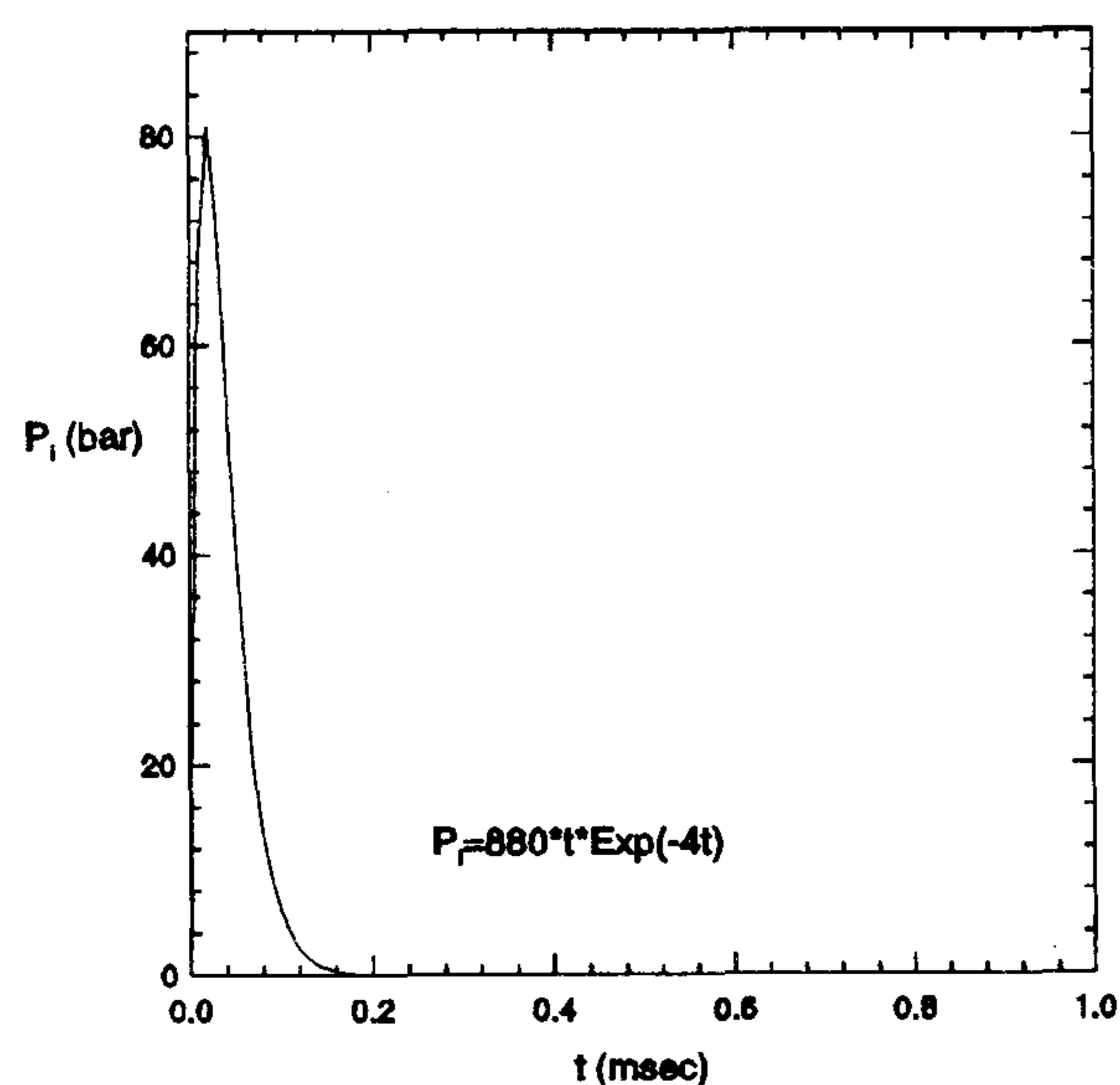
در این بخش یک پوسته استوانه‌ای دو سر گیردار تحت شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. اشکال (۲) تا (۵) منحنی‌های بارهای وارده بر پوسته استوانه‌ای می‌باشند که به طور مجزا مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مشخصاتی که برای این استوانه در نظر گرفته شده است به صورت زیر می‌باشد:

$$R = 0.1085 \text{ m}, \quad L = 0.4 \text{ m}, \quad h = 2 \text{ mm}$$

$$E = 200 \text{ GPa}, \quad \alpha = 11/8 \times 10^{-6} \frac{1}{K}, \quad \nu = 0.3$$

$$\rho = 8000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, \quad K = 50 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \quad T_a = 300 \text{ K}$$

$$C = 500 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}, \quad h_i = h_o = 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$



شکل ۲: منحنی شوک فشار اعمال شده در مثال ۱.

معادلات کلی دارای عبارت شتاب نبوده و در نتیجه عناصر ماتریس جرم سطرهای متناظر همگی صفر می‌باشند. در نتیجه از این معادله نمی‌توان برای محاسبه شتاب اولیه متناظر پارامترهای T_0 ، T_1 و T_2 استفاده کرد. همچنین وجود این سطرهای صفر در ماتریس جرم موجب صفر شدن دترمینان ماتریس جرم کل سیستم و عدم امکان حل معادلات برای محاسبه شتاب اولیه پارامترهای w ، θ و u می‌گردد. برای رفع این مشکل ابتدا سطرهای متناظر معادله انرژی از کل دستگاه معادلات حذف می‌گردد تا معادلات از حالت منفرد خارج گردیده و بتوان مقادیر شتاب اولیه پارامترهای w ، θ و u را بدست آورد.

برای محاسبه شتاب اولیه پارامترهای T_0 ، T_1 و T_2 ابتدا احتیاج به دانستن سرعت اولیه آنها می‌باشد، زیرا با توجه به اینکه معادله دیفرانسیل انرژی از مرتبه اول می‌باشد نمی‌توان تغییر مکان و سرعت در لحظه اولیه را دلخواه فرض کرد. بلکه این دو به یکدیگر وابسته بوده و باید با توجه به معادله دیفرانسیل حاکمه و فرض معلوم بودن یکی از آنها دیگری را محاسبه کرد. با توجه به این مطلب ابتدا می‌بایست دستگاه معادلات زیر که همان معادله انرژی می‌باشد برای لحظه صفر حل گردد:

$$[C]\{d\} + [K]\{d\} = \{F\} \Rightarrow [C]\{d\} = \{F\} - [K]\{d\}$$

البته در رابطه فوق $\{d\}$ فقط شامل پارامترهای T_0 ، T_1 و T_2 می‌باشد و متناظر با آن $[C]$ ، $[K]$ و $\{F\}$ نیز فقط شامل ضرایب بدست آمده از معادله انرژی می‌باشند. برای بدست آوردن شتاب اولیه پارامترهای T_0 ، T_1 و T_2 احتیاج است تا از معادله فوق یکبار مشتق گرفته شود تا عبارت شتاب در معادله ظاهر گردد. آنگاه با استفاده از رابطه بدست آمده و مقدار سرعت اولیه بدست آمده، مقدار شتاب اولیه پارامترهای T_0 ، T_1 و T_2 نیز بدست می‌آیند. در استفاده از روش نیومارک، پارامترهای β و γ که مشخصه‌های دقت و پایداری می‌باشند، بر اساس روش شتاب متوسط انتخاب می‌گردند، یعنی:

$$\beta = \frac{1}{4}; \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

همزمان با بدست آوردن پارامترهای گرهی w ، θ ، u ، T_0 ، T_1 و T_2 در زمان‌های مختلف می‌بایست نیروها، گشتاورها (در واحد طول) و تنش‌های طولی و محیطی نیز محاسبه گردند. برای این منظور می‌بایست مشتقات پارامترهای گرهی مورد نیاز نیز محاسبه گردد.

برای محاسبه مشتقات پارامترهای گرهی از توابع تقریب در

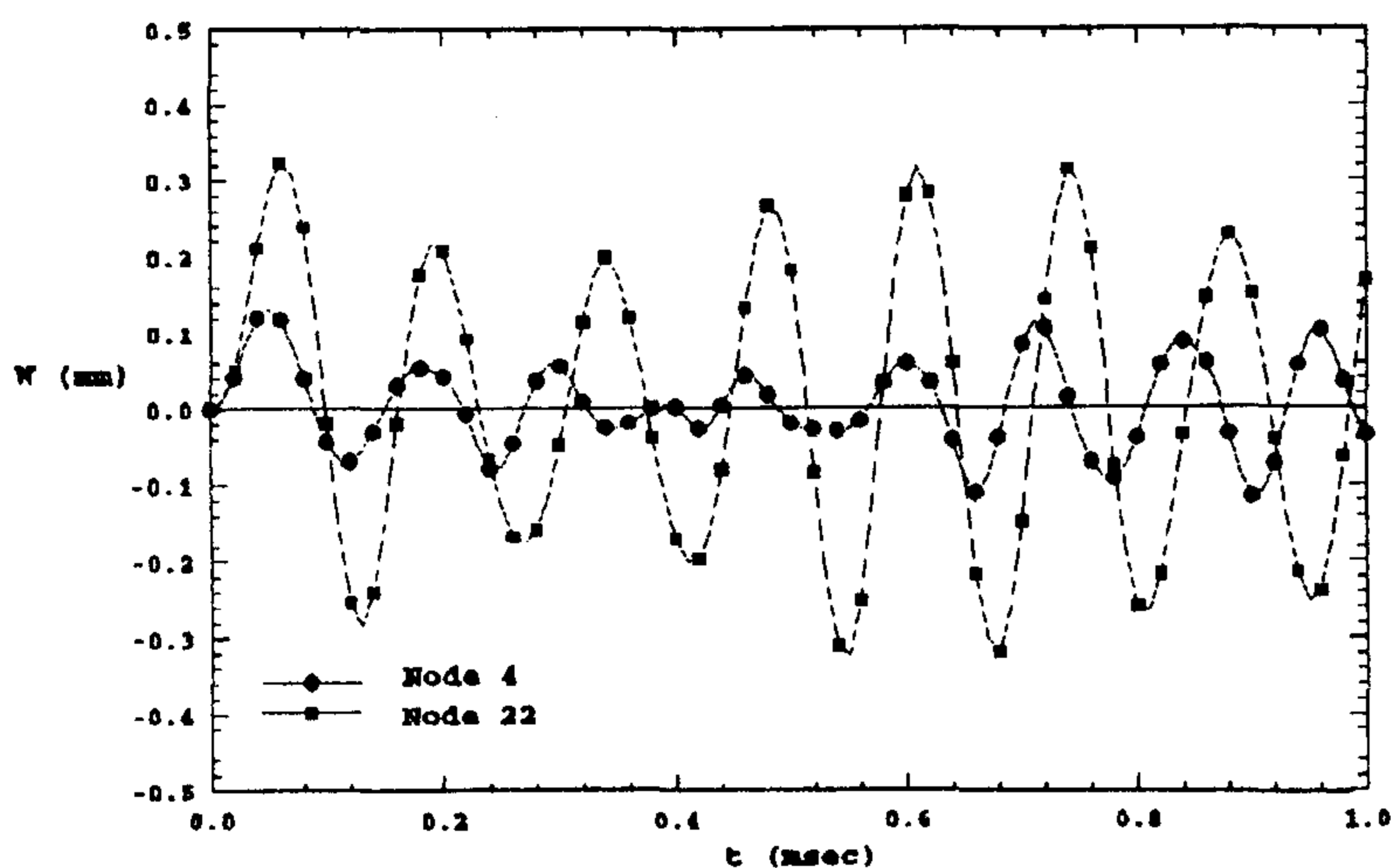
شوک فشار یکنواختی به معادله زیر باشد بررسی می‌شود:

$$P_z(\bar{t}) = 80 \bar{t} \text{Exp}(-4\bar{t})$$

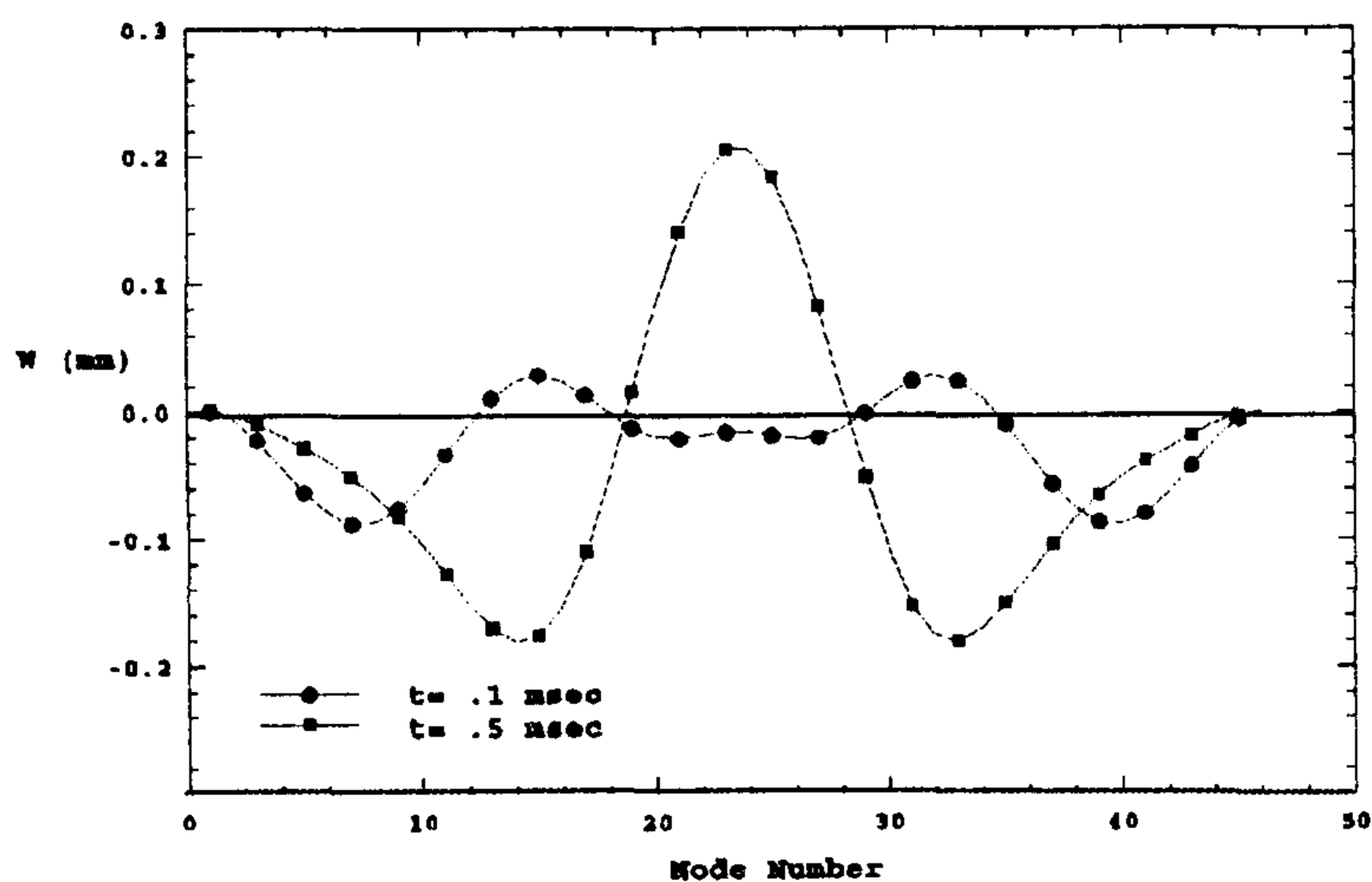
که در آن فشار برحسب بار و \bar{t} زمان بی بُعد می‌باشد که به صورت زیر با زمان بُعددار رابطه دارد:

$$\bar{t} = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

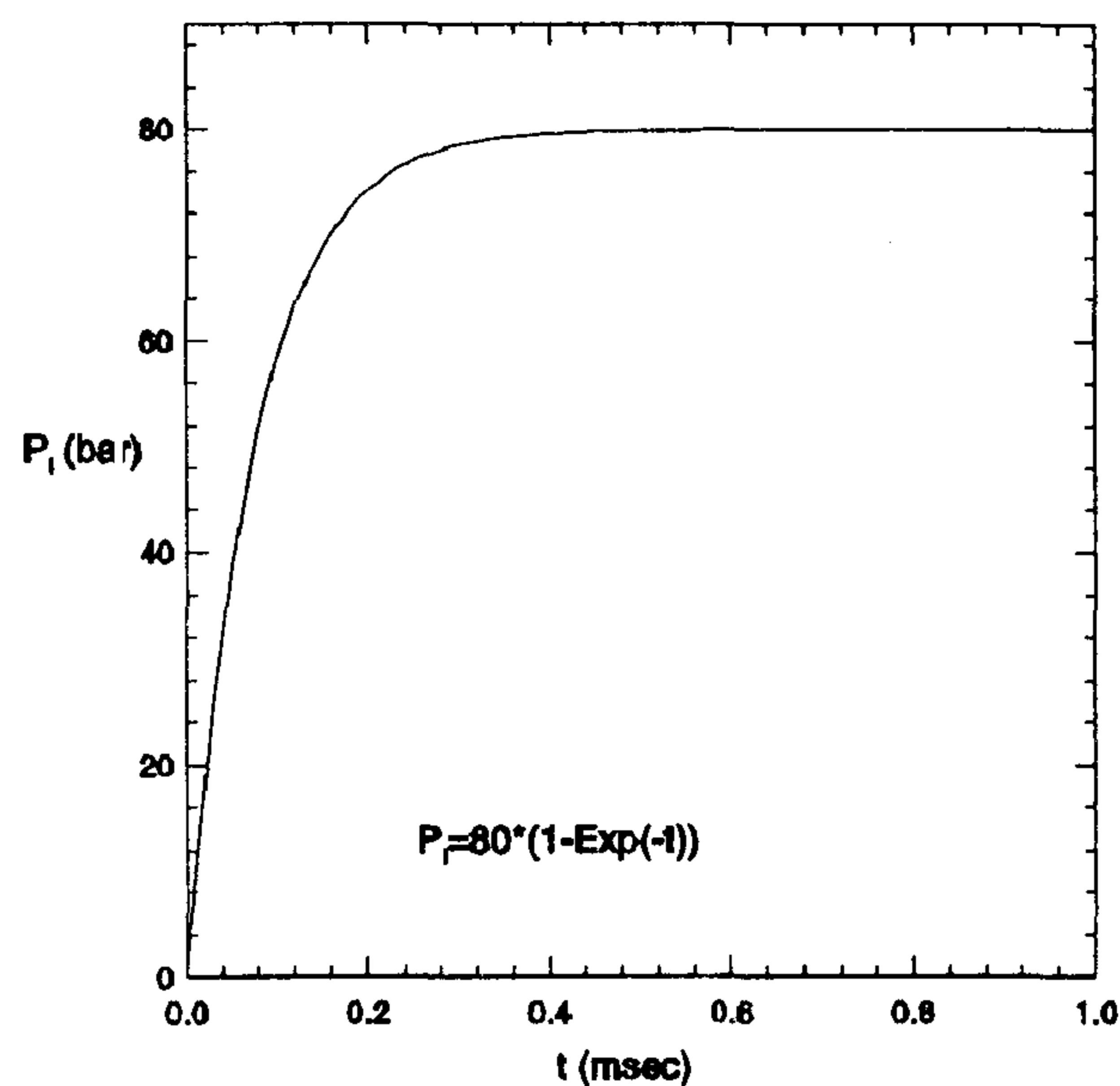
شکل (۲) نمودار تغییرات شوک مذکور را بر حسب زمان نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل مشهود است، فشار داخل استوانه در مدت زمان ۰/۰۲ میلی ثانیه به ماکزیمم مقدار خود یعنی ۸۰ bar رسیده و سپس تا مقدار صفر کاهش می‌یابد. محاسبات برای مدت زمان ۱ میلی ثانیه و باگام زمانی ۰/۰۱ میلی ثانیه انجام گرفته است. تعداد اجزای به کار رفته در طول استوانه ۴۵ عدد می‌باشد.



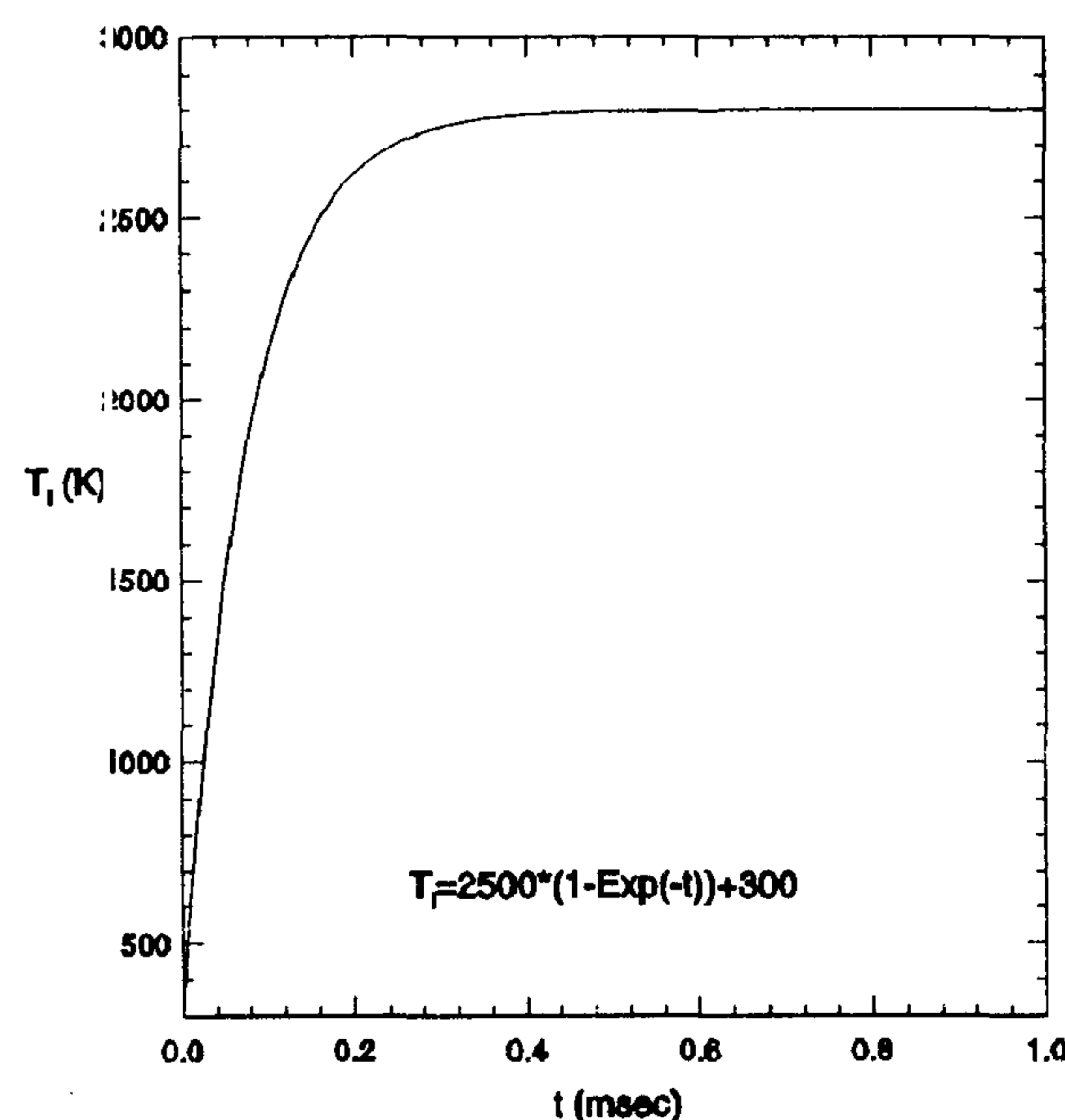
شکل ۶: نمودار تغییرات w در گره‌های ۴ و ۲۲ بر حسب زمان (مثال ۱).



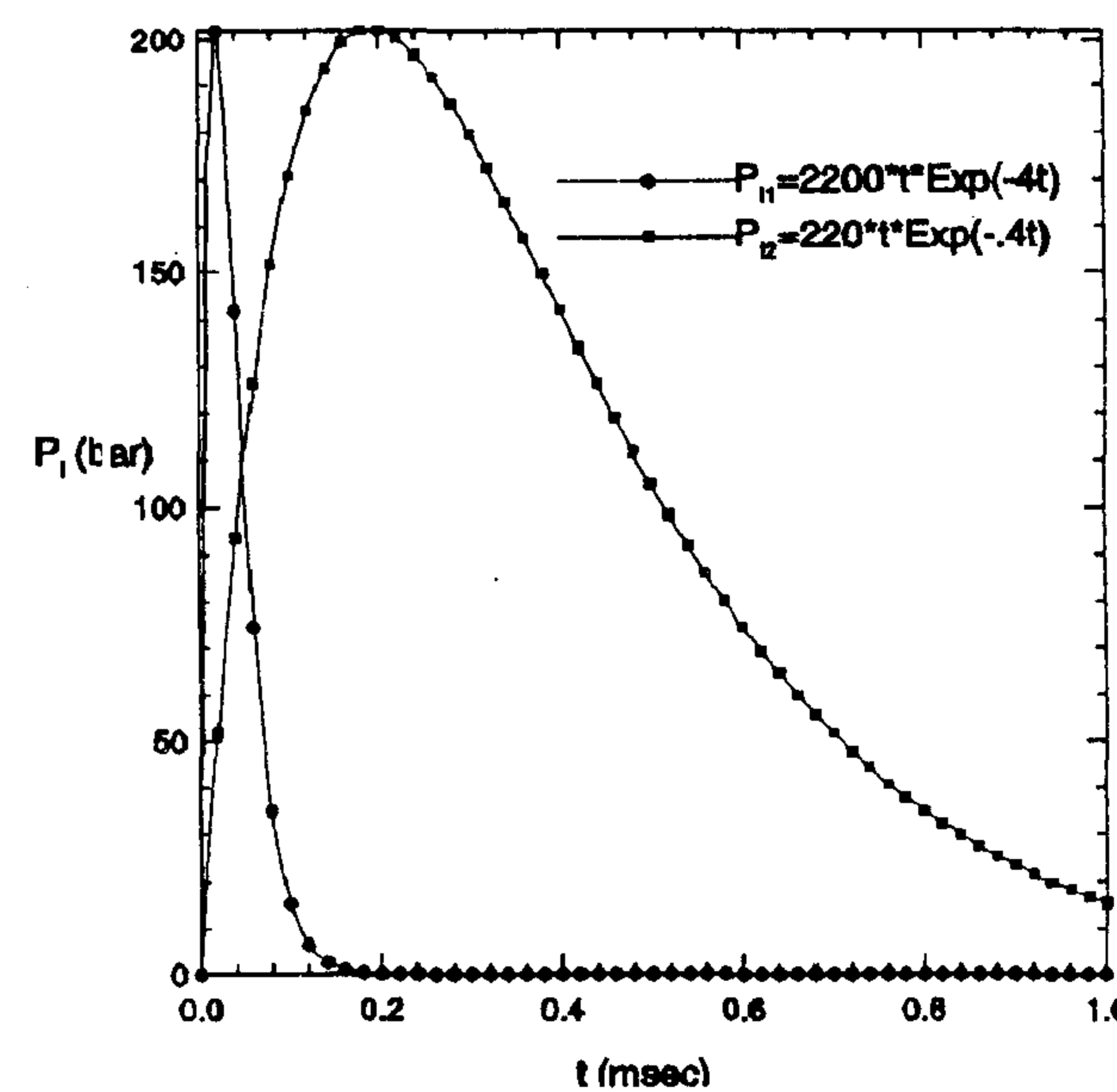
شکل ۷: نمودار تغییرات w در امتداد استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی ثانیه (مثال ۱).



شکل ۳: منحنی شوک فشار اعمال شده در مثال ۲

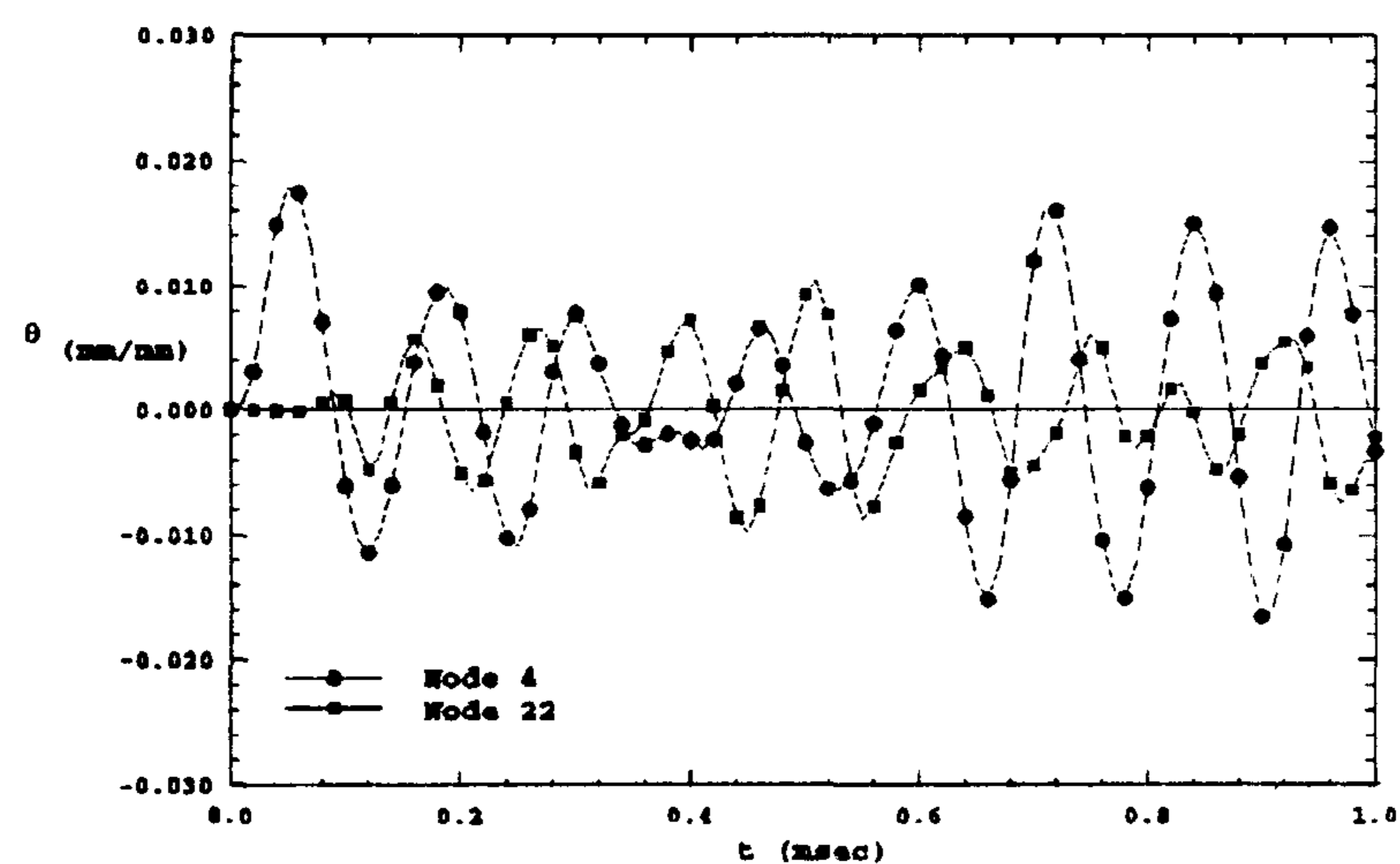


شکل ۴: منحنی شوک حرارت اعمال شده در مثال ۳.

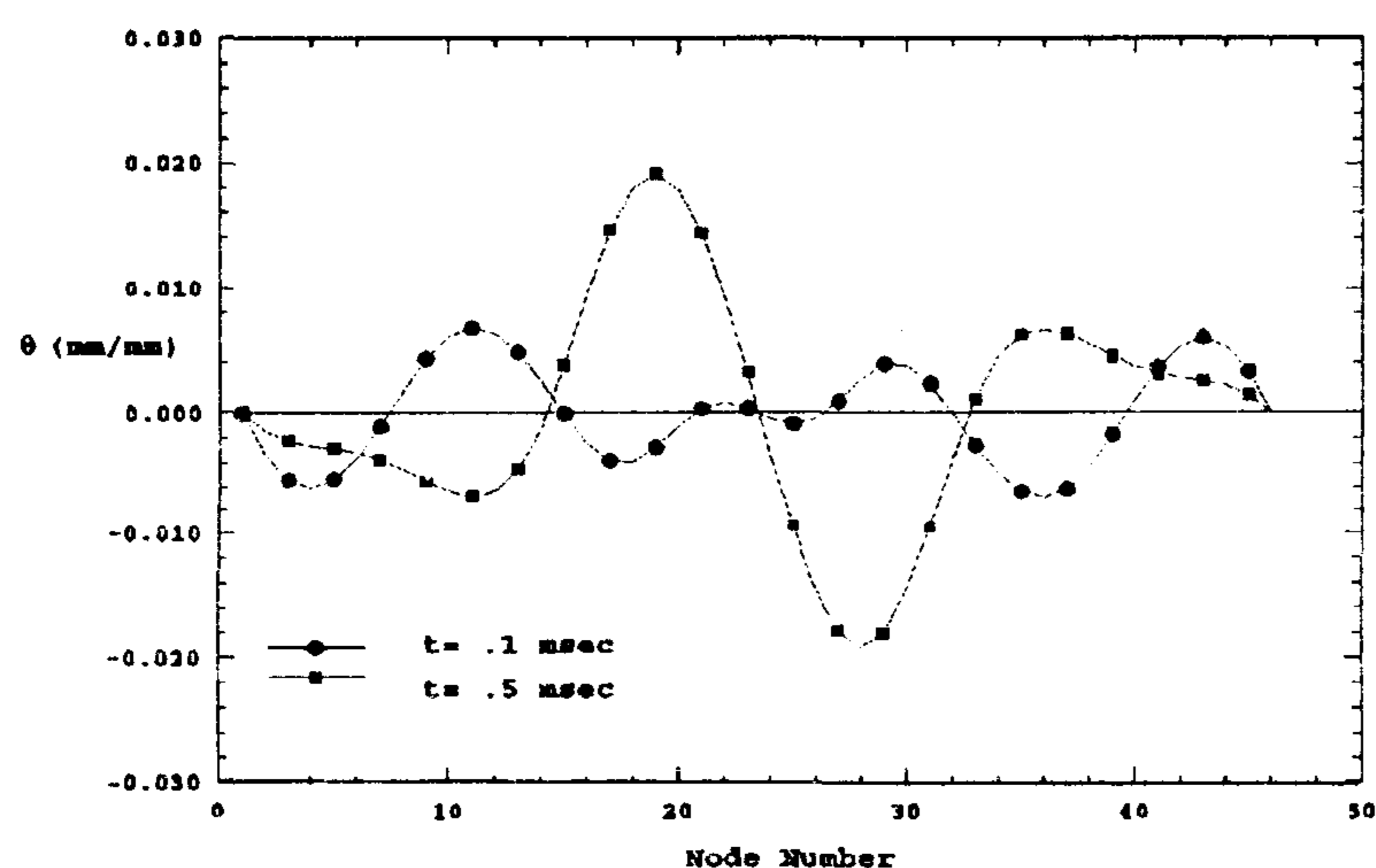


شکل ۵: منحنی‌های شوک‌های فشار اعمال شده در مثال ۴.

مثال ۱ - ابتدا مسئله برای حالتی که داخل استوانه در معرض



شکل ۱۰: نمودار تغییرات θ در گره‌های ۴ و ۲۲ بر حسب زمان (مثال ۱)

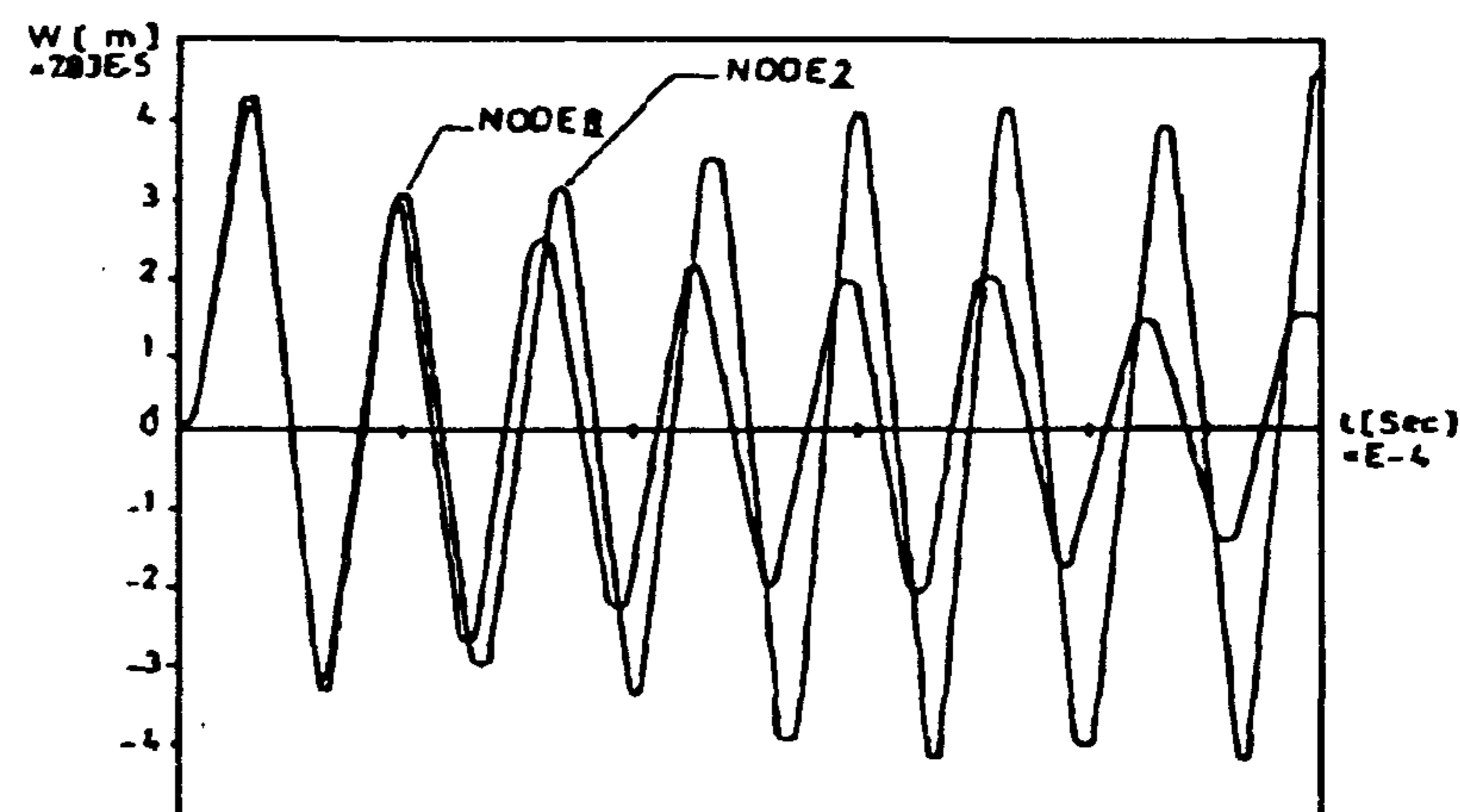


شکل ۱۱: نمودار تغییرات θ در امتداد استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه (مثال ۱)

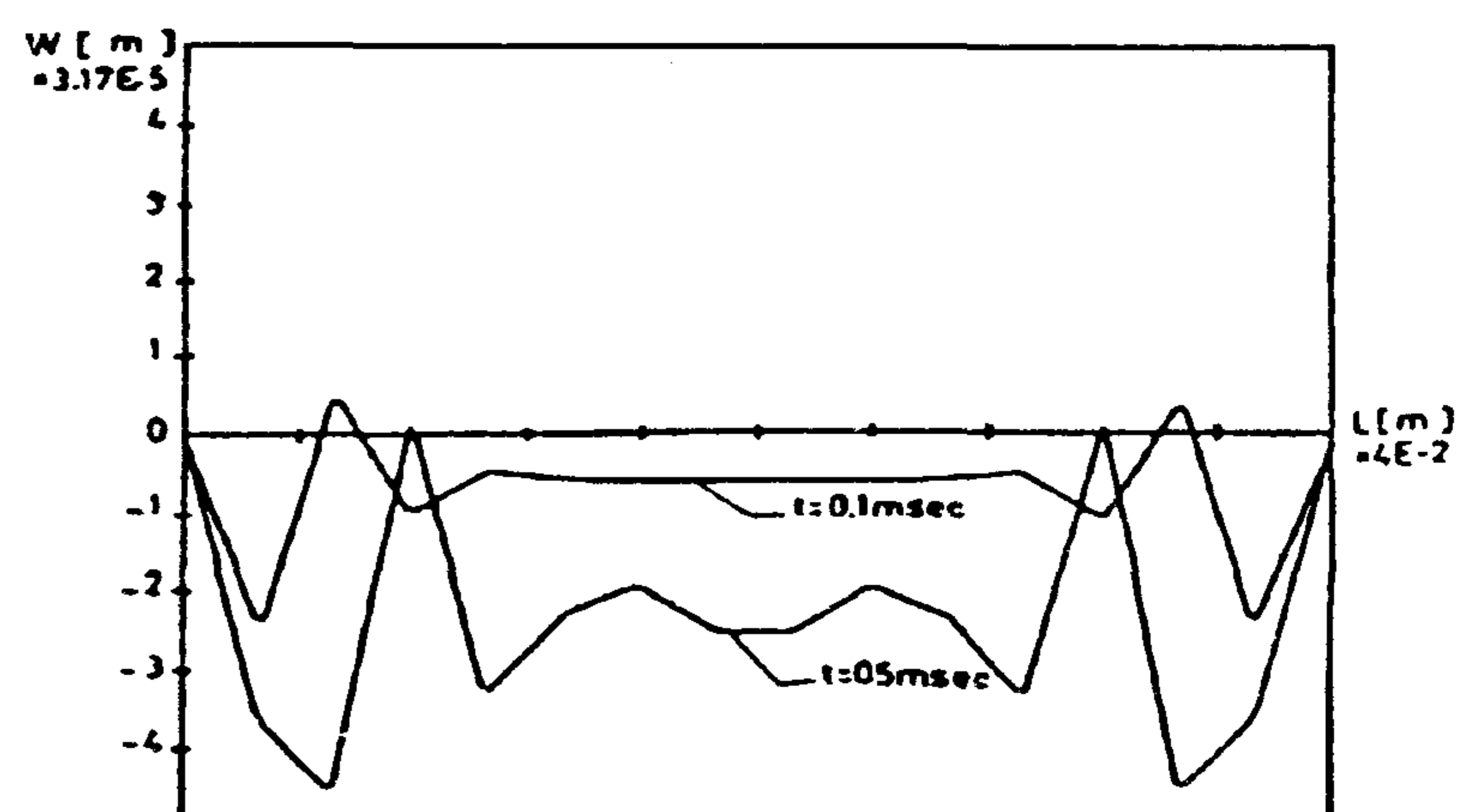
ارتعاش مخزن می‌باشند بدست آید.

ارتعاشات در گره ۲۲ کاملاً منظم ولی در گره ۴ دارای کمی اغتشاش می‌باشد. همچنین با توجه به نزدیک بودن گره ۴ به انتهای استوانه، دامنه تغییر مکان شعاعی آن نسبت به گره ۲۲ کمتر است. شکل (۷) نیز تغییرات W را در امتداد استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه نشان می‌دهد که بیانگر شکل مود ارتعاشی پوسته مورد نظر می‌باشد. با توجه به متقارن بودن شرایط مسئله نسبت به وسط پوسته، منحنی بدست آمده برای W نیز نسبت به وسط استوانه متقارن است.

حل این مسئله بدون در نظر گرفتن اثر تغییر مکان محوری و با تقریب خطی درجه حرارت در جهت ضخامت در مرجع [۱] آورده شده است، که می‌توان مقایسه‌ای نیز با نتایج آن انجام داد. شکل (۸) منحنی تغییر مکان شعاعی در گره‌های ۲ و ۸ بر حسب زمان و شکل (۹) منحنی تغییر مکان شعاعی در طول استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه می‌باشند. تعداد اجزاء استفاده شده در آن



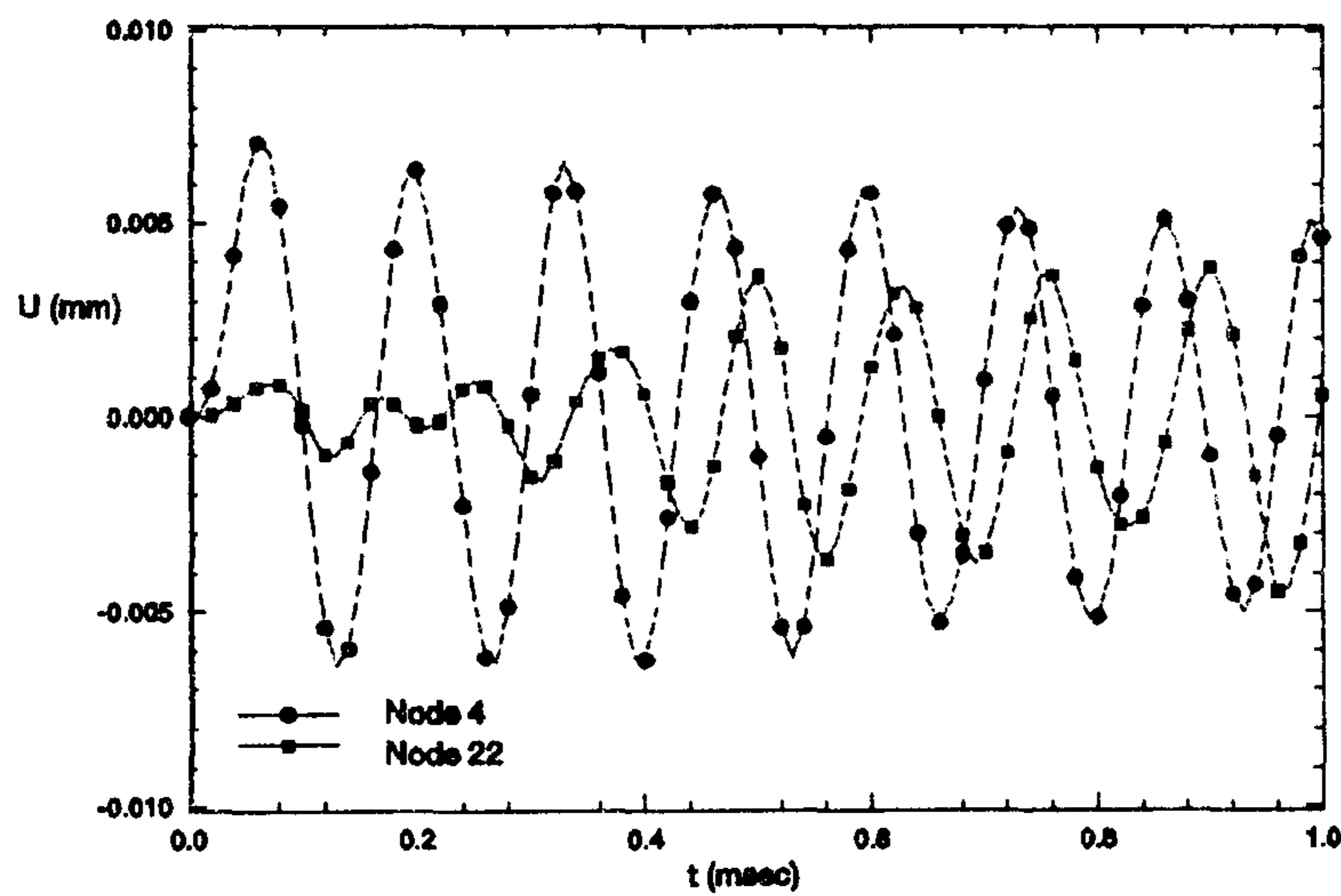
شکل ۸: نمودار تغییرات W در گره‌های ۲ و ۸ بر حسب زمان (مرجع ۱)



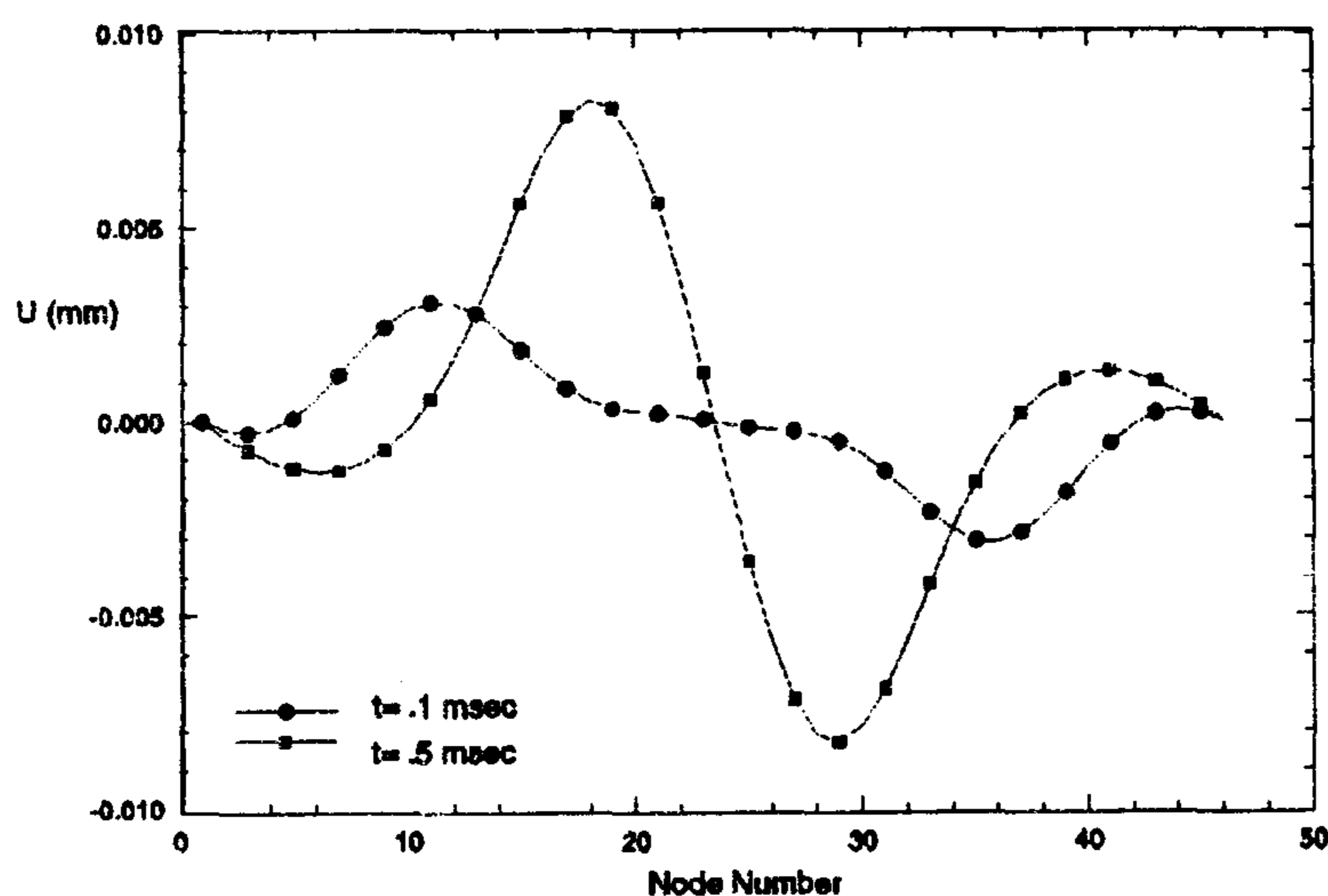
شکل ۹: نمودار تغییرات W در امتداد استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه (مرجع ۱)

شکل (۶) نمودار تغییرات W در گره ۴ و ۲۲ را بر حسب زمان نشان می‌دهد. گره ۴ نزدیک به گره مقید و گره ۲۲ گره نزدیک به وسط استوانه می‌باشد. با استفاده از این شکل می‌توان ارتعاش مخزن را به خوبی مشاهده نمود. مثبت و منفی شدن تغییر مکان و نوسان آن حول صفر به علت اعمال شوک فشار می‌باشد. فاصله زمانی بین دو نقطه ماکزیمم نسبی مجاور روی منحنی گره ۲۲ برابر ۱۴ گام زمانی یا به عبارت دیگر 14×10^{-5} ثانیه می‌باشد. بنابراین فرکانس نوسان W ، 7143 Hz یا $7/1$ نوسان در ۱ میلی‌ثانیه بدست می‌آید که در شکل (۶) نیز مشاهده می‌شود.

محاسبه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای از رابطه $f = \frac{k}{R\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ نیز مقدار فرکانس 7282 Hz را برای مود سوم می‌دهد که نزدیک به فرکانس بدست آمده می‌باشد. منحنی تغییرات W گره ۲۲، مشابه یک منحنی سینوسی می‌باشد که دامنه نوسانات آن نیز خود به صورت سینوسی تغییر می‌کند. این حالت می‌تواند از جمع دو منحنی سینوسی که دو مود غالب در



شکل ۱۲: نمودار تغییرات u در گره‌های ۲ و ۸ بر حسب زمان (مثال ۱).



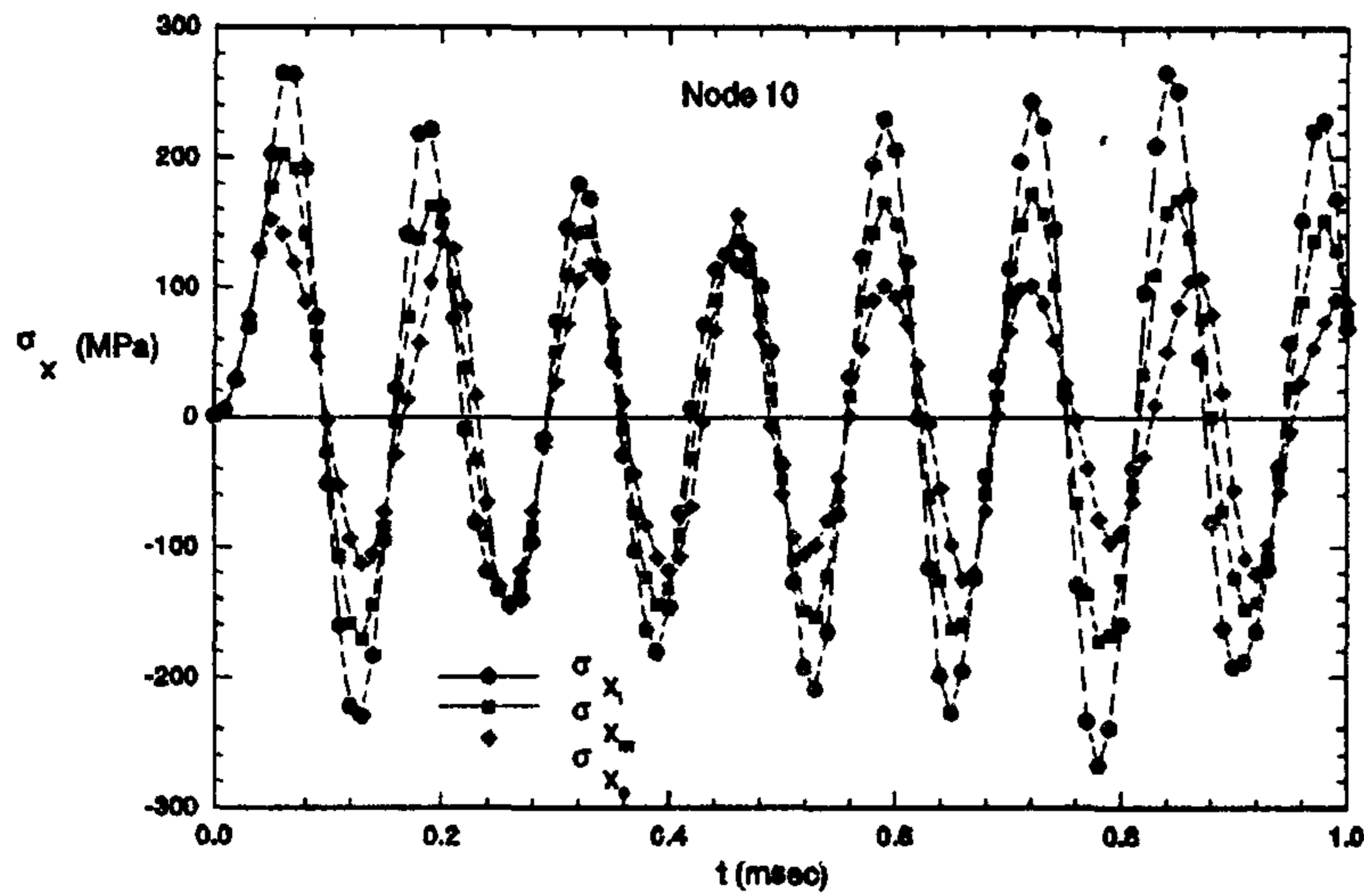
شکل ۱۳: نمودار تغییرات u در امتداد استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه (مثال ۱).

شیب در طول پوسته در دو انتها رخ داده است که صحیح به نظر نمی‌رسد.

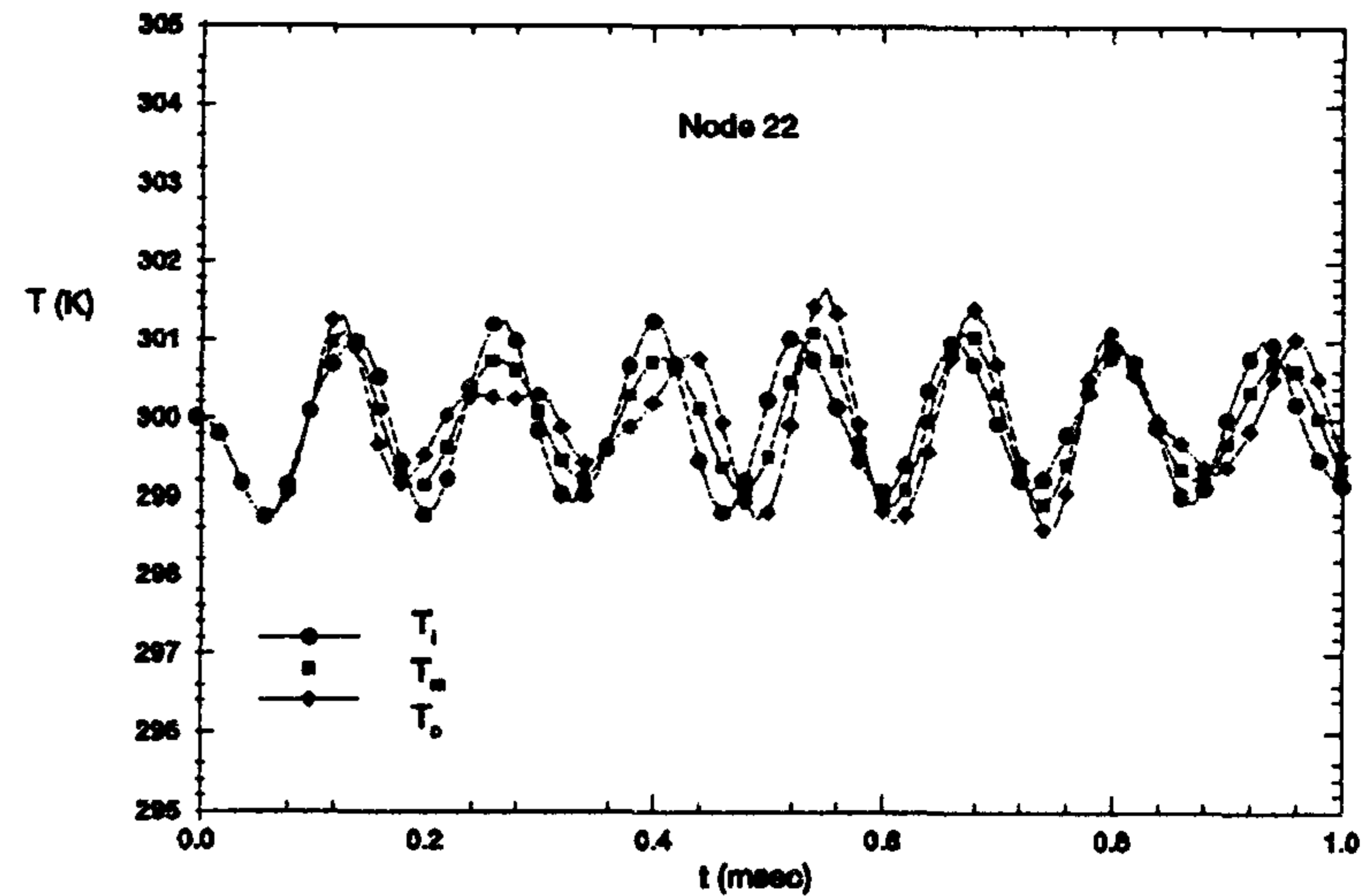
شکل (۱۰) نمودار تغییرات دوران پوسته یا $\theta = \frac{dw}{dx}$ می‌باشد که برای گره‌های ۴ و ۲۲ رسم گردیده است. شکل (۱۱) نیز نمودار تغییرات θ در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه می‌باشد که نسبت به وسط استوانه قرینه است. همچنین ملاحظه می‌گردد که شیب در وسط و دو انتهای استوانه صفر می‌باشد. شکل (۱۲) تغییرات تغییرمکان محوری گره‌های ۴ و ۲۲ را بر حسب زمان نشان می‌دهد. تغییرمکان محوری نسبت به تغییرمکان شعاعی بسیار کمتر و از لحاظ مرتبه حدود میکرومتر می‌باشد، در صورتیکه تغییرمکان شعاعی از مرتبه دهم میلی‌متر می‌باشد. با توجه به تقارن مسئله تغییرمکان محوری وسط استوانه صفر است که این امر موجب کمتر بودن تغییرمکان محوری گره ۲۲ نسبت به گره ۴ می‌باشد. همچنین تغییرمکان محوری نسبت به وسط استوانه پادمتقارن است (شکل ۱۳). تغییرات درجه حرارت سطوح داخلی، میانی و

مرجع، ۱۵ عدد می‌باشد که در نتیجه گره‌های ۲ و ۸ متناظر گره‌های ۴ و ۲۲ در مسائل حل شده در این مقاله خواهد بود. با مراجعه به شکل (۸) مشاهده می‌گردد که منحنی تغییرات w در گره ۲ مشابه منحنی تغییرات w در گره ۲۲ در شکل (۶) می‌باشد. منحنی تغییرات w در گره ۸ نیز به صورت نوسانی منظم بوده که در پریود اول تقریباً منطبق بر گره ۲ و در پریودهای بعدی به سرعت کاهش یافته است، به طوری که بعد از ۱ میلی‌ثانیه دامنه نوسانات آن حدوداً ۱/۳۶ میلی‌متر می‌باشد که در گره ۲ و در زمان ۱ میلی‌متر اتفاق افتاده است. با توجه به اینکه گره ۲ مجاور گره ۱ بوده و گره ۱ نیز گرهی است که هم تغییرمکان w آن و هم دوران آن مقید شده است، بعید به نظر می‌رسد که تغییرمکان آن نسبت به گره ۸ که در وسط استوانه قرار داشته و از دو انتهای استوانه بیشترین فاصله را دارد، بیشتر باشد. گره ۲ با توجه به اینکه دوران گره ۱ مقید شده است می‌بایست دارای تغییرمکان شعاعی کمی باشد که در منحنی‌های شکل (۶) (گره ۴) این مطلب مشاهده می‌گردد. علاوه بر آن در معادلاتی که برای حل مسئله استخراج شد و شامل معادله تعادل و معادله انرژی بود، عبارت استهلاک سازه‌ای در معادله تعادل ظاهر نگردید. بنابراین با توجه به عدم وجود استهلاک سازه‌ای در مسئله، کاهش دامنه تغییرات w در گره ۸ بر حسب زمان با سرعتی که در شکل (۸) از مرجع [۱] دیده می‌شود سؤال برانگیز است.

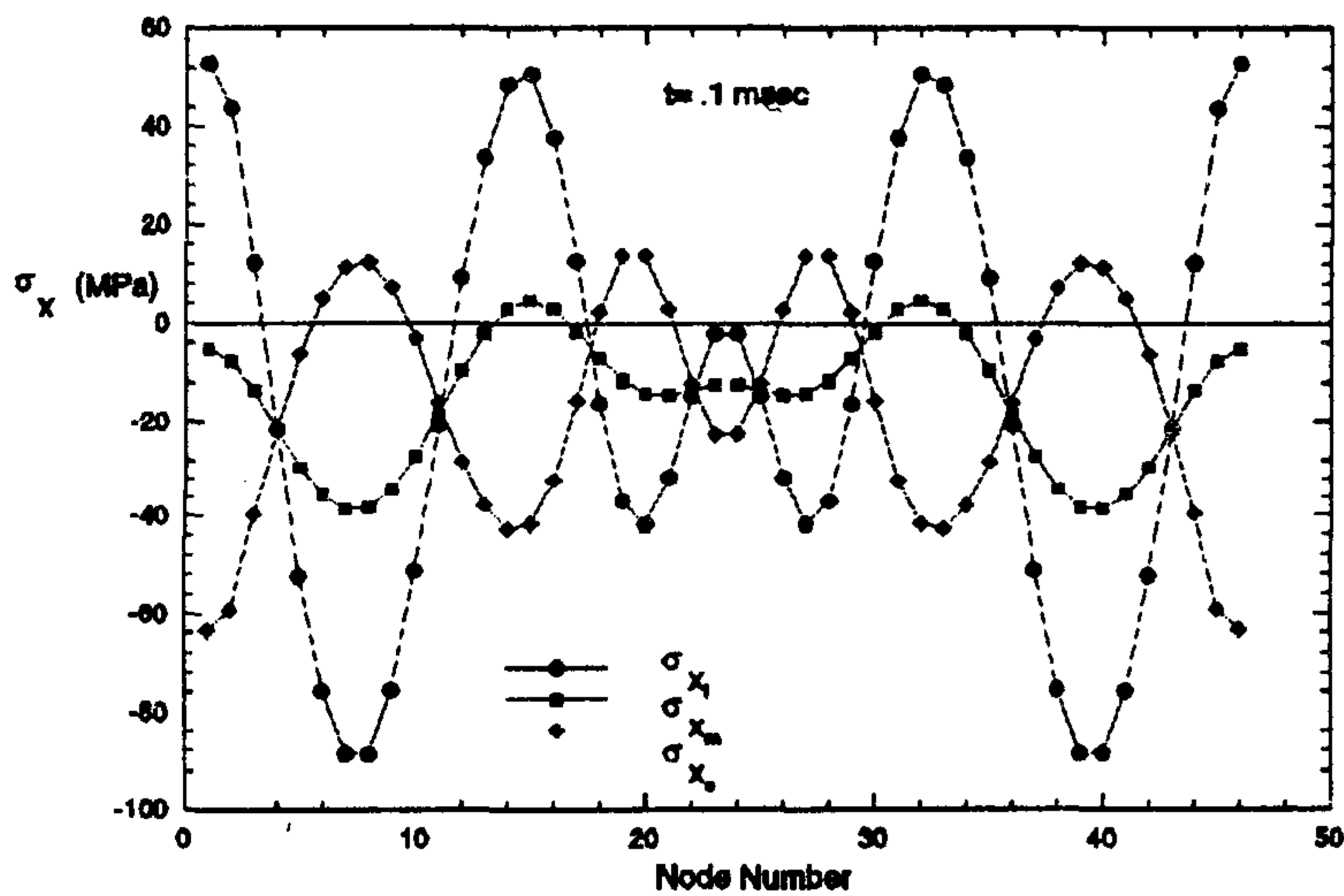
منحنی‌های شکل (۹) نیز با منحنی‌های شکل ۷ که برای w در طول استوانه در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۵ میلی‌ثانیه ارائه شده است، تفاوت داشته و تعداد نوساناتی که در پوسته نشان داده شده بیشتر می‌باشد. حداکثر مقداری که برای w در زمان ۰/۵ میلی‌ثانیه در شکل (۹) ارائه شده است ۰/۱۵ میلی‌متر می‌باشد که آن نیز در گره ۳ اتفاق افتاده است. شکل (۹) شیب زیادی را در دو انتهای استوانه نشان می‌دهد و تغییرمکانی که برای گره ۲ ارائه کرده است در زمان ۰/۱ میلی‌ثانیه بیشترین و در زمان ۰/۵ میلی‌ثانیه بعد از گره ۳ بیشترین تغییرمکان در طول استوانه می‌باشد، در صورتیکه گره ۲ مجاور گره مقید ۱ قرار دارد که درجات آزادی w و θ آن گرفته شده است و قاعدتاً می‌بایست شیب در دو انتهای استوانه صفر باشد. البته بدلیل اینکه از روش اجزاء محدود استفاده شده است و تعداد اجزاء به کار رفته کم می‌باشد، مقدار شیب برابر صفر نخواهد بود، لیکن چندان هم نباید اختلاف داشته باشد. در شکل (۷) به خصوص در لحظه ۰/۵ میلی‌ثانیه مشخص است که شیب منحنی تمایل به صفر بودن دارد، ولیکن در منحنی شکل (۹) بیشترین



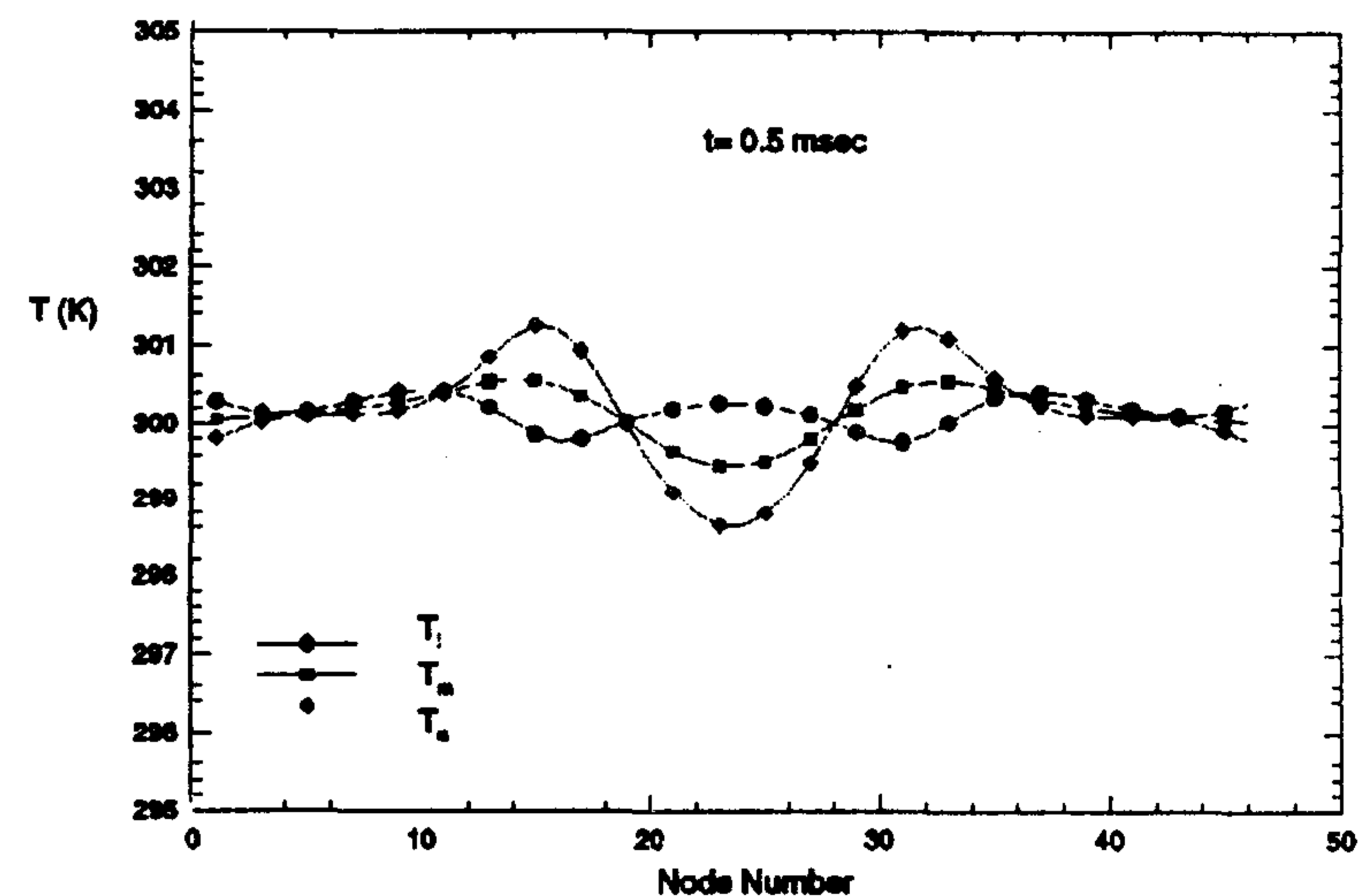
شکل ۱۶: تغییرات σ_x در سطوح داخل، وسط و خارجی استوانه در گره ۱۰ (مثال ۱).



شکل ۱۴: تغییرات درجه حرارت سطوح داخلی، میانی و خارجی استوانه در گره ۲۲ (مثال ۱).



شکل ۱۷: تغییرات σ_x در سطوح داخل، وسط و خارجی استوانه در زمان ۱/۰ میلی ثانیه (مثال ۱).



شکل ۱۵: تغییرات درجه حرارت سطوح داخلی، میانی و خارجی استوانه در زمان ۰/۵ میلی ثانیه (مثال ۱).

توجه به چندین برابر بودن N_θ نسبت به N_x و M_x نسبت به M_θ ، ملاحظه می‌گردد که تفاوت مقادیر σ_θ در سطوح مختلف پوسته کمتر از تفاوت مقادیر σ_x در سطوح مختلف می‌باشد. حداکثر مقادیر تنش محیطی σ_θ در گره ۱۰ برابر ۷۱۸ MPa و در زمان ۰/۶ میلی ثانیه می‌باشد. در صورتیکه تنش محیطی از رابطه ساده $\frac{PR}{t}$ محاسبه گردد، مقدار آن ۴۳۴ MPa بدست می‌آید. این مقایسه نشان‌دهنده اثر بارگذاری دینامیکی در توزیع تنش قطعه و صحیح نبودن مقادیر حاصل از تحلیل استاتیک در بارگذاری‌های دینامیکی می‌باشد. در این مثال نسبت حداکثر تنش دینامیکی به تنش استاتیکی ۱/۶۵ می‌باشد.

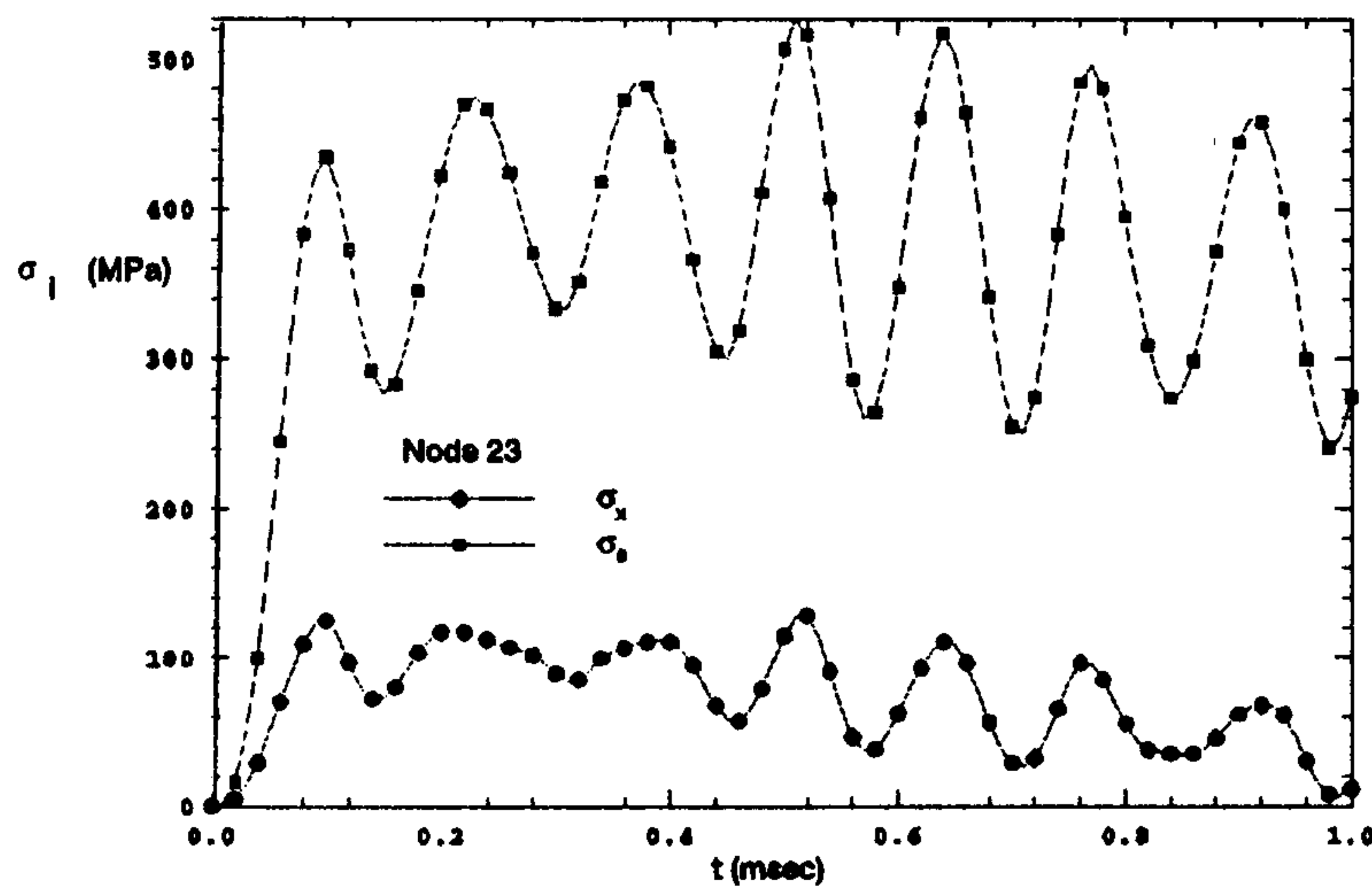
علاوه بر نمودارهای تغییرات $w, \theta, u, T, \sigma_x$ و σ_θ منحنی تغییرات $M_x, M_\theta, N_x, N_\theta, Q_x$ نیز بدست آمده که در اینجا از آوردن آنها خودداری شده است [۸].

مثال ۲ - مسئله ترموالاستیسیته وابسته برای این پوسته استوانه‌ای برای حالتی که شوک فشاری به معادله

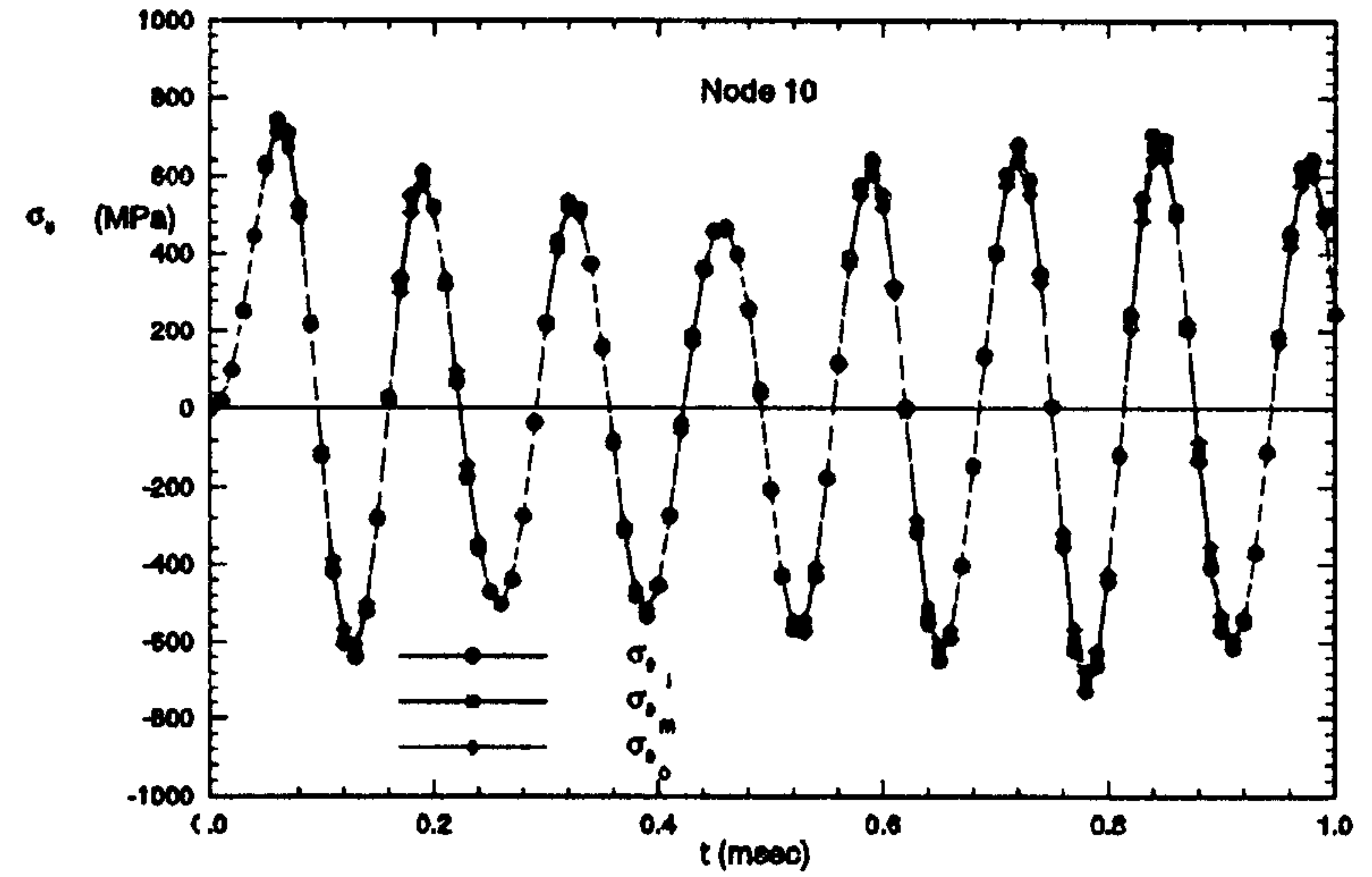
خارجی استوانه در گره ۲۲ نیز در شکل (۱۴) ترسیم شده است. این منحنی دقیقاً نشان دهنده اثر عبارت وابسته ساز E_{kk} در معادله انرژی می‌باشد. زیرا در این مسئله هیچگونه تولید حرارت و انتقال حرارتی وجود نداشته و بنابراین انحراف درجه حرارت پوسته از درجه حرارت اولیه فقط متأثر از اثرات میدان تغییر مکان بر درجه حرارت یا به عبارت بهتر نرخ کرنش بر درجه حرارت می‌باشد. شکل (۱۵) نیز بیانگر توزیع درجه حرارت سطوح داخلی، میانی و خارجی استوانه در زمان ۰/۵ میلی ثانیه می‌باشد.

شکل (۱۶) نمودار تغییرات σ_x در سطوح داخل، وسط و خارج گره ۱۰ را نشان می‌دهد. مطابق این نمودار، نوسانات σ_x منظم و در سطح داخل، وسط و خارج به صورت یکنواخت تغییر کرده است به طوریکه در هر نقطه می‌توان تنش سطح میانی را میانگین تنش در سطوح داخل و خارج در نظر گرفت. شکل (۱۷) مقدار σ_x را در سرتاسر استوانه در زمان ۰/۱ میلی ثانیه ارائه می‌دهد.

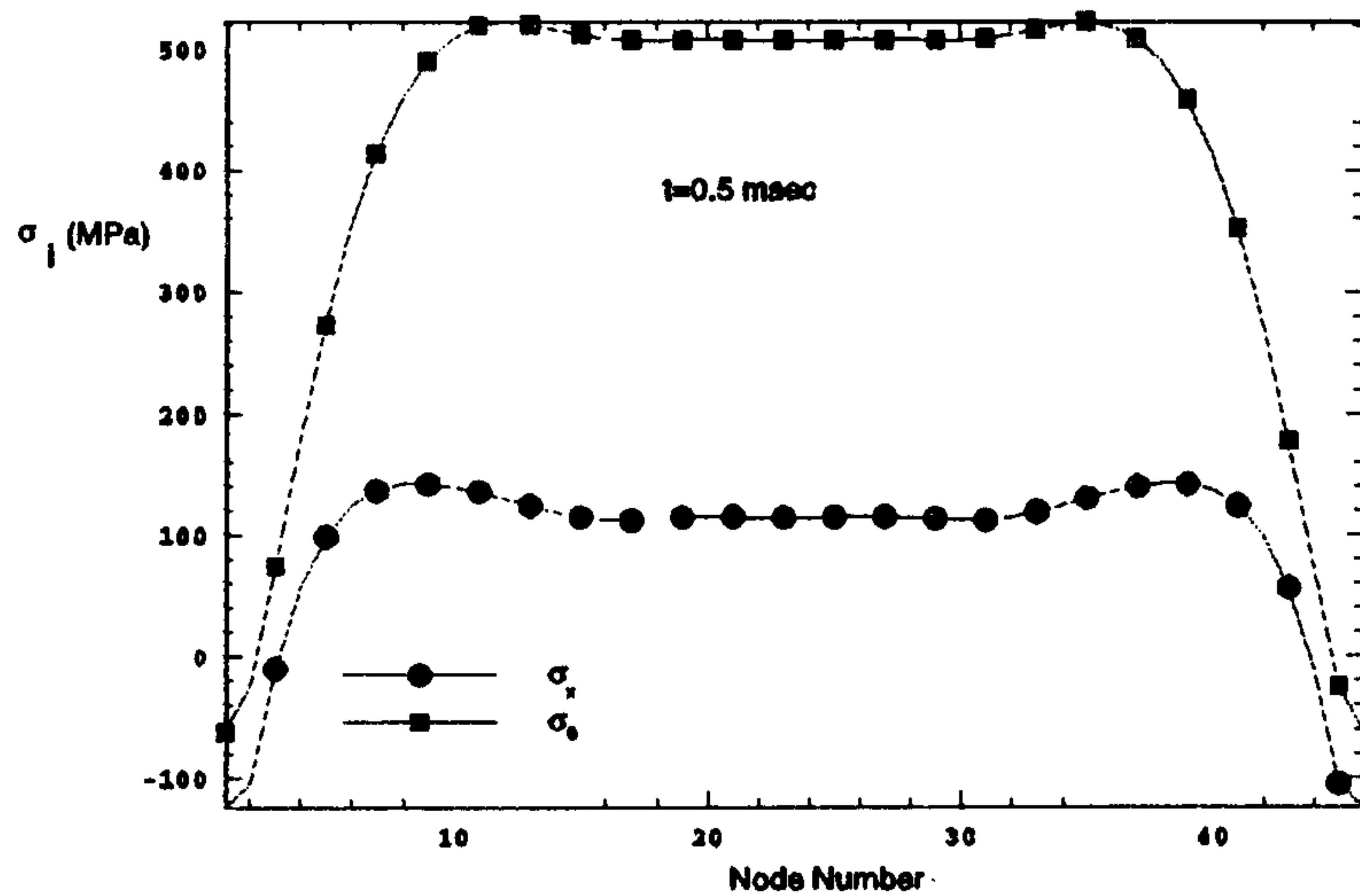
اشکال (۱۸) و (۱۹) نیز نمودارهای مربوط به σ_θ می‌باشند. با



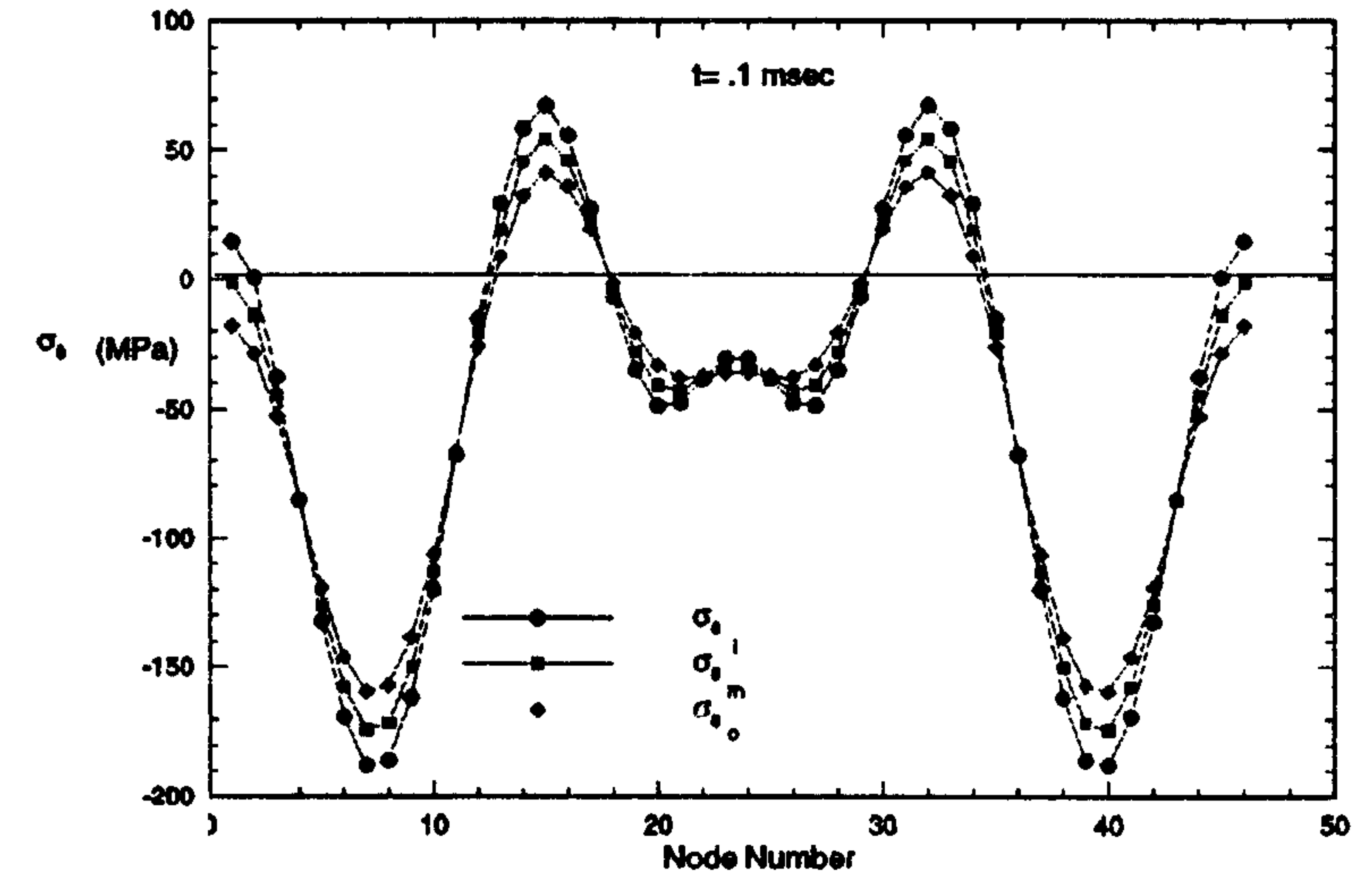
شکل ۲۰: منحنی تغییرات σ_θ و σ_x در سطح داخلی استوانه در گره ۲۳ (مثال ۲).



شکل ۱۸: تغییرات σ_θ در سطوح داخل، وسط و خارجی استوانه در گره ۱۰ (مثال ۱).



شکل ۲۱: منحنی توزیع تنش‌های σ_θ و σ_x در سطح داخلی استوانه در لحظه ۰/۵ میلی ثانیه (مثال ۲).

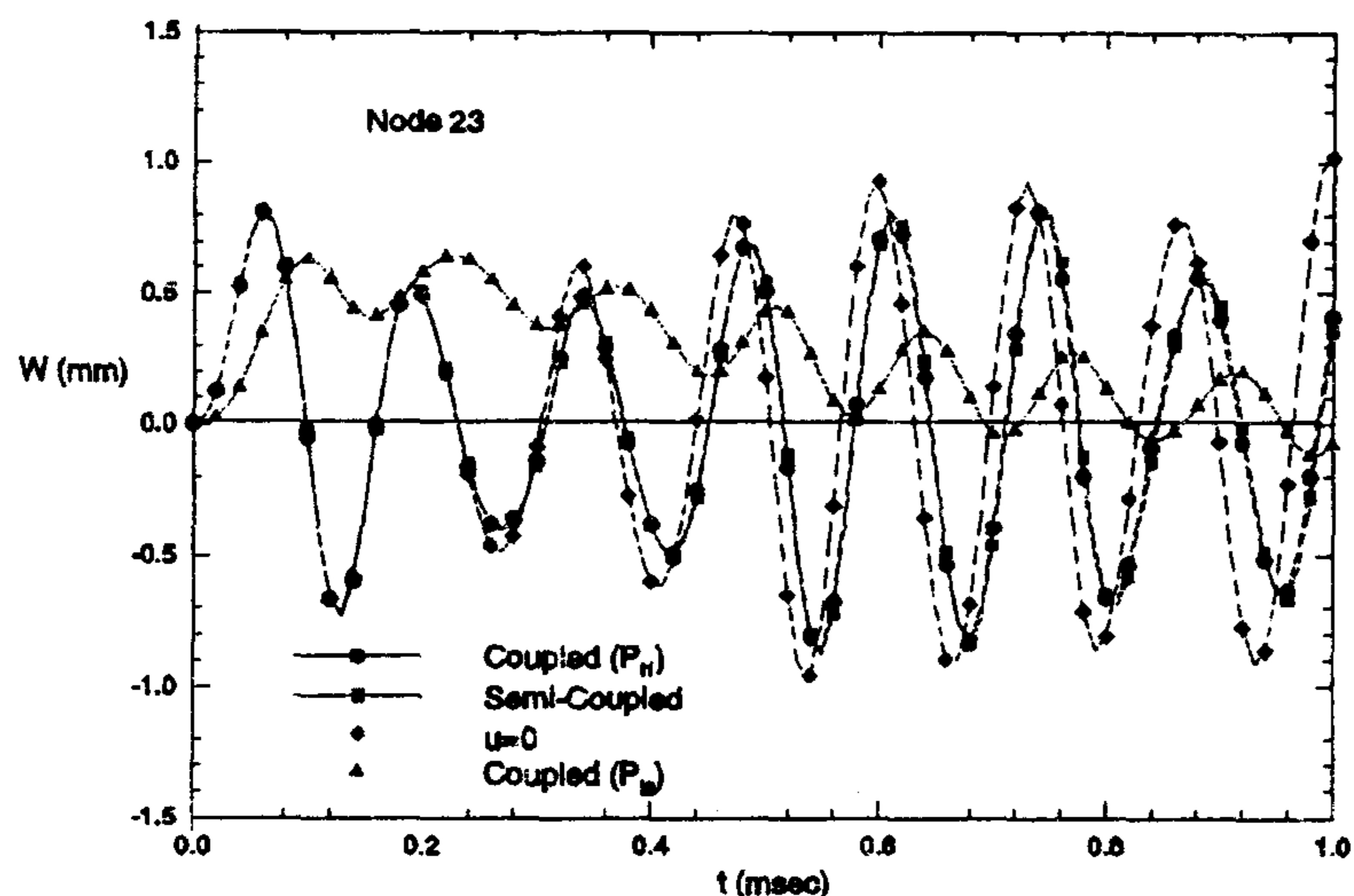


شکل ۱۹: تغییرات σ_θ در سطوح داخل، وسط و خارجی استوانه در زمان ۰/۱ میلی ثانیه (مثال ۱).

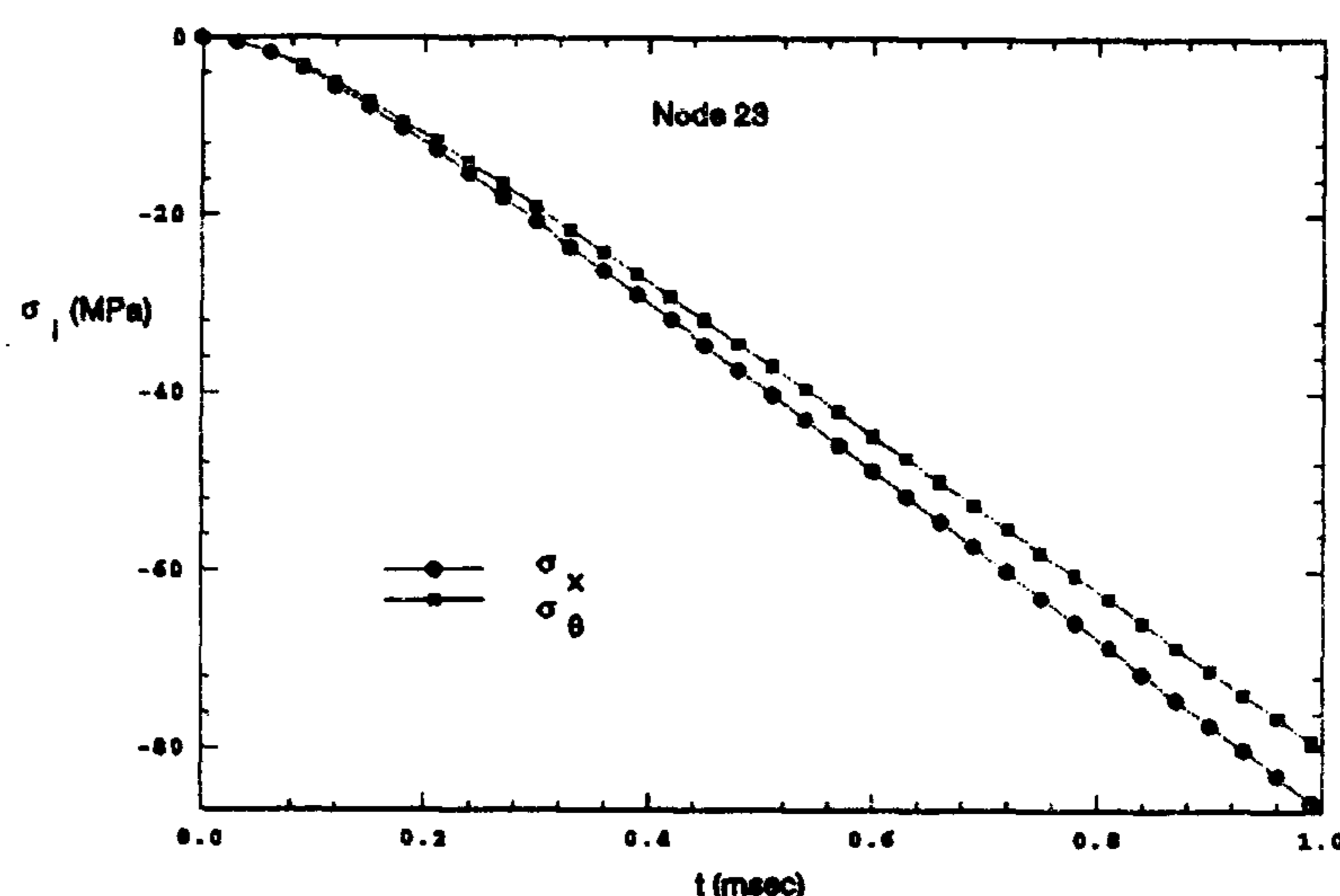
داخلی برمی‌گردد بدین معنا که در حالت قبل مدت زمان رسیدن فشار داخلی به حداکثر مقدار، ۰/۰۲ میلی ثانیه و در این حالت ۰/۳ میلی ثانیه می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت قبل این زمان نسبت به این حالت از مرتبه کمتری است، طبیعت دینامیکی بودن بارگذاری در آن حالت بیشتر بوده و در نتیجه میزان انحراف از مقدار استاتیکی بیشتر می‌باشد. شکل (۲۱) منحنی‌های σ_θ و σ_x در طول استوانه در لحظه ۰/۵ میلی ثانیه می‌باشد. مطابق این شکل، قسمت عمده‌ای از ناحیه وسط استوانه دارای تنش یکسانی است که با نزدیک شدن به دو انتها مقدار آن تغییر کرده و کاهش می‌یابد.

مثال ۳- این مسئله بار دیگر برای حالتی که به جای شوک فشار، شوک حرارتی به معادله $T_i(t) = 2500(1 - \text{Exp}(-t)) + 300$ کلون در داخل استوانه اعمال شود، حل گردیده است. در این حالت ضریب جابجایی حرارتی در داخل استوانه $10000 \text{ W/m}^2\text{K}$ می‌باشد.

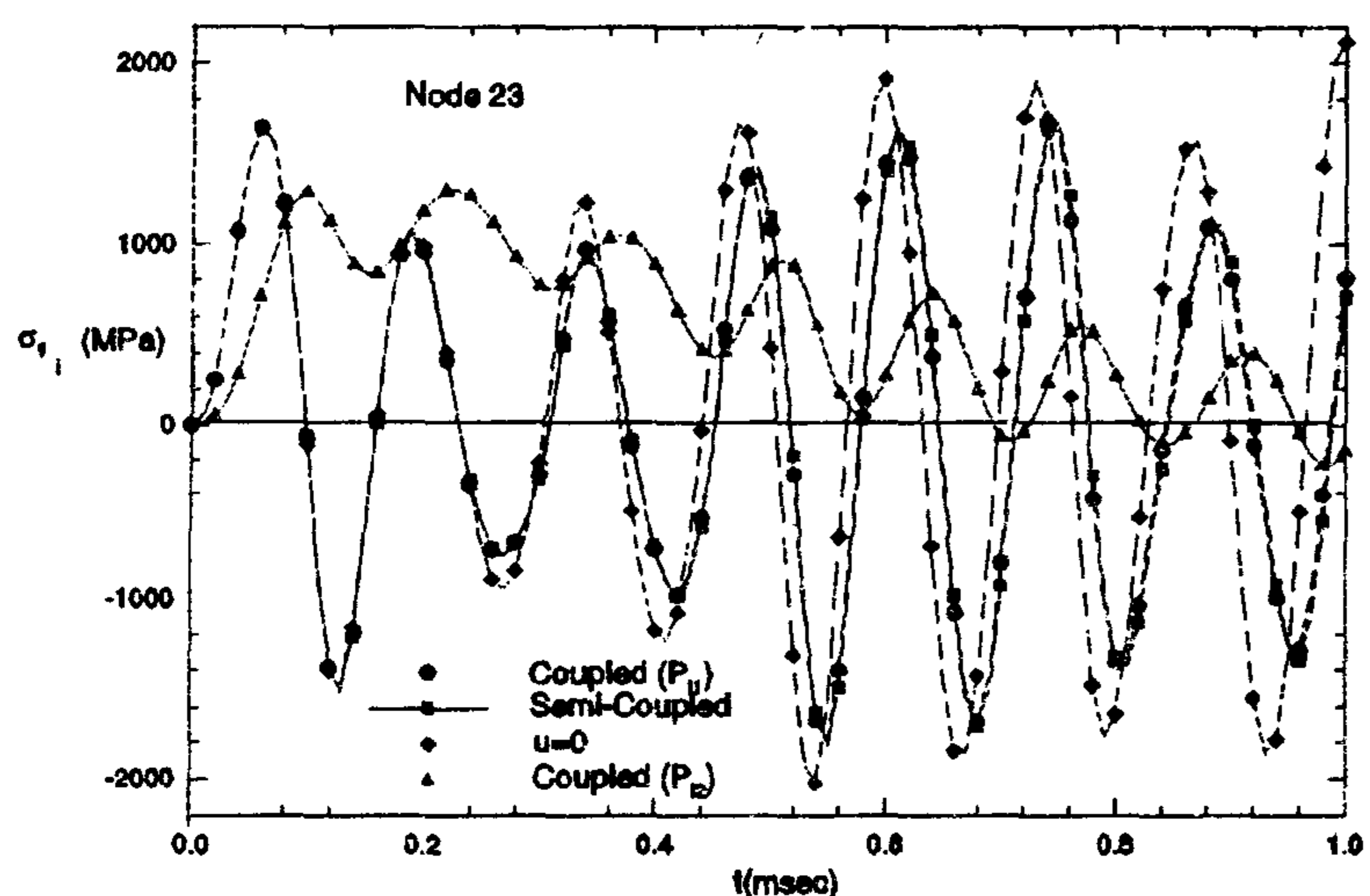
ایجاد می‌گردد نیز حل گردیده است. شکل (۳) منحنی شوک فشار مذکور را نشان می‌دهد. مطابق شکل، فشار در مدت زمانی حدود ۰/۳ میلی ثانیه به فشار حداکثر خود در حدود ۸۰ بار رسیده و در این فشار ثابت باقی می‌ماند. شکل (۲۰) منحنی‌های تغییرات σ_x و σ_θ در گره ۲۳ (وسط استوانه) برحسب زمان می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌گردد در این حالت بر خلاف حالت قبل به علت عدم حذف فشار داخلی، نوسانات حول مقدار صفر نمی‌باشد. در حقیقت نوسانات تنش حول مقدار استاتیکی می‌باشد که اگر از رابطه $\frac{PR}{t}$ محاسبه گردد، مقدار σ_θ در حالت استاتیکی 434 MPa می‌باشد که با منحنی شکل (۲۰) نیز مطابقت دارد. مطلب دیگری که در این منحنی‌ها دیده می‌شود کمتر بودن حداکثر تنش در این حالت از حالت قبل است (البته در این حالت گره ۲۳ و در حالت قبل گره ۲۲ مورد بررسی قرار گرفتند که بدلیل نزدیک بودن دو گره، انتظار اختلاف زیادی بین آنها نمی‌رود). علت این امر به نحوه اعمال فشار



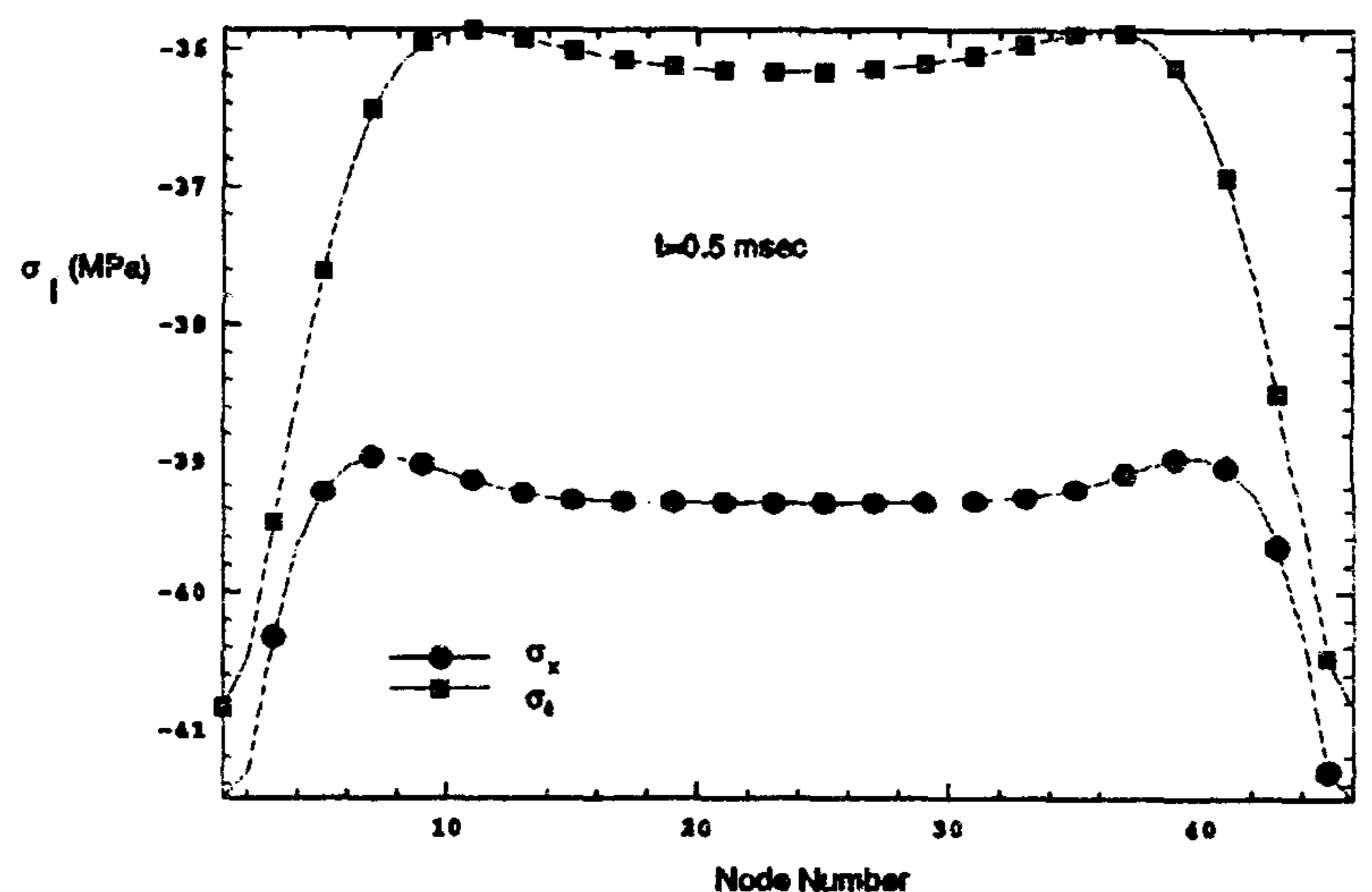
شکل ۲۴: منحنی‌های تغییر مکان شعاعی W در گره ۲۳ برحسب زمان (مثال ۴).



شکل ۲۲: منحنی تغییرات σ_x و σ_θ در سطح داخلی استوانه در گره ۲۳ (مثال ۳).



شکل ۲۵: منحنی‌های تنش محیطی σ_θ در سطح داخلی استوانه در گره ۲۳ (مثال ۴).



شکل ۲۳: منحنی توزیع تنش‌های σ_x و σ_θ در سطح داخلی استوانه در لحظه ۰/۵ میلی ثانیه (مثال ۳).

شکل (۴) منحنی تغییرات درجه حرارت محیط داخل استوانه را برحسب زمان نشان می‌دهد. مطابق این شکل درجه حرارت مذکور در مدت زمانی حدود ۰/۳ میلی ثانیه به حداکثر مقدار خود یعنی ۲۸۰۰ K رسیده و در این حالت دما ثابت می‌ماند. شکل (۲۲) توزیع تنش‌های σ_x و σ_θ را در سطح داخلی استوانه در گره ۲۳ نشان می‌دهد. با توجه به گرم شدن سطح داخل ملاحظه می‌گردد که تنش‌های ایجاد شده فشاری بوده و با گذشت زمان و با افزایش حرارت پوسته، آنها نیز از نظر مقدار رو به افزایش می‌باشند. شکل (۲۳) نیز مبین توزیع تنش‌های σ_x و σ_θ در امتداد استوانه در لحظه ۰/۵ میلی ثانیه می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌گردد دو انتهای استوانه بدلیل مقید بودن و عدم امکان انبساط دارای بیشترین مقادیر تنش σ_x و σ_θ می‌باشند.

مثال ۴ - بررسی دیگری که بر روی پوسته استوانه‌ای مورد نظر انجام گرفته است، شامل چهار حل مختلف می‌باشد. در حالت اول پوسته استوانه‌ای مورد نظر تحت شوک فشار داخلی به معادله

شکل (۵) منحنی شوک‌های فشار مذکور را نشان می‌دهد. در شکل‌های (۲۴) و (۲۵) نیز منحنی‌های تغییر مکان شعاعی W و تنش محیطی σ_θ در گره ۲۳ برای چهار حالت مورد نظر رسم شده است. همانطور که از این منحنی‌ها پیداست در حالت اول و دوم دو منحنی تقریباً بر روی یکدیگر قرار گرفته و اختلاف ناچیزی دارند.

$$P_i(\bar{t}) = 220 \cdot t \cdot \text{Exp}(-4\bar{t})$$

این حالت مسئله به صورت ترموالاستیسیته وابسته مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت دوم همین مسئله به صورت ترموالاستیسیته نیمه‌وابسته با حذف اثر ε_{kk} در معادلات انرژی حل شده است. در حالت سوم اثر تغییر مکان محوری با مقید کردن تمامی درجات آزادی u در امتداد استوانه حذف شده است. در حالت چهارم معادله شوک فشار داخلی اعمالی به صورت

$$P_i(\bar{t}) = 220 \cdot t \cdot \text{Exp}(-0.4\bar{t})$$

اول است، با این تفاوت که ثابت زمانی آن ۱۰ برابر می‌باشد. در حالت اول زمان رسیدن به حداکثر فشار، ۰/۰۲ میلی ثانیه می‌باشد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از همکاری معاونت پژوهشی دانشگاه تهران و معاونت تحقیقات صنایع شهید باقری بدلیل ارائه پشتیبانی‌های لازم تشکر می‌نمایند.

فهرست علائم

C :	ظرفیت گرمایی ویژه
E :	مدول الاستیسیته
h :	ضخامت استوانه
h_i :	ضریب جابجایی داخل استوانه
h_o :	ضریب جابجایی خارج استوانه
I_{yy} :	ممان اینرسی جزء حول محور y
K :	ضریب هدایت حرارتی
l :	طول جزء
L :	طول استوانه
M_x :	گشتاور خمشی محوری
N_θ, N_x :	نیروی قائم محوری و محیطی
P_z, P_x :	شوک فشار و برش وارده در جهت محور و شعاع
Q :	انرژی تولیدی
Q_x :	نیروی برش محوری
R :	شعاع استوانه
T_1, T_2, T_3 :	ضرایب تابع درجه حرارت در جهت ضخامت
T_a :	دمای اولیه و محیط خارج
T_i :	شوک حرارت وارده در داخل استوانه
w, u :	تغییر مکان محوری و شعاعی

فهرست علائم یونانی

α :	ضریب انبساط حرارتی
ϵ :	کرنش
λ, μ :	ثابت‌های لامه
ν :	ضریب پواسون
ρ :	جرم حجمی استوانه
σ :	تنش
Ψ :	دوران جزء حول محور y

علت این امر کم بودن اثر توزیع درجه حرارت ایجاد شد، در حالت دوم در توزیع تغییر مکان پوسته می‌باشد، به طوریکه می‌توان گفت در این مسئله، در مقایسه با اثر شوک فشار اعمالی، اثر توزیع درجه حرارت قابل اغماض بوده و می‌توان به حل نیمه وابسته (که در این مسئله معادل غیر وابسته می‌باشد) اکتفا کرد. مقایسه منحنی حالت سوم با حالت اول نشان می‌دهد که اثر تغییر مکان محوری تا حدودی قابل توجه بوده به خصوص پس از گذشت مدت زمانی این اثر افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در لحظه حدود $0/6$ میلی ثانیه فاصله بین نقاط ماکزیمم نسبی حدود 300 MPa است که تقریباً 18% مقدار تنش در حالت اول می‌باشد. بنابراین حذف اثر تغییر مکان محوری در معادلات می‌تواند موجب بروز خطای قابل توجهی گردد. مقایسه این حالت با حالت اول نشان می‌دهد که شکل نوسانات کمی تغییر کرده است به طوریکه در این حالت در زمان انتهایی 1 میلی ثانیه، w به بیشترین مقدار خود، یعنی 1 میلی متر رسیده است. در صورتیکه در حالت قبل تغییر مکان در لحظه 1 میلی ثانیه حدود $0/4$ میلی متر بوده و حداکثر تغییر مکان نیز حدود $0/82$ میلی متر می‌باشد. پریود نوسانات در این حالت $10^{-5} \times 13/5$ می‌باشد که از آنجا فرکانس 7407 Hz (موت، چهارم) بدست می‌آید. بنابراین ملاحظه می‌گردد که فرکانس سیستم بالا رفته است. علت این امر بالا رفتن سختی سیستم در اثر مفید کردن درجات آزادی u سیستم می‌باشد. مقایسه حالت چهارم با حالت اول نشان دهنده اثر پریود بارگذاری در مقادیر توزیع تنش ایجاد شده می‌باشد. همانطور که ملاحظه می‌گردد در حالت اول ماکزیمم تنش ایجاد شده بیشتر بوده و نوسانات حول صفر می‌باشد در صورتیکه در حالت چهارم ماکزیمم تنش کمتر بوده و نوسانات حول مقدار تنش حالت استاتیکی بوده و از منحنی بارگذاری پیروی می‌کنند.

نتیجه گیری

با توجه به بررسی‌هایی که به عمل آمد و نتایجی که از بخش قبل بدست آمد چنین استنباط می‌شود که در بارگذاریهای دینامیکی با نرخ زیاد، تأثیر عبارت وابسته ساز ϵ_{kk} در میدان درجه حرارت به خوبی قابل مشاهده می‌باشد، هر چند که اثر آن در مثال‌هایی که حل گردید چندان زیاد نبود. همچنین دیده شد که حذف عبارت تغییر مکان محوری از معادلات می‌تواند خطای قابل توجهی ایجاد کند. علاوه بر آن ملاحظه شد که پریود بارگذاری در مقادیر تنش‌های ایجاد شده موثر بوده و مقادیر تغییر مکان و تنش ایجاد شده در حالت دینامیکی متفاوت با حالت استاتیکی می‌باشد.

مراجع

- 1 - Eslami, M. R., Shakeri, M. and Sedaghati, R. (1994). "Coupled thermoelasticity of an axially symmetric cylindrical shell." *J. Thermal Stresses*, Vol. 17, PP. 115-135.
- 2 - Eslami, M. R. and Vahedi, H. (1989). "Coupled thermoelasticity beam problems." *ALAA J.*, Vol 27, PP. 662-665.
- 3 - Eslami, M. R. and Vahedi, H. (1989). "A Galerkin finite element formulation of dynamic thermoelasticity for spherical problems." *Proc ASME-PVP Conf.*, July 23-27, Hawaii.
- 4 - Ghoneim. (1986). "Thermoviscoplasticity by finite element: Dynamic loading of a thick walled cylinder." *J. Thermal Stresses*, Vol. 9, PP. 345-358.
- 5 - McQuillen, E. J. and Brull, M. A. (1970). "Dynamic thermoelastic response of cylindrical shells." *Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech.* PP. 661-670.
- 6 - Takezono, S., Tao, K. and Taguchi, T. (1989). "Elasto/viscoplastic dynamic response of axisymmetric shells under mechanical and/or thermal loading." *Proc. ASME-PVP Conf.*, July 23-27, Hawaii.
- 7 - Tene, Y. and Sheinman, I. (1978). "Dynamics of shell of revolution under axisymmetric load involving shear deformation." *Computers & Structures*, Vol.8, PP. 563-568.
- ۸ - حکیم‌الهی، ب. "بررسی اثرات شوک‌های فشار، برش و درجه حرارت در استوانه جدار نازک با استفاده از حل معادلات وابسته ترموالاستیسیته دینامیکی." پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، تابستان (۱۳۷۵)
- ۹ - سلطانی، ن. و حکیم‌الهی، ب. "بدست آوردن معادلات دینامیکی ترموالاستیسیته در استوانه جدار نازک برای حل به روش اجزاء محدود." پنجمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، اردیبهشت (۱۳۷۵).