

تحلیل ترکهای مورب و کنگره‌ای شکل تحت شرایط حالت ترکیبی I & II در صفحات محدود غیر متجانس با استفاده از روش انتگرال J

ناصر سلطانی

دانشیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

محمد نورین

کارشناس ارشد گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۶/۴/۲۲، تاریخ تصویب ۷۷/۷/۱۱)

چکیده

در این مقاله، روش انتگرال J برای تحلیل ترکهای مورب و کنگره‌ای شکل، تحت شرایط حالت ترکیبی I و II در صفحاتی از جنس مواد غیرمتجانس، بکار برده شده است. مقادیر تنش و تغییر مکانهای گرهی در مسیرهای انتگرال‌گیری، با استفاده از روش اجزاء محدود بدست آمده است. به منظور برداشتن قید در انتخاب دستگاه مختصات مورد استفاده در عملیات گره‌بندی روش اجزاء محدود، به صورت منطبق بر امتداد ترک، معادلات لازم برای محاسبه مؤلفه‌های I به شکلی بدست آمده که برای هر ترک مورب دلخواه، قابل کاربرد باشد. همچنین با انتخاب مسیر انتگرال‌گیری به شکل مستطیلی به موازات دستگاه مختصات مرجع، این معادلات به ساده‌ترین شکل از نظر محاسبات عددی نوشته شده است. مقایسه نتایج حاصل از مثالهای حل شده برای ترکهای مورب، با نتایج موجود در ادبیات فنی، تطابق رضایت بخشی را نشان می‌دهد. همچنین به منظور نشان دادن قابلیت کاربرد روش حاضر برای شکلهای پیچیده ترک، مسئله مربوط به یک ترک کنگره‌ای شکل، حل گردیده است.

کلیدواژه‌ها: ترکهای صورت، غیرمتجانس، انتگرال I، مکانیک شکست

مقدمه

بدست آمده بسیار محدود است و بیشتر روشهای عددی موجود نیز به منظور تحلیل ترک در مواد متجانس بسط یافته‌اند. از طرف دیگر حاکم بودن ترکیبی از حالات بارگذاری (کششی، برش داخل صفحه، برش خارج صفحه) بر مسئله، پیچیدگی کار را دوچندان می‌سازد. لذا می‌توان گفت که مسئله یک ترک در صفحه‌ای محدود از جنس مواد غیرمتجانس و در حالت ترکیبی از جمله مسائل پیچیده در تحلیل ترکها محسوب می‌گردد. راه حل عملی و سریع برای دستیابی به تحلیل چنین مسائلی را بایستی در بین روشهای عددی جستجو کرد.

Wilson [۱] مسئله حالت ترکیبی I و II را برای تعیین

تحلیل مسائل ترک در «مواد غیرمتجانس» و بویژه در «مواد مرکب» از اهمیت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است و این به واسطه نقش فزاینده‌ای است که مواد مرکب در تکنولوژی مدرن ایفا می‌کنند. خواص جهتی مواد مرکب مانند پشم شیشه با الیاف جهتی - مواد مرکب از فلزات با الیاف تقویتی، چوب و مواد دیگر غالباً «ارتوتروپیک» بوده و از نقطه‌ای به نقطه دیگر به شکل خطی تغییر می‌کند. همزمان با افزایش کاربرد مواد مرکب بویژه در دو دهه اخیر تلاشهای بسیاری به منظور دستیابی به حلهای تحلیلی در مواد مرکب الاستیک صورت گرفته است. با وجود این به علت پیچیدگی ساختاری مواد مرکب، حلهای

Rice [۱۳] با کامل نمودن Sanders و Cherpanov نشان داد که نرخ رهایش انرژی در یک ماده همگن برای رشد یک ترک دو بعدی در صفحه خودش برابر با انتگرال مستقل از مسیر J است. وی این انتگرال را به شکل زیر معرفی نمود

$$J = \int_C W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (۱)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{که در آن} \quad (۲)$$

$$W = \int_0^\epsilon \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (۳)$$

Knowles, Sternberg [۱۴]، J را بصورت بردار J_k متناظر با نرخ رهایش انرژی برای حرکت لبه ترک در تمام جهات، تعمیم دادند. بعلاوه آنها براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل در میدانهای «الاستو استاتیک» دو انتگرال مستقل از مسیر دیگر بنام L و M نیز بدست آوردند که یکی از آنها برای هر جامد الاستیکی معتبر است و دیگری تنها برای جامدهای متجانس اعتبار دارد. برای حالت سه بعدی مؤلفه های J از رابطه زیر بدست می آید.

$$J_k = \int_S (W n_k - T_i u_{i,k}) dA \quad (۴)$$

در رابطه فوق S سطحی بسته با بردار عمود n بطرف بیرون می باشد. برای حالت دو بعدی انتگرال روی سطح فوق به انتگرال روی خط زیر تبدیل می شود، که در آن C یک منحنی بسته در صفحه X_1X_2 است.

$$J_k = \int_C (W n_k - T_i u_{i,k}) ds \quad (۵)$$

Budiansky & Rice [۱۵] نشان دادند که انتگرالهای J ، L و M را می توان به ترتیب، نرخ رهایش انرژی در ارتباط با انتقال، دوران و انبساط یک حفره (در حالت دوبعدی یک ترک) دانست. بر اساس این تعبیر می توان J را با رابطه دیفرانسیلی زیر نشان داد، که در آن Π انرژی پتانسیل کل جسم و a طول ترک است.

$$J = - \frac{d\Pi}{da} \quad (۶)$$

ضرایب شدت تنش در یک صفحه تحت کشش از جنس مواد متجانس، با استفاده از روش ترتیبی مرزی حل کرد. در روش ترتیبی مرزی، زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات کمتر است و از آنجا که در این روش با انتخاب تابع تنش مناسب، شرایط مرزی روی سطح ترک و تکینگی موجود در نوک ترک بطور کامل ارضاء می گردد، نسبت به سایر روشهای عددی، دقیقتر است. ولی اشکال اصلی این روش در بدست آوردن تابع تنش مذکور نهفته است و به سبب دشواری یا عدم امکان دستیابی به تابع تنش مورد نیاز، حل های بدست آمده در زمینه مسائل حالت ترکیبی در صفحات محدود غیرمتجانس، جامع نبوده و تنها برای اشکال ساده ترک، بدست آمده است [۲، ۳، ۴، ۵]. روش اجزاء محدود که به عنوان ابزاری قدرتمند در تحلیل سازه ها شناخته شده است به جهت قابلیت تحلیل مسائل پیچیده ترک از نظر بارگذاری، هندسه قطعه، شکل ترک و خواص مواد، امکان حل مسائل مورد بحث را فراهم می سازد، اما به علت تکینگی موجود در نوک ترک، معمولاً به صورت مستقیم مورد استفاده قرار نگرفته، بلکه همراه با روشی مکمل، بکار برده می شود. روش انتگرال J در زمره این روشهای مکمل است که علاوه بر قابلیت کاربرد در زمینه مواد غیرمتجانس الاستیک (اعم از خطی یا غیرخطی)، به لحاظ برخورداری از ویژگی استقلال از مسیر، دوری جستن از تکینگی موجود در نوک ترک را میسر می سازد [۶، ۷، ۸].

نخستین بار در ۱۹۶۵ Eshelby [۹] در مقاله ای که به تئوری پیوستگی عیوب شبکه اختصاص داشت، با استفاده از تانسور مومتم انرژی تعدادی انتگرال خط مستقل از مسیر معرفی کرد که در غیاب عیوب، نشان دهنده قانون بقای انرژی برای تغییر شکلهای کوچک در مواد الاستیک و همگن (ولی نه لزوماً متجانس) بود. چندی بعد Sanders [۱۰] براساس تئوری Irwin-Griffith [۱۱] معیاری معادل برای رشد ترک، برحسب یک انتگرال خط مستقل از مسیر بدست آورد. Cherpanov [۱۲] با اعمال قانون بقای انرژی برای یک جسم ترکدار، معادله ای را به صورت انتگرالی مستقل از مسیر برای نرخ انرژی مصرف شده در واحد سطح به منظور رشد ترک، بدست آورد.

$$\alpha_{ik}^* = \alpha_{ik} - \frac{\alpha_{i3} \alpha_{k3}}{\alpha_{33}} \quad i, k=1,2,6 \quad (8)$$

قانون هوک برای حالت کرنش صفحه‌ای از نظر تشکیل روابط به صورت قانون هوک برای حالت تنش صفحه‌ای درمی‌آید. در غیاب نیروهای حجمی می‌توان از تابع تنش «آیری» $U(x,y)$ برای توصیف تنشها به شکل زیر استفاده کرد.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

تنها شرط سازگاری نیز به صورت زیر خواهد بود و سایر شرایط خود به خود ارضاء می‌شوند.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (10)$$

با جاگذاری روابط (۷) و (۹) در معادله فوق و پس از ساده سازی خواهیم داشت؛

$$\alpha_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2\alpha_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2\alpha_{12} + \alpha_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\alpha_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + \alpha_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (11)$$

حل زیر که در آن $\mu = \frac{b}{a}$ می‌باشد، یک حل خصوصی برای معادله فوق است.

$$U = \text{Re} \{U_0 \exp(ax + by)\} \quad (12)$$

برای اینکه حل فوق در معادله (۱۱) صدق کند، بایستی رابطه زیر برقرار باشد.

$$\alpha_{11} \mu^4 - \alpha_{16} \mu^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66}) \mu^2 - \alpha_{26} \mu + \alpha_{22} = 0 \quad (13)$$

معادله (۱۳) نمی‌تواند ریشه حقیقی داشته باشد زیرا در صورت وجود ریشه حقیقی با فرض $U(x,y) = \exp(x + \mu y)$ انرژی کرنشی صفر خواهد شد. ولی این موضوع نمی‌تواند صادق باشد، زیرا ماتریس ضرایب الاستیک در دستگاه معادلات (۷) به صورت مثبت تعریف شده است. بنابراین ریشه‌های معادله (۱۳) بایستی به شکل مختلط باشد. یعنی؛

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \mu_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad \mu_4 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad (14)$$

که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ثابتهای حقیقی هستند و نیز

Helan & Blackburn [۱۶] روش انتگرال J را برای محاسبه زاویه پیشروی ترک در حالت ترکیبی I و II بکار بردند. Bergkvist & Huong [۱۷] نیز رابطه‌ای برای محاسبه انتگرال J در حالت تقارن محوری بدست آوردند. Wang et al. [۱۸] با روشی مشتعل بر کاربرد توأم انتگرال J و M، ضرایب شدت تنش را برای مسائل ترک صفحه‌ای در مواد غیرمتجانس و در حالت ترکیبی I و II بدست آوردند. اخیراً نیز Chiarelli & Frediani [۱۹] با تعمیم رابطه‌ای که توسط Frediani et al. برای انتگرال J دوبعدی، با فرض حضور نیروهای متمرکز داخل مسیر انتگرال گیری بدست آمده بود، رابطه جامعی برای انتگرال J در حالت سه بعدی، شامل حضور نیروهای مذکور، اثرات شیب دما، میدانهای اینرسی و نیروهای حجمی ارائه داده‌اند.

تشکیل روابط لازم

در این بخش ابتدا صورت کلی میدانهای تنش و تغییر مکان برای مواد غیرمتجانس در حالت دوبعدی استخراج شده و سپس با استفاده از آنها میدانهای تنش و تغییر مکان تکین در نوک ترک بدست آمده است. در حالت تنش صفحه‌ای $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$ و لذا قانون هوک به شکل زیر درمی‌آید. (لازم به توضیح است که برای مواد غیرمتجانس روابط جامعی توسط Lekhnitski [۲۰] ارائه شده است.)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_{11} \sigma_x + \alpha_{12} \sigma_y + \alpha_{16} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_{12} \sigma_x + \alpha_{22} \sigma_y + \alpha_{26} \tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha_{16} \sigma_x + \alpha_{26} \sigma_y + \alpha_{66} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (V)$$

در دستگاه معادلات فوق ضرایب a_{ik} که یک ماتریس متقارن را تشکیل می‌دهند، حقیقی و ثابتند و به ضرایب «کامپلینس» موسومند و بعلاوه ماتریس به صورت مثبت تعریف می‌گردد. در حالت کرنش صفحه‌ای رابطه زیر نیز برقرار است.

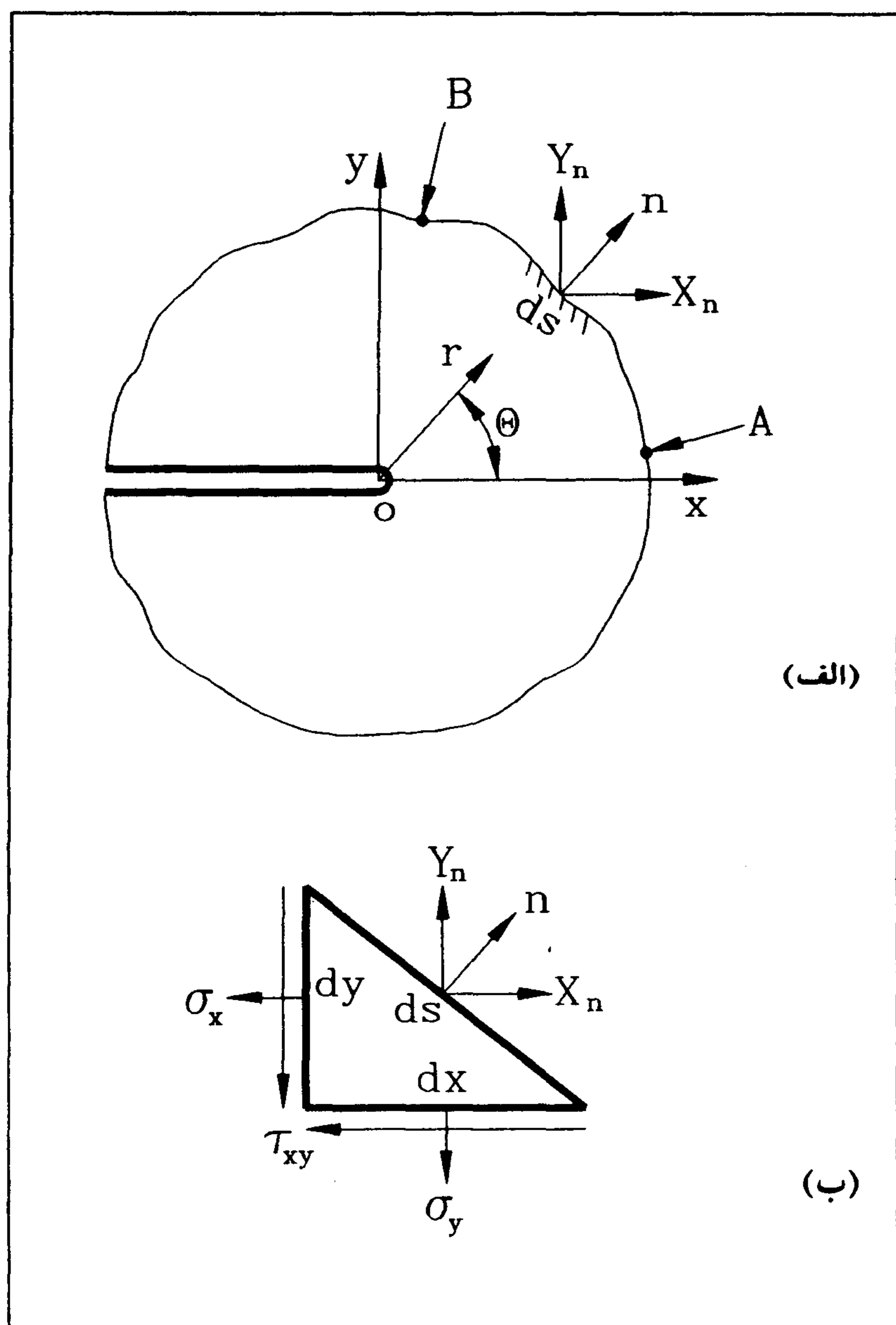
$$\varepsilon_z = \alpha_{13} \sigma_x + \alpha_{23} \sigma_y + \alpha_{33} \sigma_z + \alpha_{36} \tau_{xy}$$

بنابراین با انتخاب ضرایب به شکل؛

شکل (۱-الف) در نظر گرفته شده و فرض شده است که بر سطح ترک نیروهای سطحی وارد نشود. برآیند نیروهای سطحی که بر کمان دلخواه AB اثر می‌کند از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$X+iY = \int_A^B (X_n+iY_n) ds \quad (21)$$

از طرفی از شکل (۱-ب) داریم؛



شکل ۱: (الف) - جسم غیرمتجانس دارای ترک (ب) - نیروهای وارد بر یک المان کوچک به ضخامت واحد

$$X_n ds = \sigma_x dy + \tau_{xy} dx \quad (22)$$

$$Y_n ds = \tau_{xy} dy + \sigma_y dx$$

با جاگذاری از روابط (۱۷) و (۲۲) در رابطه (۲۱) نتیجه می‌شود که؛

$$X+iY = -i [P(z_1, z_2)]_A^B \quad (23)$$

که در آن

$$P(z_1, z_2) = (1+i\mu_1)\varphi(z_1) + (1+i\bar{\mu}_1)\varphi(z_1) + (1+i\mu_2)\psi(z_2) + (1+i\bar{\mu}_2)\psi(z_2) \quad (24)$$

می‌توان فرض کرد که $\beta_1 > 0$ و $\beta_2 > 0$ باشد. با فرض $z_j = x + \mu_j y$ ، $j = 1, 2$ و با توجه به آنچه تاکنون بیان گردید، حل عمومی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت؛

$$U(x,y) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \overline{\varphi_1(z_1)} + \overline{\varphi_2(z_2)} = 2\text{Re} [\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)] \quad (15)$$

در رابطه فوق $\varphi_1(z_1)$ و $\varphi_2(z_2)$ به ترتیب توابع تحلیلی از z_1 و z_2 هستند. حال با فرض؛

$$\frac{d\varphi_1(z_1)}{dz_1} = \varphi_1'(z_1) = \varphi'(z_1), \quad \frac{d\varphi_2(z_2)}{dz_2} = \varphi_2'(z_2) = \psi(z_2) \quad (16)$$

با استفاده از روابط (۹) تنشها را بدست می‌آوریم. لذا با توجه به استدلال قبل تنشها از روابط (۹) و (۱۶) به شکل زیر بدست می‌آیند.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 2\text{Re}[\mu_1^2 \varphi_1''(z_1) + \mu_2^2 \varphi_2''(z_2)] = 2\text{Re}[\mu_1^2 \varphi'(z_1) + \mu_2^2 \psi'(z_2)]$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} = 2\text{Re}[\varphi_1''(z_1) + \varphi_2''(z_2)] = 2\text{Re}[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)] \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = -2\text{Re}[\mu_1 \varphi_1''(z_1) + \mu_2 \varphi_2''(z_2)] = -2\text{Re}[\mu_1 \varphi'(z_1) + \mu_2 \psi'(z_2)]$$

تغییر مکانها نیز با استفاده از قانون هوک (۷) و انتگرال گیری از روابط کرنش تغییر مکان زیر؛

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (18)$$

عبارتند از:

$$u = 2\text{Re}[p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \quad (19)$$

$$v = 2\text{Re}[q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)]$$

که در آن p_j و q_j به صورت زیر تعریف می‌شوند؛

$$p_j = \alpha_{11} \mu_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16} \mu_j \quad (20)$$

$$q_j = \alpha_{12} \mu_j + \alpha_{22} / \mu_j - \alpha_{26}$$

برای بدست آوردن میدانهای تنش و تغییر مکان تکین در نوک ترک، جسمی غیرمتجانس مانند

تنش صفحه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left\{\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{z_2}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{z_1}}\right)\right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{\sqrt{z_2}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{z_1}}\right)\right\} \quad (32)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{z_2}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{z_1}}\right)\right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} - \frac{1}{\sqrt{z_2}}\right)\right\} \quad (33)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left\{\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{z_1}} - \frac{1}{\sqrt{z_2}}\right)\right\} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{z_1}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{z_2}}\right)\right\} \quad (34)$$

$$u = \frac{K_I \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 P_2 \sqrt{z_2} - \mu_2 P_1 \sqrt{z_1}) \right\} + \frac{K_{II} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (P_2 \sqrt{z_2} - P_1 \sqrt{z_1}) \right\} \quad (35)$$

$$v = \frac{K_I \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (\mu_1 q_2 \sqrt{z_2} - \mu_2 q_1 \sqrt{z_1}) \right\} + \frac{K_{II} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} (q_2 \sqrt{z_2} - q_1 \sqrt{z_1}) \right\} \quad (36)$$

برای استخراج رابطه بین مؤلفه‌های بردار J و δa ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} ، ترکی مطابق با شکل (۲) به طول a در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که بطور مجازی و به اندازه δa در امتداد راستای اولیه ترک رشد کرده است. از آنجا که ترک نسبت به محور بارگذاری به صورت مورب قرار گرفته است، مسئله ترکیبی از حالت‌های I و II خواهد بود.

با فرض حالت تغییر مکان ثابت، کاهش انرژی پتانسیل ناشی از رشد ترک δa با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\delta U = -2 \int_0^{\delta a} \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_i n_j ds \quad (37)$$

همانطور که می‌دانیم تنشها در همسایگی نوک ترک متناسب با معکوس ریشه دوم فاصله از این نقطه است. از طرفی با توجه به اینکه در رابطه (۱۷) مشتق توابع $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ در توصیف تنشها نقش دارند، لذا رفتار توابع $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ در نزدیکی نوک ترک را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت؛

$$\varphi(z_1) = a_r \sqrt{z_1}, \quad \psi(z_2) = b_r \sqrt{z_2} \quad (25)$$

که در آن a_r و b_r ضرایب معین مختلط هستند. برای محور x ($y = 0$) داریم؛

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2} = \sqrt{x} \quad \text{برای } x > 0 \quad (26)$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{z_2} = \pm i \sqrt{-x} \quad \text{برای } x \leq 0 \quad (27)$$

حال، اعمال شرط عدم وجود نیروهای سطحی در سطح ترک با توجه به رابطه (۲۳) ایجاب می‌کند که؛

$$X + i Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P(z_1, z_2) = \text{Const} \quad (28)$$

لذا با اعمال روابط (۲۴) و (۲۷) برای نوک ترک خواهیم داشت؛

$$(1+i\mu_1)a_r - (1+i\bar{\mu}_1)\bar{a}_r + (1+i\mu_2)b_r - (1+i\bar{\mu}_2)\bar{b}_r = 0 \quad (29)$$

$$\Rightarrow (a_r - \bar{a}_r) + i(\mu_1 a_r - \bar{\mu}_1 \bar{a}_r) + (b_r - \bar{b}_r) + i(\mu_2 b_r - \bar{\mu}_2 \bar{b}_r) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Im}(a_r + b_r) + i 2 \operatorname{Im}(\mu_1 a_r + \mu_2 b_r) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(a_r + b_r) = 0, \quad \operatorname{Im}(\mu_1 a_r + \mu_2 b_r) = 0$$

بنابراین دو پارامتر حقیقی k_I و k_{II} وجود دارند، به قسمی که؛

$$(a_r + b_r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad (30)$$

$$(\mu_1 a_r + \mu_2 b_r) = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$$

و از دو معادله فوق داریم؛

$$a_r = \frac{\mu_2 k_I + k_{II}}{\sqrt{2\pi}(\mu_2 - \mu_1)}, \quad b_r = \frac{\mu_1 k_I + k_{II}}{\sqrt{2\pi}(\mu_1 - \mu_2)} \quad (31)$$

حال با استفاده از روابط (۱۷)، (۱۹)، (۲۵) و (۳۱) میدانهای تنش و تغییر مکان حول نوک ترک برای حالت

خواهیم رسید.

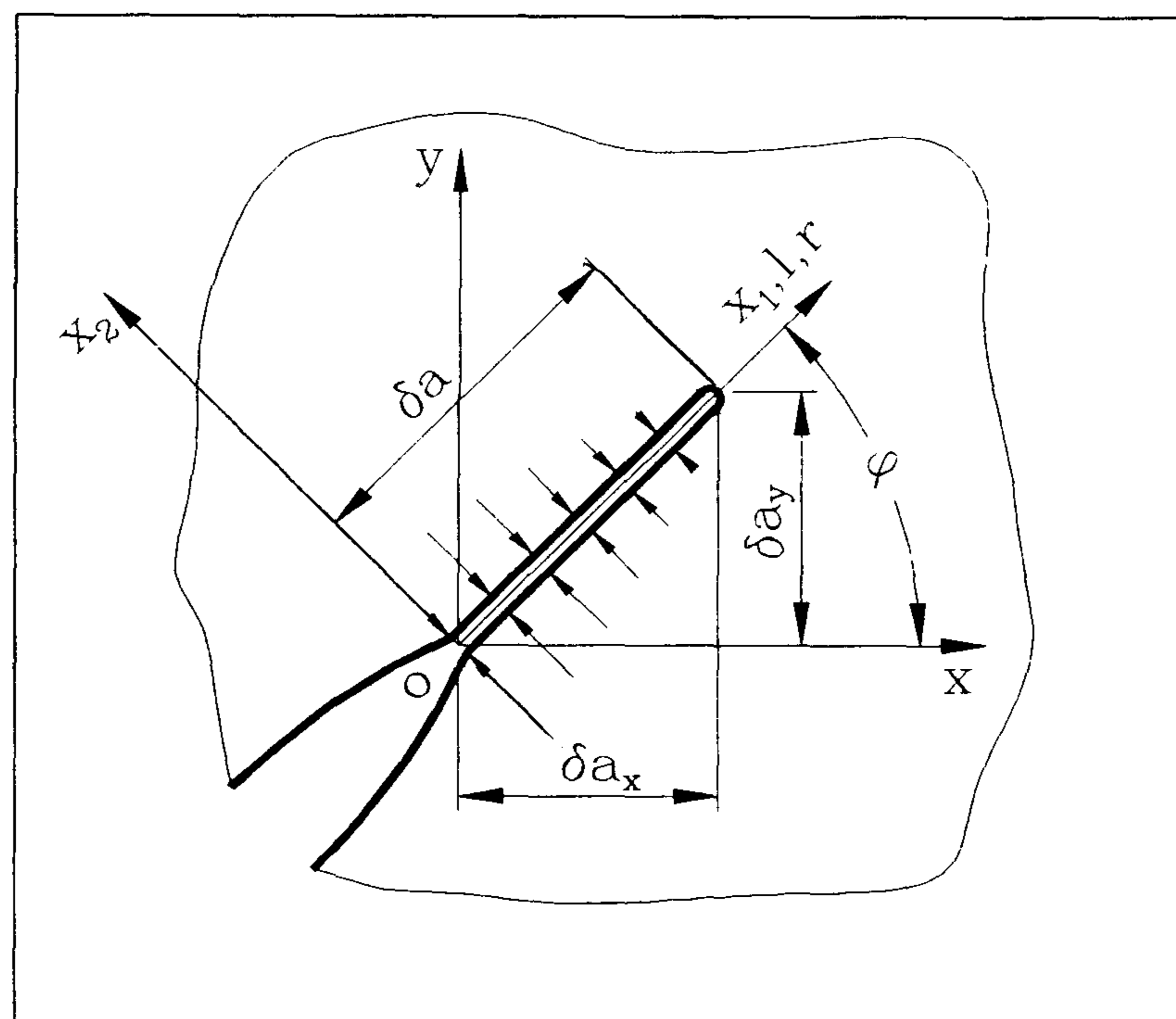
$$\begin{aligned}
 J_1 &= \left[\frac{-\alpha_{22}}{2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \text{Im}(\mu_1 \mu_2) \right] k_1^2 + [\alpha_{11} \text{Im}(\mu_1 \mu_2)] k_I k_{II} \\
 &\quad + \left[\frac{\alpha_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) \right] k_{II}^2 \\
 J_2 &= [\text{Re}(\mu_1 \mu_2) \frac{\alpha_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 \mu_2)] k_1^2 \\
 &\quad + [\text{Re}(\mu_1 \mu_2) \frac{\alpha_{11}}{2} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\alpha_{16}}{2} \text{Im}(\mu_1 \mu_2)] \\
 &\quad + \frac{\alpha_{22}}{2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} k_I k_{II} + \left[\frac{\alpha_{16}}{2} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) \right] \\
 &\quad + \frac{\alpha_{22}}{2} \frac{1}{\mu_1 \mu_2} k_{II}^2
 \end{aligned} \tag{40}$$

برای مواد متجانس $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{\kappa + 1}{4\mu}$ ، $\alpha_{16} = 0$ و $\mu_1 = \mu_2 = i$ که در آن $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ برای حالت تنش صفحه‌ای و $\kappa = 3 - 4\nu$ برای حالت کرنش صفحه‌ای است.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{\kappa + 1}{8\mu} (k_1^2 + k_{II}^2) \\
 J_2 &= \frac{\kappa + 1}{8\mu} (-2 k_I k_{II})
 \end{aligned} \tag{41}$$

محاسبه عددی انتگرال J

با معلوم بودن میدان تنش و تغییر مکان در یک جسم دارای ترک، می‌توان مؤلفه‌های J را با استفاده از معادله (۵) بدست آورد. ولی باید به خاطر داشت که معادله مذکور در دستگاه مختصات بدست آمده که یکی از محورهای آن در امتداد ترک واقع شده است و این در حالی است که گاهی شرایط مسئله ایجاب می‌کند که تنشها و تغییر مکانها را در دستگاه مختصات بدست آورد که بر دستگاه مختصات مورد بحث منطبق نیست. همچنین بایستی توجه داشت که روش اجزاء محدود، تنشها و تغییر مکانها را به صورت عددی و در نقاط گرهی بدست می‌دهد، نه بصورت عبارات جبری. لذا، ابتدا معادلات لازم برای محاسبه مؤلفه‌های J را به شکلی بدست می‌آوریم که برای هر ترک مورب دلخواه قابل کاربرد باشد و سپس آن را به شکلی می‌نویسیم که به صورت عددی قابل محاسبه باشد. برای



شکل ۲: ترک مورب که قسمت رشد کرده آن، توسط نیروهای سطحی بسته شده است.

همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود ترک δa را می‌توان به دو مؤلفه δa_x و δa_y تجزیه نمود. از طرفی با توجه به تعبیر فیزیکی J می‌دانیم که مؤلفه \dot{a} م بردار J برابر با نرخ رهایش انرژی ناشی از رشد ترک، در جهت محور i است، یعنی:

$$J_i = - \lim_{\delta a_i \rightarrow 0} \frac{\delta U}{\delta a_i} \tag{38}$$

در نتیجه با استفاده از این تعبیر و رابطه (۳۷) می‌توان مؤلفه‌های J را در دستگاه مختصات xy بدست آورد. اما از آنجا که معادلات (۳۲) تا (۳۶) در دستگاه مختصاتی بدست آمده که محورهای آن در امتداد و عمود بر ترک قرار گرفته‌اند، لذا با استفاده از روابط تبدیل مختصات، مؤلفه‌های J را در دستگاه مختصات $x_1 x_2$ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\delta a} \int_0^{\delta a} (\tau_{12} u_1 + \sigma_2 u_2) dl \\
 J_2 &= \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{-1}{\delta a} \int_0^{\delta a} (\sigma_1 u_1 + \tau_{12} u_2) dl
 \end{aligned} \tag{39}$$

حال با استفاده از معادلات (۳۲) تا (۳۶) تنشها را برای $r = 1$ و $q = 0$ و تغییر مکانها را برای $r = 1$ و $\theta = \pi$ بدست آورده و در روابط (۳۹) قرار می‌دهیم، سپس با انتگرال‌گیری از روابط حاصل و با توجه به روابطی که بین ریشه‌های معادله مشخصه (۱۳) برقرار است، به روابط زیر

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_1} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y} \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

از شکل (۴) نیز داریم؛

$$\cos\alpha \cdot ds = dy, \quad \sin\alpha \cdot ds = -dx \quad (46)$$

حال با استفاده از رابطه اول (۴۵) و روابط سوم و چهارم (۴۳) خواهیم داشت؛

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = \cos\varphi \cdot \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\varphi \cdot \sin\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\varphi \cdot \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \sin\varphi \cdot \sin\alpha \frac{\partial v}{\partial y} \quad (47)$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_1} = -\cos\varphi \cdot \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\varphi \cdot \cos\alpha \frac{\partial v}{\partial x} - \sin\varphi \cdot \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \sin\varphi \cdot \cos\alpha \frac{\partial v}{\partial y}$$

و از جاگذاری روابط (۴۷) و (۴۴) و روابط اول و دوم (۴۳) در رابطه (۴۲) پس از ساده سازی خواهیم داشت؛

$$J_1 = \int_C W (-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy) - \int_C \sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi \right) \cos\alpha ds + \int_C \sigma_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin\varphi \right) \sin\alpha ds - \int_C \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi \right) \sin\alpha ds + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin\varphi \right) \cos\alpha ds \quad (48)$$

با جاگذاری رابطه (۴۶) و روابط کرنش - تغییر مکان در رابطه فوق به رابطه زیر خواهیم رسید؛

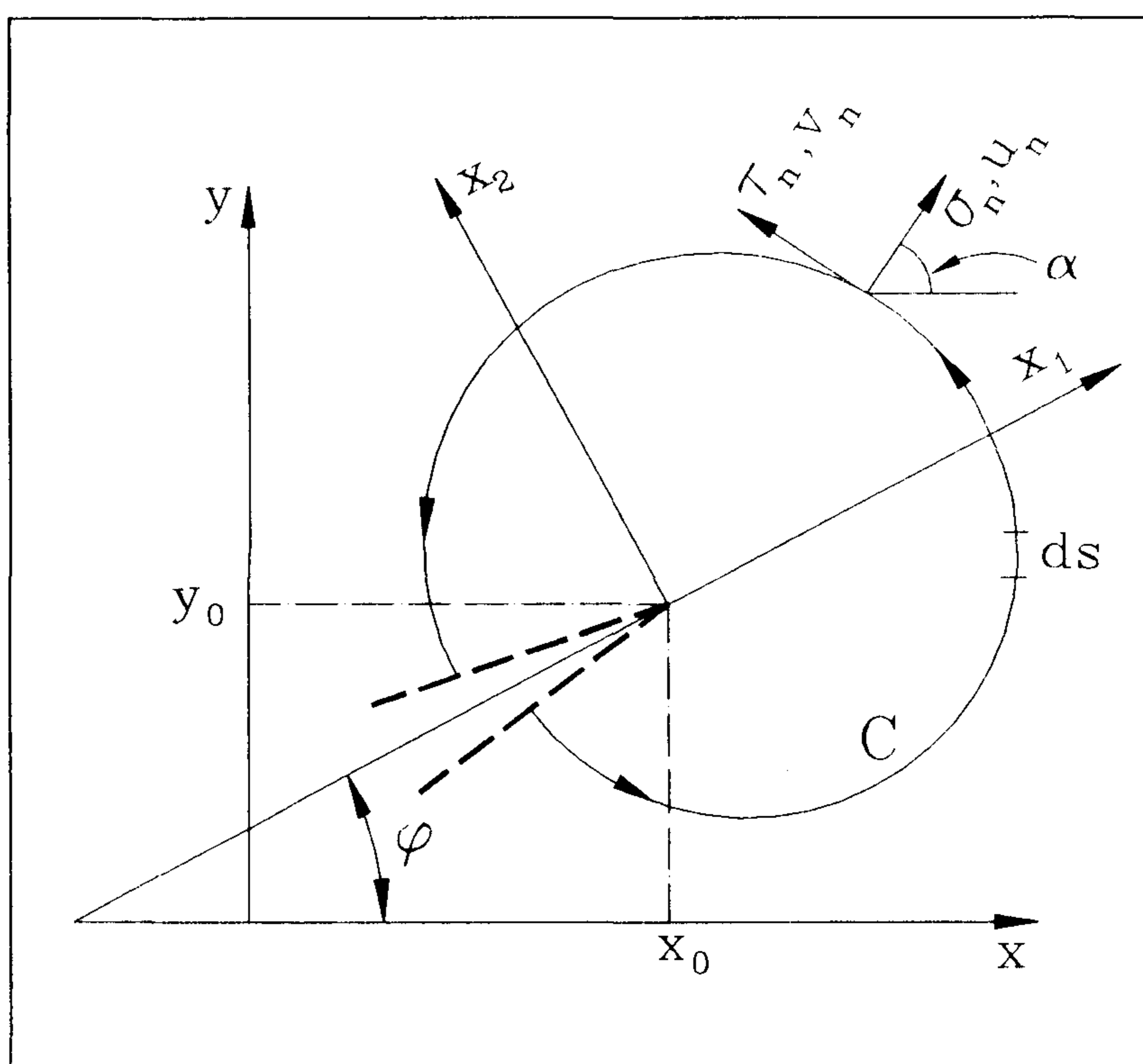
$$J_1 = \int_C W (-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy) - \int_C \sigma_x \varepsilon_x \cos\varphi dy - \sigma_y \varepsilon_y \sin\varphi dx + \tau_{xy} \varepsilon_y \sin\varphi dy - \tau_{xy} \varepsilon_x \cos\varphi dx + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \cos\varphi dy - \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \sin\varphi dx + (\sigma_x \sin\varphi - \tau_{xy} \cos\varphi) \frac{\partial u}{\partial y} dy - (\sigma_y \cos\varphi - \tau_{xy} \sin\varphi) \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (49)$$

با روشی مشابه با آنچه که برای استخراج معادله (۴۹) بکار

این کار یک ترک مورب دلخواه را در یک جسم دوبعدی و با فرض همگن بودن مواد، در نظر می گیریم، شکل (۳).

در حالت کلی فرض می کنیم که تنشها و تغییر مکانها در دستگاه مختصات مرجع xy محاسبه شده اند. حال دستگاه مختصات محلی x_1x_2 را به گونه ای اختیار می کنیم که نوک ترک در مبدأ و ترک در امتداد x_1 منفی باشد، لذا از رابطه (۵) و با توجه به شکل (۳) داریم؛

$$J_1 = \int_C \{ W \cdot dx_2 - [\sigma_n \quad \tau_n] \cdot \left[\frac{\partial u_n}{\partial x_1} \quad \frac{\partial v_n}{\partial x_1} \right]^T \cdot ds \} \quad (42)$$



شکل ۳: مسیر انتگرال گیری برای یک ترک دلخواه و موقعیت دستگاههای مختصات محلی x_1x_2 و مختصات مرجع xy

که در آن T عملگر ترانزفورد است. از طرفی با استفاده از رابطه تبدیل مختصات $\sigma_{ij} = a_{ij} a_{jm} \sigma_{im}$ خواهیم داشت؛

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha \quad (43)$$

$$\tau_n = (\sigma_y - \sigma_x) \sin\alpha \cos\alpha + \tau_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

با استفاده از روابط بین مختصات مرجع و محلی می توان روابط زیر را نتیجه گرفت؛

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x} dx + \frac{\partial x_1}{\partial y} dy = \cos\varphi dx + \sin\varphi dy \quad (44)$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial x} dx + \frac{\partial x_2}{\partial y} dy = -\sin\varphi dx + \cos\varphi dy$$

برای مسیر افقی $\{ [\sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi] du \}$

$$J_1 = \int \{ [(-W + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \sin\varphi + \tau_{xy} \varepsilon_x \cos\varphi] dx + [\sigma_y \cos\varphi - \tau_{xy} \sin\varphi] dv \}$$

$$J_2 = \int \{ [(-W + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) \cos\varphi - \tau_{xy} \varepsilon_x \sin\varphi] dx - [\sigma_y \sin\varphi + \tau_{xy} \cos\varphi] dv \}$$

در روابط فوق برای حالت الاستیک خطی $W = \frac{1}{\nu} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$ است. اگر $\varphi = 0$ باشد روابط فوق باز هم ساده تر شده و در صورتی که بار عمود بر امتداد ترک وارد شود می توان نشان داد که مؤلفه J_2 صفر شده و تنها J_1 باقی می ماند. در روش محاسبه عددی، مقدار J بین هر دو گره مجاور روی مسیر انتگرال گیری یعنی گره i ام و گره $(i+1)$ ام حساب شده و سپس مقادیر حاصل برای کل مسیر با هم جمع بسته می شود لذا برای محاسبه عددی، معادله (۴۹) را به شکل زیر می نویسیم:

$$J_1 = \sum_{i=1}^m \frac{W_i + W_{i+1}}{2} (-\sin\varphi \Delta x + \cos\varphi \Delta y) - (\sigma_{x_i} \varepsilon_{x_i} + \sigma_{x_{i+1}} \varepsilon_{x_{i+1}}) \cos\varphi \frac{\Delta y}{2} - (\sigma_{y_i} \varepsilon_{y_i} + \sigma_{y_{i+1}} \varepsilon_{y_{i+1}}) \sin\varphi \frac{\Delta x}{2} + (\sigma_{xy_i} \varepsilon_{xy_i} + \sigma_{xy_{i+1}} \varepsilon_{xy_{i+1}}) \sin\varphi \frac{\Delta y}{2} - \text{etc.} \quad (53)$$

در معادله فوق n تعداد گره های روی مسیر انتگرال گیری است و مقادیر σ_x ، σ_y ، ε_x ، ε_y ، τ_{xy} و γ_{xy} که برای محاسبه معادله (۵۳) لازم است با استفاده از داده های ورودی و خروجی منتج از تحلیل اجزاء محدود جسم مورد نظر، بدست می آید. رابطه مشابهی نیز می توان برای J_2 استخراج نمود.

کاربرد برای حالت ترکیبی II&I در صفحات غیرمتجانس برای ترک مرکزی مورب

شکل (۵) یک ترک مورب به طول $2a$ را در یک صفحه

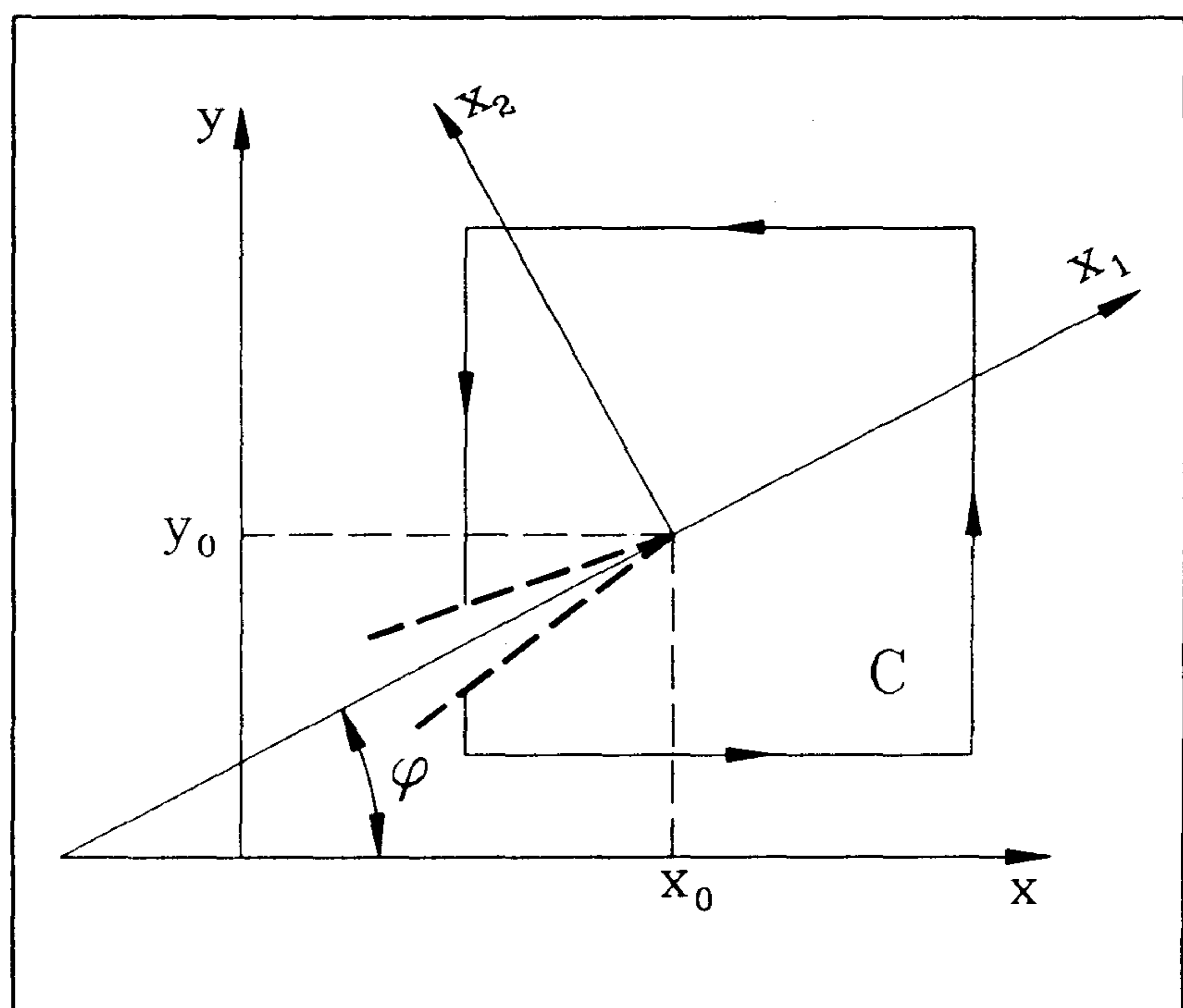
گرفته شد می توان نشان داد که؛

$$J_2 = - \int_C W (\cos\varphi dx + \sin\varphi dy) + \int_C \sigma_x \varepsilon_x \sin\varphi dy + \sigma_y \varepsilon_y \cos\varphi dx - \tau_{xy} \varepsilon_x \sin\varphi dx - \tau_{xy} \varepsilon_y \cos\varphi dy + \tau_{xy} \varepsilon_{xy} \sin\varphi dy - (\sigma_x \cos\varphi + \tau_{xy} \sin\varphi) \frac{\partial u}{\partial y} dy - (\sigma_y \sin\varphi + \tau_{xy} \cos\varphi) \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (50)$$

اما با توجه به اینکه؛

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (51)$$

چنانچه $dx = 0$ باشد، آنگاه: $du = \frac{\partial u}{\partial y} dy$ و اگر $dy = 0$ باشد، آنگاه: $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ خواهد بود. بنابراین اگر مسیر انتگرال گیری مانند شکل (۴)، مستطیل (یا مربع) شکل بوده و اضلاع آن به موازات محورهای مختصات دستگاه مرجع xy واقع شده باشد، آنگاه روابط (۴۹) و (۵۰) را



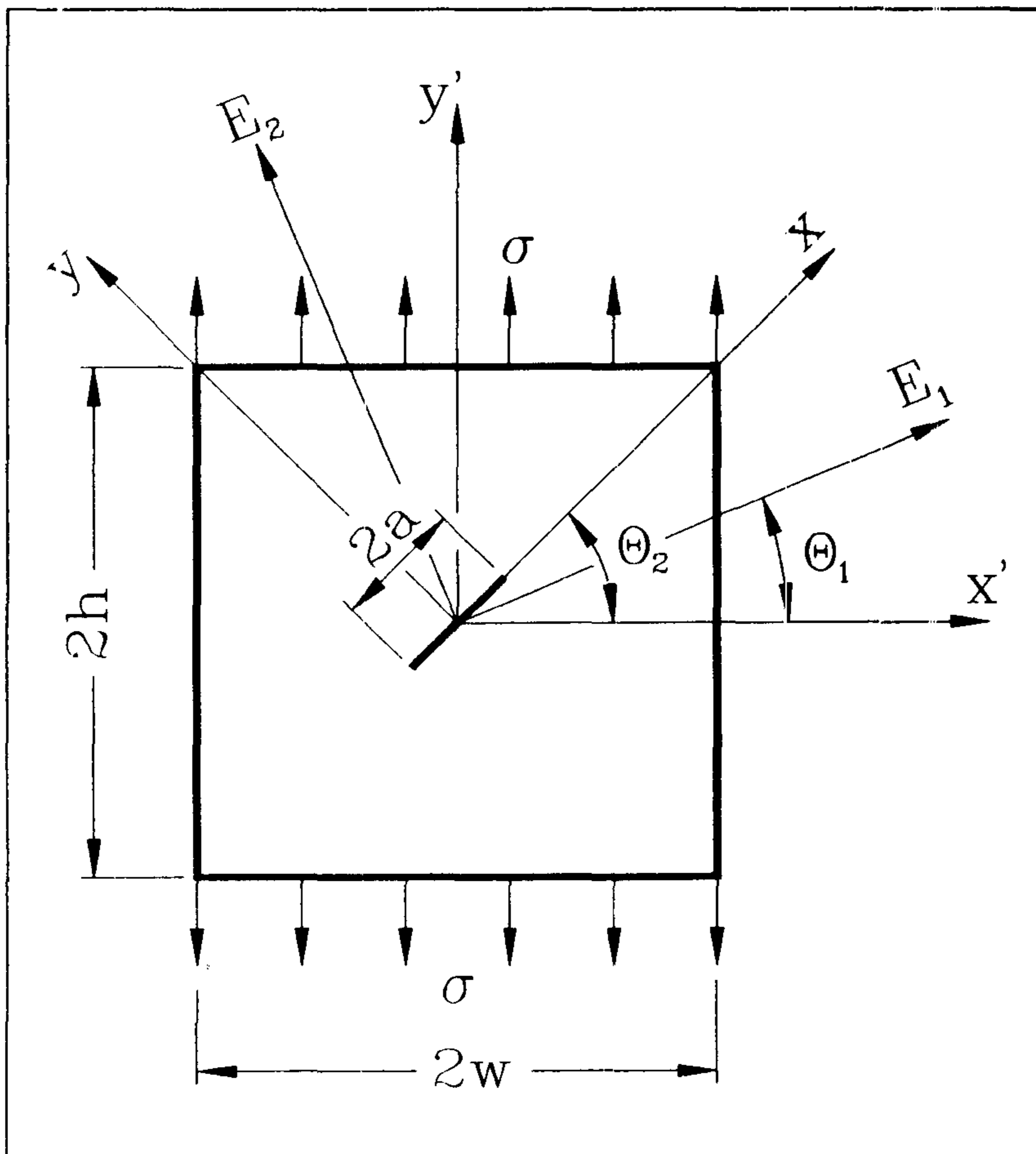
شکل ۴: مسیر انتگرال گیری به شکل مستطیلی که اضلاع آن به موازات محورهای دستگاه مختصات مرجع قرار گرفته اند.

می توان به شکل ساده زیر نوشت:

برای مسیر عمودی

$$J_1 = \int \{ [(W - \tau_x \varepsilon_x - \sigma_{xy} \gamma_{xy}) \cos\varphi - \tau_{xy} \varepsilon_y \sin\varphi] dy - [\sigma_x \sin\varphi - \tau_{xy} \cos\varphi] du \} \quad (52)$$

$$J_2 = \int \{ [(-W + \sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \sin\varphi - \tau_{xy} \varepsilon_y \cos\varphi] dy$$



شکل ۵: ترک مورب در صفحه‌ای مستطیل شکل تحت بار یکنواخت کششی.

معادله مشخصه (۱۳) در دستگاههای مختصات xy و $x'y'$ تغییر خواهند کرد. لذا، برای تعیین ضرایب در این دو دستگاه بایستی از رابطه تبدیل خواص مواد استفاده شود. این رابطه در مرجع [۲۱] برای حالت تنش صفحه‌ای بصورت زیر بدست آمده است؛

$$[\alpha] = [T]^T \cdot [\alpha'] \cdot [T] \quad (54)$$

که در آن ماتریس تبدیل $[T]$ با رابطه زیر مشخص می شود، همچنین $[T]^T$ ترانزاده ماتریس $[T]$ ، $[\alpha']$ ماتریس ضرایب معلوم در دستگاه $E_1 E_2$ و $[\alpha]$ ماتریس ضرایب مجهول می باشد که با قراردادن $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_1 - \theta_2$ به ترتیب ماتریس ضرایب در دستگاههای $x'y'$ و xy بدست می آید.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2 \sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2 \sin\theta \cdot \cos\theta \\ -\sin\theta \cdot \cos\theta & \sin\theta \cdot \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (55)$$

در جدول (۱) ضرایب الاستیک که به ازای زوایای

ارتوتروپیک به طول $2h$ و عرض $2w$ که تحت بار کششی یکنواخت σ است، نشان می دهد. دستگاه مختصات $x'y'$ به عنوان دستگاه مرجع انتخاب شده است و جهات مختلف نسبت به آن سنجیده می شود. محورهای اصلی ارتوتروپیک نسبت به دستگاه مختصات مرجع با زاویه θ_1 در نظر گرفته شده اند. همچنین دستگاه مختصات xy با دورانی به اندازه θ_2 نسبت به دستگاه مختصات مرجع، بدست می آید. ترک روی محور x از دستگاه مختصات xy قرار دارد. برای زوایای θ_1 و θ_2 و طول ترک a ، می توان مقادیر مختلف در نظر گرفت. به منظور مقایسه نتایج روش حاضر با مرجع [۴] ثابتهای مواد به صورت زیر در نظر گرفته شده اند.

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= 10^{-6} & \nu_{12} &= 0/29 \\ E_1 &= 7 \times 10^6 & E_2 &= 2/5 \times 10^6 \end{aligned}$$

در نتیجه برای این ماده، ضرایب الاستیک در رابطه (۷) از روابط زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{E_1} & \alpha_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \alpha_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ \alpha_{66} &= \frac{1}{\mu_{12}} & \alpha_{16} &= \alpha_{26} & &= 0 \end{aligned}$$

مقادیر فوق برای مدول یانگ و مدول برشی برحسب psi هستند که در روش حاضر برحسب مگاپاسکال بکار برده خواهند شد. شایان توجه است که ثابتهای مورد بحث، مربوط به یکی از مواد مرکب کربن - کربن به نام Glass-epoxy می باشد. مواد مذکور از مقاومت و مدول مکانیکی بالا همراه با پایداری حرارتی و شیمیایی عالی در دمای بالا برخوردارند و کاربرد وسیعی در صنایع هوایی دارند.

در این مثال، نسبت طول به عرض صفحه برابر واحد و مقدار بار ۵۰ مگاپاسکال فرض شده است. نسبت طول ترک به عرض صفحه $0/2$ و زاویه انحراف ترک نسبت به دستگاه مختصات مرجع ۴۵ درجه در نظر گرفته شده است. زاویه θ_1 که نمایانگر زاویه بین محور اصلی صلب تر ماده ارتوتروپیک و محور افقی دستگاه مختصات مرجع است از صفر تا ۱۸۰ درجه تغییر می کند. بدیهی است که با تغییر این زاویه، ضرایب الاستیک و در نتیجه ریشه های

شکلی انجام شده که امکان تعریف مسیرهای مستطیل شکل به موازات دستگاه مختصات مرجع فراهم باشد. به منظور دستیابی به شبکه گره‌بندی بهینه از نظر نحوه گره‌بندی و تعداد گررها و المانهای مورد استفاده، از ویژگی استقلال از مسیر استفاده شده است. زیرا از آنجا که نتایج حاصل از روش اجزاء محدود تقریبی است، در نتیجه مقادیر انتگرال J نیز که با استفاده از این نتایج، در مسیرهای مختلف، محاسبه می‌شوند، با یکدیگر کمی اختلاف خواهند داشت و هر چه گره‌بندی ریزتر و به پیامد

مختلف $\theta_1 - \theta_2$ ، به کمک نرم‌افزار MATLAB بدست آمده‌اند، نشان داده شده است.

در جدول (۲) نیز ریشه‌های معادله مشخصه (۱۳) که متناظر با مقادیر جدول (۱) با حل این معادله به کمک نرم‌افزار MATLAB بدست آمده، نشان داده شده است. برای تعیین مؤلفه‌های J با استفاده از روابط (۵۲) بایستی میدانهای تنش و تغییر مکان در جسم مورد نظر بدست آمده باشد. در مثالهای ارائه شده برای این منظور از روش اجزاء محدود استفاده شده است. گره‌بندی نیز به

جدول ۱: ضرایب الاستیک برای جهات مختلف خواص مواد، در ماده مرکب Glass-epoxy.

$\theta_1 - \theta_2$	$\alpha_{11} \times 10^5$	$\alpha_{12} \times 10^5$	$\alpha_{16} \times 10^5$	$\alpha_{22} \times 10^5$	$\alpha_{26} \times 10^5$	$\alpha_{66} \times 10^5$
۰	۲/۰۷۱۴	-۰/۶۰۰۸	۰	۵/۸	۰	۱۴/۵
۱۵	۲/۶۶۰۴	-۰/۹۳۹۹	-۲/۱۰۷۲	۵/۸۸۹۴	۰/۲۴۲۹	۱۳/۱۴۳۲
۳۰	۴/۰۲۱۲	-۱/۶۱۸۳	-۲/۷۸۹۵	۵/۸۸۵۴	-۰/۴۳۹۵	۱۰/۴۲۹۶
۴۵	۵/۲۹۲۵	-۱/۹۵۷۵	-۱/۸۶۴۳	۵/۲۹۲۵	-۱/۸۶۴۳	۹/۰۷۲۹
۶۰	۵/۸۸۵۴	-۱/۶۱۸۳	-۰/۴۳۹۵	۴/۰۲۱۲	-۲/۷۸۹۵	۱۰/۴۲۹۶
۷۵	۵/۸۸۹۴	-۰/۹۳۹۹	۰/۲۴۲۹	۲/۶۶۰۳۹	-۲/۱۰۷۲	۱۳/۱۴۳۲
۹۰	۵/۸	-۰/۶۰۰۸	۰	۲/۰۷۱۴	۰	۱۴/۵
۱۰۵	۵/۸۸۹۴	-۰/۹۳۹۹	-۰/۲۴۲۹	۲/۶۶۰۳۹	۲/۱۰۷۲	۱۳/۱۴۳۲
۱۲۰	۵/۸۸۵۴	-۱/۶۱۸۳	۰/۴۳۹۵	۴/۰۲۱۲	۲/۷۸۹۵	۱۰/۴۲۹۶
۱۳۵	۵/۲۹۲۵	-۱/۹۵۷۵	۱/۸۶۴۳	۵/۲۹۲۵	۱/۸۶۴۳	۹/۰۷۲۹
۱۵۰	۴/۰۲۱۲	-۱/۶۱۸۳	۲/۷۸۹۵	۵/۸۸۵۴	۰/۴۳۹۵	۱۰/۴۲۹۶
۱۶۵	۲/۶۶۰۴	-۰/۹۳۹۹	۲/۱۰۷۲	۵/۸۸۹۴	-۰/۲۴۲۹	۱۳/۱۴۳۲
۱۸۰	۲/۰۷۱۴	-۰/۶۰۰۸	۰	۵/۸	۰	۱۴/۵

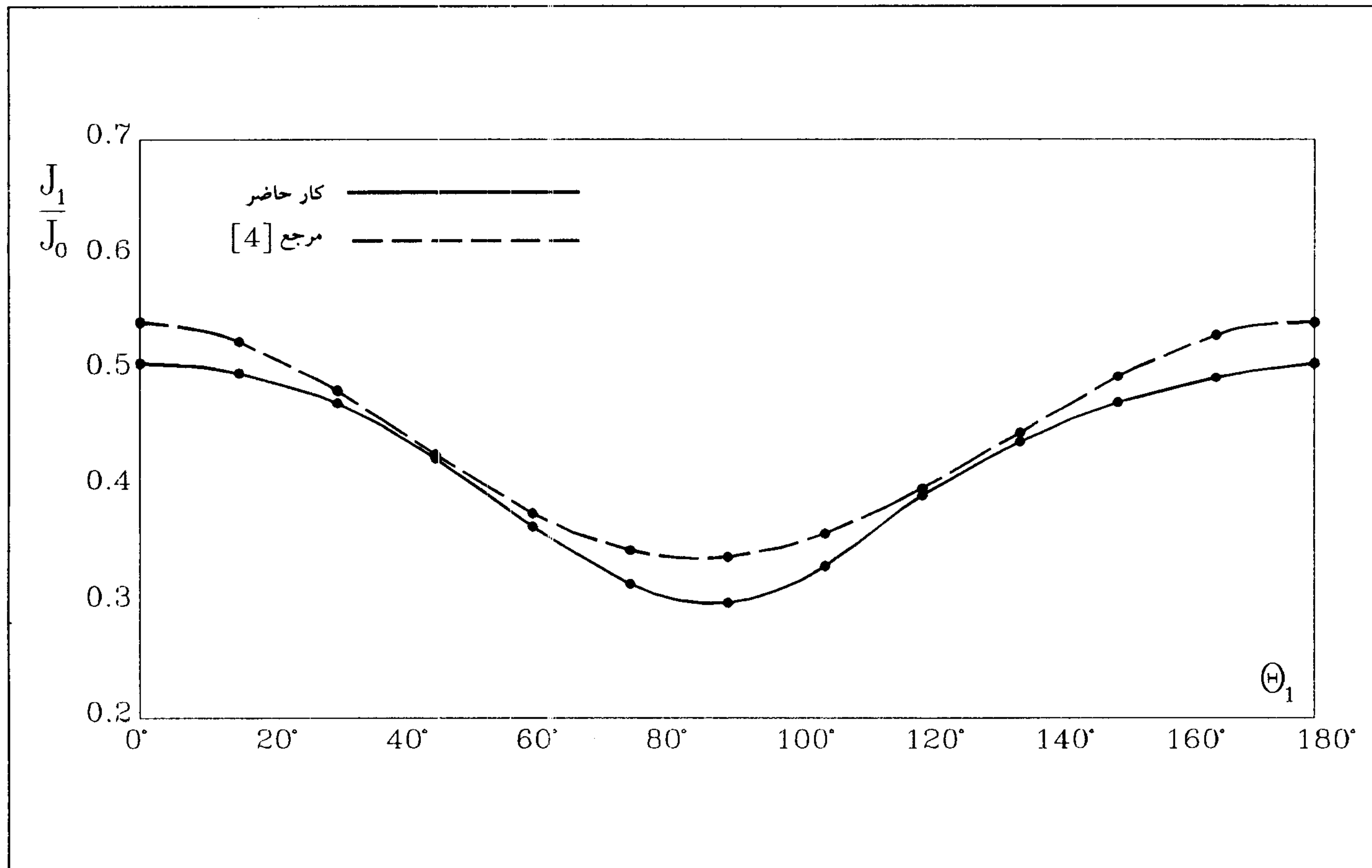
جدول ۲: ریشه‌های معادله مشخصه (۱۳) متناظر با ضرایب جدول (۱).

$\theta_1 - \theta_2$	α_1	β_1	α_2	β_2
۰	۰	۲/۴۳۹۱	۰	۰/۶۸۶۰
۱۵	-۰/۹۲۹۳	۱/۸۳۱۸	۰/۱۳۷۲	۰/۷۱۱۳
۳۰	-۰/۹۵۷۹	۱/۰۹۰۲	۰/۲۶۴۲	۰/۷۹۰۷
۴۵	-۰/۷۱۲۲	۰/۷۰۲۰	۰/۳۶۰۰	۰/۹۳۳۰
۶۰	-۰/۴۵۴۸	۰/۵۱۷۶	۰/۳۸۰۱	۱/۱۳۷۷
۷۵	-۰/۲۲۰۳	۰/۴۳۴۲	۰/۲۶۱۵	۱/۳۵۵۵
۹۰	۰	۰/۴۱۰۰	۰	۱/۴۵۷۷
۱۰۵	۰/۲۲۰۳	۰/۴۳۴۲	-۰/۲۶۱۵	۱/۳۵۵۵
۱۲۰	۰/۴۵۴۸	۰/۵۱۷۶	-۰/۳۸۰۱	-۱/۱۳۷۷
۱۳۵	۰/۷۱۲۲	۰/۷۰۲۰	-۰/۳۶۰۰	۰/۹۳۳۰
۱۵۰	۰/۹۵۷۹	۱/۰۹۰۲	-۰/۲۶۴۲	۰/۷۱۱۳
۱۶۵	۰/۹۲۹۳	۱/۸۳۱۸	-۰/۱۳۷۲	۰/۷۱۱۳
۱۸۰	۰	۲/۴۳۹۱	۰	۰/۶۸۶

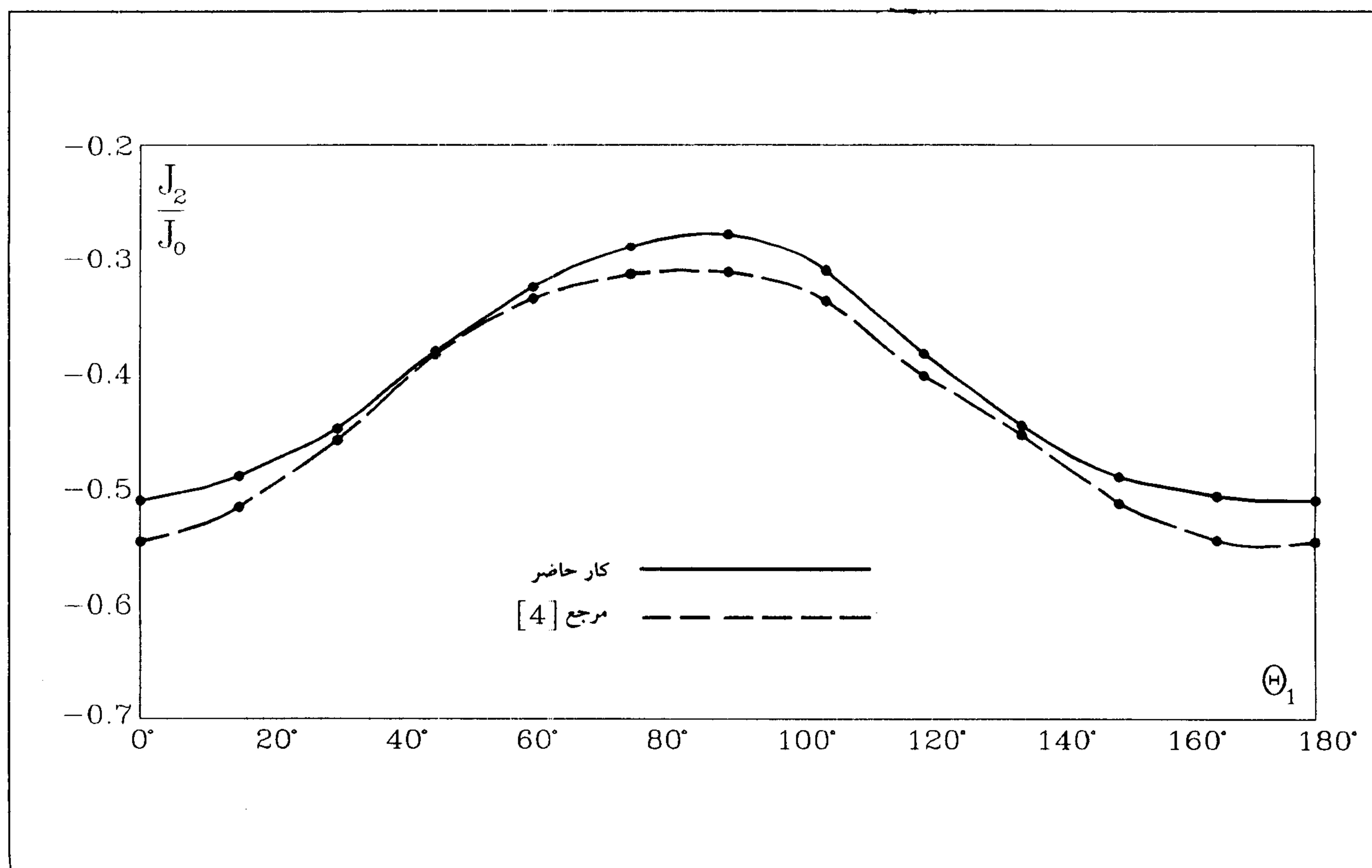
مقادیر انتگرال در مسیرهای مختلف به حد معینی قرار داد. در مثالهای حاضر، چنین روندی بکار گرفته شده است.

پس از تعیین تنشها و تغییر مکانهای گرهی به ازای هر

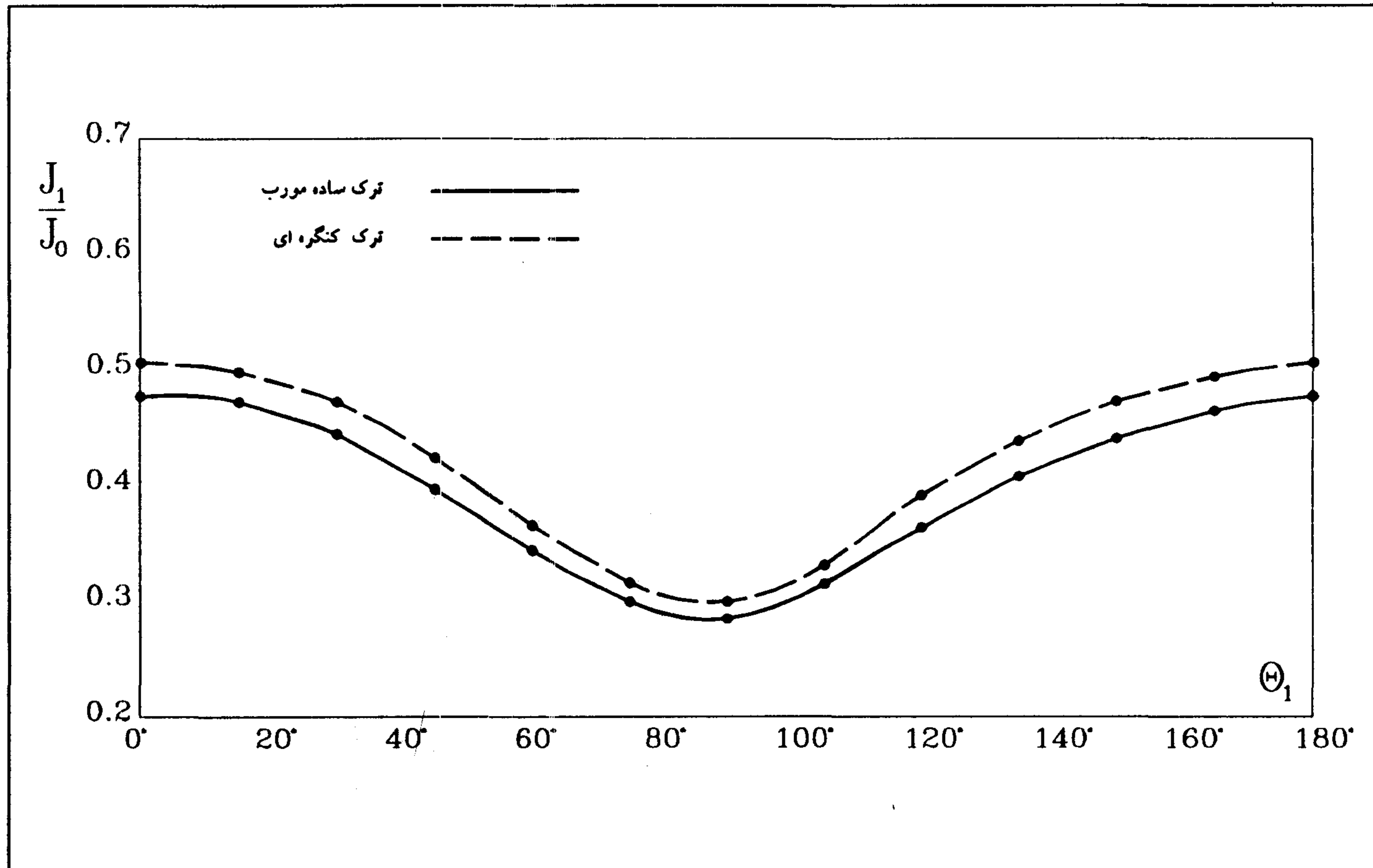
آن، نتایج مذکور دقیقتر باشد، میزان این اختلاف نیز کمتر خواهد شد. حالت آرمانی این است که این اختلاف صفر باشد ولی در کاربردهای عملی می توان ملاک را برای دستیابی به گره بندی قابل قبول، رسیدن اختلاف بین



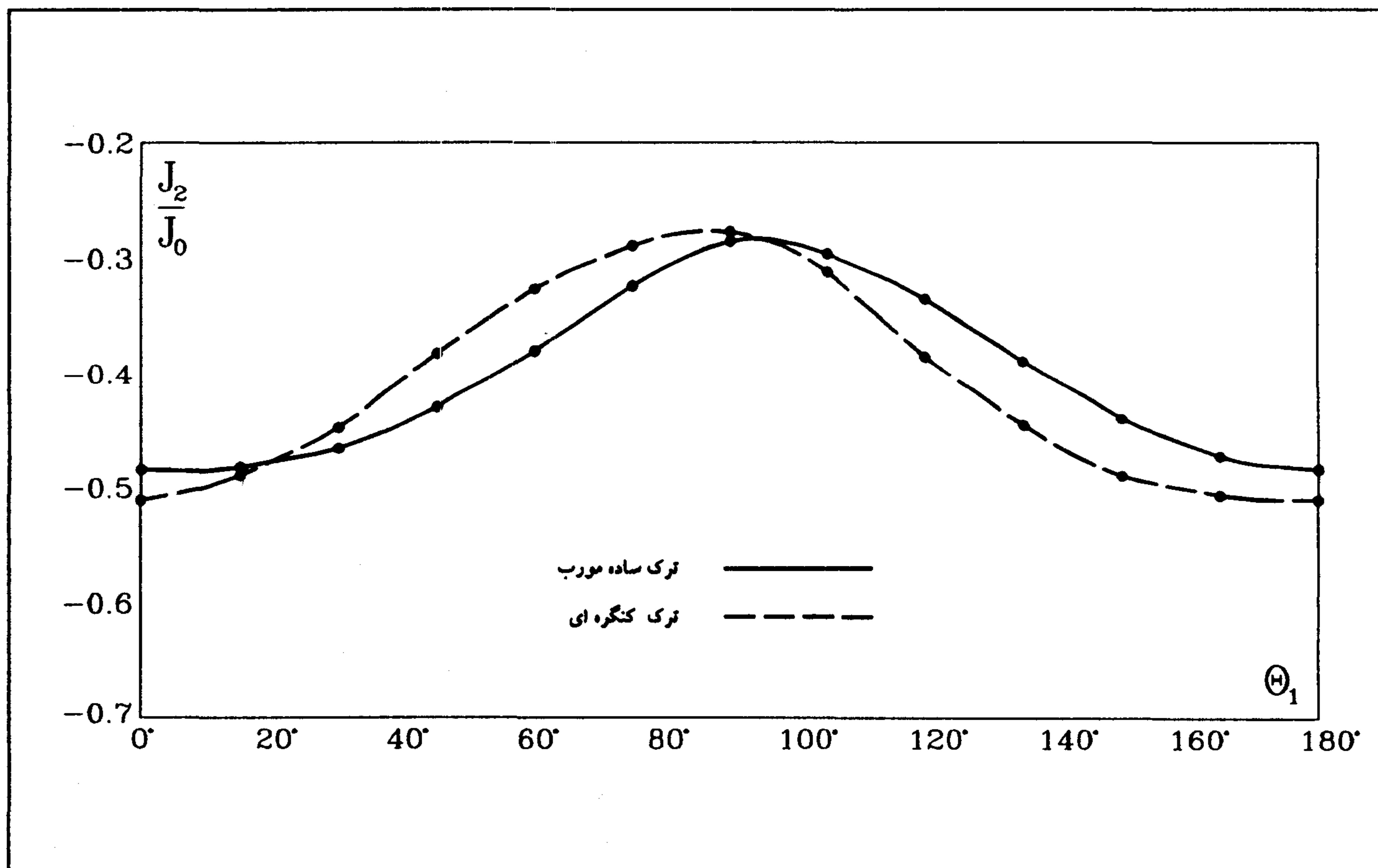
شکل ۶: مقایسه مقادیر بی بعد J_1 به ازای جهات مختلف خواص مواد.



شکل (۷): مقایسه مقادیر بی بعد J_2 به ازای جهات مختلف خواص مواد



شکل ۹: مقایسه مقادیر بی بعد J_1 به ازای جهات مختلف مواد در صفحه‌ای دارای ترک مرکزی کنگره‌ای شکل از جنس Glass-epoxy با صفحه‌ای با همان مشخصات ولی دارای ترک ساده مورب (مثال قبل).



شکل (۱۰): مقایسه مقادیر بی بعد J_2 به ازای جهات مختلف خواص مواد در صفحه‌ای دارای ترک مرکزی کنگره‌ای شکل از جنس Glass-epoxy با صفحه‌ای با همان مشخصات ولی دارای ترک ساده مورب (مثال قبل).

که مشخص کننده میدان تنش حول نوک ترک است، در ناحیه‌ای دور از نوک ترک محاسبه کرد.

در این مقاله پس از مروری بر سوابق تحلیل مسائل حالت ترکیبی در صفحات غیرمتجانس با استفاده از روشهای عددی، بررسی کوتاهی نیز در خصوص روش انتگرال J انجام گرفت. به منظور مقایسه نتایج، روابط بین J با ضرایب شدت تنش در حالت ترکیبی، برای مواد متجانس و غیرمتجانس بدست آمد. برای اینکار پس از بدست آوردن روابط میدانهای تنش و تغییر مکان تکین، با استفاده از روش کار مجازی، روابط مورد نیاز استخراج گردید. برای محاسبه عددی انتگرال J با در نظر گرفتن مسیرهائی به موازات دستگاه مختصات مرجع جسم، معادلات لازم به شکلی بازنویسی شد که شامل مشتقات جزئی نباشند. این کار، این امکان را فراهم می‌کند که از نرم افزارهای معمول که برای تحلیل سازه‌ها براساس روش اجزاء محدود تهیه شده است، برای تعیین مقادیر لازم در محاسبه انتگرال سود جست. به منظور دستیابی به حالتی بهینه از نظر تعداد گره‌ها و المانهای مورد استفاده و نحوه گره بندی، ملاک بر استقلال از مسیر J قرار داده شد. برای محاسبه عددی انتگرال J از یک برنامه کامپیوتری استفاده گردید که داده‌های ورودی آن تنش، تغییر مکان و مختصات نقاط گرهی روی مسیر انتگرال گیری است که خود برنامه آنها را از فایل‌های اطلاعات ورودی و خروجی اجزاء محدود، استخراج می‌کند. همچنین به منظور محاسبه ریشه‌های معادله مشخصه و ضرایب الاستیک برای خواص جهتی متفاوت در مواد غیرمتجانس از نرم افزار MATLAB استفاده شد. برای هر حالت معین، ابتدا مقادیر J در مسیرهای مختلف تعیین و سپس میانگین آنها برای J منظور شد. پس از آماده شدن مقدمات، به منظور مقایسه نتایج، مثال حل شده در مرجع [۴] مشتمل بر ترکی مرکزی در صفحه‌ای از جنس ماده مرکب^(۱) و در حالت ترکیبی، حل گردید که توافق نسبتاً خوبی بین نتایج بدست آمده با نتایج مرجع مذکور برقرار

مراجع

- 1 - Wilson, W. K. (1971). "Numerical method for determining stress intensity factors of an interior crack in a finite plate." *Journal of Basic Engineering*, 93, 685-690.

بود. همچنین به منظور نشان دادن توانائی روش حاضر در تحلیل مسائل پیچیده، مسئله ترکی مرکزی و کنگره‌ای شکل در حالت ترکیبی و در صفحه‌ای از جنس مواد غیرمتجانس حل گردید. مقایسه بین نتایج مثال دوم با مثال اول حاکی از این نکته است که در مواردی که ترک به صورت مضرس ایجاد شده است، نباید طول ظاهری ترک مدنظر قرار گیرد بلکه بایستی طول واقعی آن در محاسبات منظور شود. البته اظهار نظر قطعی در این خصوص، مستلزم بررسی بیشتر با در نظر گرفتن ترکهای کنگره‌ای با زوایای مختلف شکستگی است. بایستی خاطر نشان گردد که چنانچه چگالی انرژی کرنشی W از رابطه (۴۲) محاسبه شود، روابط (۵۲)، را می‌توان برای حالت غیرخطی نیز بکار برد. زیرا در استخراج این روابط فرضی در خصوص رفتار مواد، اعم از خطی یا غیرخطی صورت نگرفته است. لذا در روش حاضر، منظور کردن اثر ناحیه پلاستیک اطراف نوک ترک در محاسبات، تنها به توانایی تحلیل پلاستیک در روش اجزاء محدود مکملی بستگی دارد که برای محاسبه تنش، کرنش و تغییر مکان نقاط گرهی بکار می‌رود. لازم به توضیح است که چنانچه اثر ناحیه پلاستیک اطراف نوک ترک در محاسبات منظور نگردد و تغییر شکل در تمام نقاط جسم، الاستیک خطی فرض شود، در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، مقادیر حاصل برای ضرایب شدت تنش، یکسان خواهد بود. واضح است که دلیل این امر خطی بودن معادلات مورد استفاده در محاسبات با توجه به فرض مذکور خواهد بود. برای استفاده از روش حاضر در کاربردهای عملی توصیه می‌شود، برنامه‌ای تهیه شود که عملیات گره‌بندی، شبکه‌بندی و تهیه پرونده اطلاعات ورودی را تنها با معلوم بودن مشخصات هندسی ترک و مرز صفحه، بصورت خودکار انجام دهد. در خصوص روابط (۴۰) بایستی اشاره گردد که به علت غیرخطی بودن این روابط، کاربرد آنها به منظور تعیین ضرایب شدت تنش از روی مؤلفه‌های J برای حالت ترکیبی در مواد غیرمتجانس، توصیه نمی‌شود.

- 2 - Cheung, Y.K., Woo, C. W. and Wang, Y. H. (1989). "Stress intensity factors for a circular arc crack by boundary collocation method." *Engineering Fracture Mechanics*, 34, 841-849.
- 3 - Yum, Y. J. and Hong, C. S. (1991). "Stress intensity factors in finite orthotropic plates with a crack under mixed-mode deformation." *International Journal of Fracture*, 47, 53-67.
- 4 - Woo, C. W. and Wang, Y. H. (1993). "Analysis of an internal crack in a finite anisotropic plate." *International Journal of Fracture*, 52, 203-218.
- 5 - Chan, K. S. and Cruse, T. A. (1986). *Engineering Fracture Mechanics*, 23, 863-874.
- 6 - Wang, S. S., Yau, J. F. and Corten, H. T. (1980). "A mixed-mode cracks analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity." *International Journal of Fracture*, 16, 247-259.
- 7 - Deukman An. (1987). "Weight function theory for a rectilinear anisotropic body." *International Journal of Fracture*, 34, 85-109.
- 8 - Sham, T. L. and Zhou, Y. (1989). *International Journal of Fracture*, 40, 13-41.
- 9 - Eshelby, J. D. (1956). "The continuum theory of lattice defects." *Solid State Physics*, 3, Academic Press.
- 10 - Sanders, J. L. (1960). "On the Griffith-Irwin fracture theory." *Journal of Applied Mechanics*, 27, 352-353.
- 11 - Irwin, G. R. (1957). "Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate." *Journal of Applied Mechanics*, 24, 361-364.
- 12 - Cherpanov, G. P. (1967). "Crack propagation in continuous media." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics, English Translation*, 31, 3, 504.
- 13 - Rice, J. R. (1968). "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks." *Journal of Applied Mechanics*, 35, 379-386.
- 14 - Knowles, J. K. and Eli Sternberg. (1972). "On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics." *Archive of Rational Mechanics Analysis*, 44, 187-211.
- 15 - Budiansky, B. and Rice, J. R. (1973). "Conservation laws and energy-release rates." *Journal of Applied Mechanics*, 40, 201-203.
- 16 - Hellen, T. K. and Blackburn, W. S. (1975). "The calculation of stress intensity factors for combined tensile and shear loading." *International Journal of Fracture*, 11, 605-617.
- 17 - Bergkvist, H. and Hough, G. L. (1977). "J-Integral related quantities in axisymmetric cases." *International Journal of Fracture*, 13, 556-558.
- 18 - Wang, S. S., Yau, J. F. and Corten, H. T. (1980). "A mixed-mode cracks analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity." *International Journal of Fracture*, 16, 247-259.
- 19 - Chiarelli, M. and Frediani, A. (1993). "A computation of the three-dimensional J-Integral for elastic materials with a view to applications in fracture mechanics." *Engineering Fracture Mechanics*, 44, 763-788.
- 20 - Lekhnitskiy, S. G. (1963). "Theory of elasticity of an anisotropic elastic body." Holden-day, SanFrancisco.
- 21 - Jones, R. M. (1975). "Mechanics of composite materials." McGraw-hill, Washington.D.C.