

حل تحلیلی مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در محیط استوانه‌ای (قسمت دوم: حل عددی)

محمد رحیمیان

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

مرتضی اسکندری قادی

دانشجوی دوره دکتری گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

علیرضا حیدرپور

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۷۶/۱۲/۶، تاریخ تصویب ۷۷/۷/۲۵)

چکیده

در این مقاله با استفاده از روشهای عددی، نتایج گرافیکی تغییر مکان، تغییرات درجه حرارت و تنشها برای حل تحلیلی مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در یک لوله استوانه‌ای بلند در حالت متقارن محوری ارائه می‌شود. این نتایج گرافیکی با استفاده از جوابهای حاصل از حل تحلیلی است که در قسمت اول مقاله برای مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی بدست آمده است [۱۱]. نتایج بدست آمده از این مقاله با روشهای عددی مرجع [۲] مقایسه شده‌اند. برای بدست آوردن نتایج در فضای زمانی، نیاز به تعیین انتگرال معکوس لاپلاس برای تغییر مکان و درجه حرارت می‌باشد. به علت پیچیدگی توابع زیر علامت انتگرال، تعیین انتگرال معکوس به روش تحلیلی بسیار مشکل و شاید غیرممکن است، لذا در این مقاله تبدیل معکوس لاپلاس به صورت عددی انجام می‌گیرد که انجام آن نیاز به تمهیدات خاصی دارد، از آن جمله می‌توان تعیین حدود بی‌نهایت برای محاسبات عددی، برآورد دقیق تابع زیر علامت انتگرال با توجه به نقاط تکین^(۱) و تعیین عدد حقیقی مناسب (c) در حدود انتگرال‌گیری معکوس لاپلاس را نام برد. برای برآورد عددی انتگرالها، تابع پله‌ای اصلاح شده، تابع ضربه‌ای و تابع دیراک^(۲) به عنوان توابع بارگذاری نیرویی و حرارتی در نظر گرفته می‌شود.

کلیدواژه‌ها: ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی، متقارن محوری، تبدیل لاپلاس، روشهای عددی، تابع دیراک، نقاط تکین

مقدمه

مسائل ترموالاستیسیته را می‌توان به صورت زیر تقسیم کرد: حالت نیمه وابسته که در آن ابتدا تغییرات درجه حرارت از معادله انتقال حرارت بدست می‌آید و با قرار دادن تغییرات درجه حرارت در معادله حرکت، تغییر مکانها بدست می‌آیند. در این حالت اثر کرنشها و سرعت تغییر آنها بر تغییرات درجه حرارت مطالعه نمی‌شود و فقط اثر تغییرات درجه حرارت بر تغییر مکانها، کرنشها و تنشها در نظر گرفته می‌شوند، بنابراین زمانی این حل قابل قبول است که سرعت تغییر کرنش کوچک و قابل صرف نظر باشد.

حالت وابسته که در آن درجه حرارت و تغییر مکان برهم تاثیر گذاشته و مستقل نیستند، در این حالت علاوه بر سه معادله حرکت که باهم درگیر هستند، معادله انتقال حرارت نیز با آنها درگیر است. این مسائل در حالت کلی بوسیله Nowacki [۳] و Kupradze [۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

حل تحلیلی مسائل ترموالاستیسیته در حالت وابسته برای لوله‌های طویل با مقطع دایره‌ای و ضخامت دلخواه

که در آن α_i ضریب انبساط حرارتی، c ظرفیت حرارتی ویژه، T_0 درجه حرارت محیط پیرامون و g شتاب ثقل است. براساس حل تحلیلی انجام شده در قسمت اول مقاله، جوابهای تغییر مکان شعاعی و تغییرات درجه حرارت در فضای لاپلاس به صورت زیر درآمده اند:

$$u = A_1 I_1(\sqrt{\mu_1 r}) + B_1 K_1(\sqrt{\mu_1 r}) + A_2 I_1(\sqrt{\mu_2 r}) + B_2 K_1(\sqrt{\mu_2 r})$$

$$T = \frac{1}{c_p} \{ A_1 \sqrt{\mu_1} I_0(\sqrt{\mu_1 r}) \left[\frac{\mu_1 - k_{11}}{k_{12}} - c \lambda_1 p \right] - B_1 \sqrt{\mu_1} K_0(\sqrt{\mu_1 r}) \left[\frac{\mu_1 - k_{11}}{k_{12}} - c \lambda_1 p \right] + A_2 \sqrt{\mu_2} I_0(\sqrt{\mu_2 r}) \left[\frac{\mu_2 - k_{11}}{k_{12}} - c \lambda_1 p \right] - B_2 \sqrt{\mu_2} K_0(\sqrt{\mu_2 r}) \left[\frac{\mu_2 - k_{11}}{k_{12}} - c \lambda_1 p \right] \} \quad (4)$$

پارامترهای این روابط در قسمت اول مقاله توضیح داده شده اند. تبدیل معکوس توابع u و T به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{u}(r,p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(r,t) dt,$$

$$\bar{T}(r,p) = \int_0^\infty e^{-pt} T(r,t) dt, \quad (5)$$

با استفاده از این تعریف تغییر مکان u و تغییر درجه حرارت T در فضای واقعی برابرند با:

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \bar{u}(r,p) dp$$

$$T(r,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \bar{T}(r,p) dp \quad (6)$$

با قرار دادن توابع تغییر مکان $u(r,p)$ و تغییر درجه حرارت $T(r,p)$ از معادلات (۴) در روابط (۶)، توابع $u(r,t)$ و $T(r,t)$ در فضای زمانی بدست می آیند. به منظور در اختیار داشتن مقادیر عددی این توابع نیاز به برآورد انتگرالهای روابط (۶) می باشد. به علت پیچیدگی توابع $u(r,p)$ و $T(r,p)$ تعیین این انتگرالها به صورت تحلیلی

در حالت متقارن محوری در قسمت اول مقاله آمده است. این جوابها برحسب تغییر مکان شعاعی و تغییرات درجه حرارت به صورت تحلیلی در فضای لاپلاس بدست آمده و برحسب توابع بسل معرفی شده اند.

برای تعیین جواب در فضای واقعی نیاز به تعیین انتگرال معکوس لاپلاس می باشد که در این مقاله به صورت عددی به تعیین آنها پرداخته می شود. برای تعیین جوابها به روش عددی بارگذارهای حرارتی و نیرویی به صورت توابع دیراک، پله ای^(۱) و ضربه ای در نظر گرفته شده اند. تعیین جوابهای این مسئله به روشهای اجزاء محدود و تفاضلهای محدود بوسیله Ghoneim و Chen [۲] در سال ۱۹۸۳ بدست آمده اند. جوابهای بدست آمده توسط آنها در مرز داخلی خطاهای فاحشی دارد که در نتایج گرافیکی نشان داده می شود.

انتگرال گیری عددی

معادلات کلاسیک ترموالاستیسیته وابسته با چهار معادله دیفرانسیل جزئی بیان می شوند که همان معادلات ناویه وانرزی بوده و با روابط زیر نشان داده می شوند [۱۱]:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + F - \lambda \nabla T = \rho \ddot{u}$$

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a} \dot{T} - \eta \nabla \cdot \dot{u} = -\frac{Q}{K} \quad (1)$$

که در آن u بردار تغییر مکان، T درجه حرارت می باشند. شرایط اولیه برای u و T به صورت زیر هستند:

$$u(r,0) = 0$$

$$\dot{u}(r,0) = 0 \quad (2)$$

$$T(r,0) = 0$$

در روابط اخیر λ و μ ثابتهای لامه، ρ جرم مخصوص، Q حرارت تولید شده در واحد حجم، K ضریب هدایت حرارتی ویژه و a ضریب نفوذپذیری می باشند. η و γ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_i$$

$$\eta = \frac{\gamma T_0}{\rho c a g} = \frac{\gamma T_0}{kg} \quad (3)$$

$$a = \frac{k}{\rho c}$$

$$f_2(p) = \frac{-0.015}{(p+2)^2} \quad (12)$$

$$f_3(p) = 1 \quad (13)$$

$$g_1(p) = 1 \quad (14)$$

برای حل عددی مسئله، مشخصات مکانیکی و انتقال حرارت استوانه به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۲]:

$$\rho = 7880 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (\text{جرم مخصوص})$$

$$c = 502 \frac{\text{jul}}{\text{KgK}^\circ} \quad (\text{ظرفیت حرارتی ویژه})$$

$$k = 50.2 \frac{\text{jul}}{\text{m sec K}^\circ} \quad (\text{ضریب هدایت حرارتی})$$

$$E = 2 \times 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (\text{ضریب ارتجاعی})$$

$$a = \frac{k}{\rho g c} = 1.27 \times 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \quad (\text{ضریب انتشار})$$

$$\alpha = 11.7 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{K}^\circ} \quad (\text{ضریب انبساط طولی})$$

$$h_1 = 5000 \frac{\text{jul}}{\text{m}^2 \text{ sec}} \quad (\text{ضریب انتقال حرارت در مرز داخل})$$

$$h_2 = 75 \sim 200 \frac{\text{jul}}{\text{m}^2 \text{ sec K}^\circ} \quad (\text{ضریب انتقال حرارت در مرز خارج})$$

در ادامه برآورد عددی u و T برای هریک از توابع بارگذاری به صورتهای جداگانه بررسی شده‌اند که در بخشهای بعدی ارائه می شوند. تمام موارد فوق را می توان با توجه به اینکه در مرز داخل، باید تنش شعاعی هم شکل تابع تنش نیرویی ورودی باشد بررسی کرد.

پاسخ به تنش پله ای اصلاحی شده ^(۱)

اولین سری محاسبات برای تنش پله ای اصلاح شده که به صورت زیر معرفی گردیده، انجام شده است:

$$f(t) = -0.003 \times (1 - e^{-10t})$$

شکلهای (۱)، (۲) و (۳) توابع F شامل پاسخ تنش شعاعی، تنش مماسی، تغییر مکان و درجه حرارت بر حسب زمان را در نقاط داخلی، میانی و خارجی استوانه، هنگامی که تنش نیرویی (بارگذاری) به صورت $f(\tau)$ تعریف شده، براساس روش این مقاله نشان می دهند.

زمان لازم برای رسیدن موج به فاصله ای برابر r از مرکز دایره برابر $c_1 / (r - T_1)$ می باشد. از آنجائیکه زمان بدون بعد

بسیار مشکل و شاید غیرممکن است. بدین منظور این انتگرالها به صورت عددی برآورد می شوند. توابع زیر علامت انتگرال (انتگران) دارای قطبهایی (نقاط تکین) در مسیر انتگرال گیری می باشند که برآورد عددی آنها را مشکلتر می سازد. روشهایی جهت برآورد عددی انتگرالهای Singular ارائه شده اند که برخی از آنها در مراجع [۷] تا [۱۰] آمده اند. یکی از روشهای برآورد انتگرالهای Singular استفاده از آنالیز توابع مختلط می باشد. Hui و Mukherjee [۸] براساس آنالیز توابع مختلط روشی جهت برآورد این انتگرالها پیشنهاد کرده اند که در این مقاله از آن استفاده شده است. براساس این روش، انتگرال:

$$I(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(p) dp}{(p-x)^{n+1}} \quad t \in c$$

را می توان با جایگزینی $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} z = x + i\varepsilon$ به جای x محاسبه نمود. یعنی متغیر حقیقی x با متغیر مختلط z به طوری که قسمت موهومی z بسیار کوچک است، جایگزین می شود. واضح است که دقت برآورد به اندازه ε وابسته است و اندازه های کوچکتر، جوابهای واقعیت را نتیجه می دهند. در اینجا ε چنان بدست آمده است $(\varepsilon = 0.0001)$ که تنشهای $\sigma(r,t)$ در مرز داخلی دقیقاً برابر تنشهای ورودی و در مرز خارجی نیز برابر صفر باشند.

در این مقاله توابع بارگذاریهای نیرویی f و حرارتی g به صورتهای زیر در نظر گرفته شده اند:

$$f_1(\tau) = -0.003 \times (1 - e^{-10\tau}) \quad (7)$$

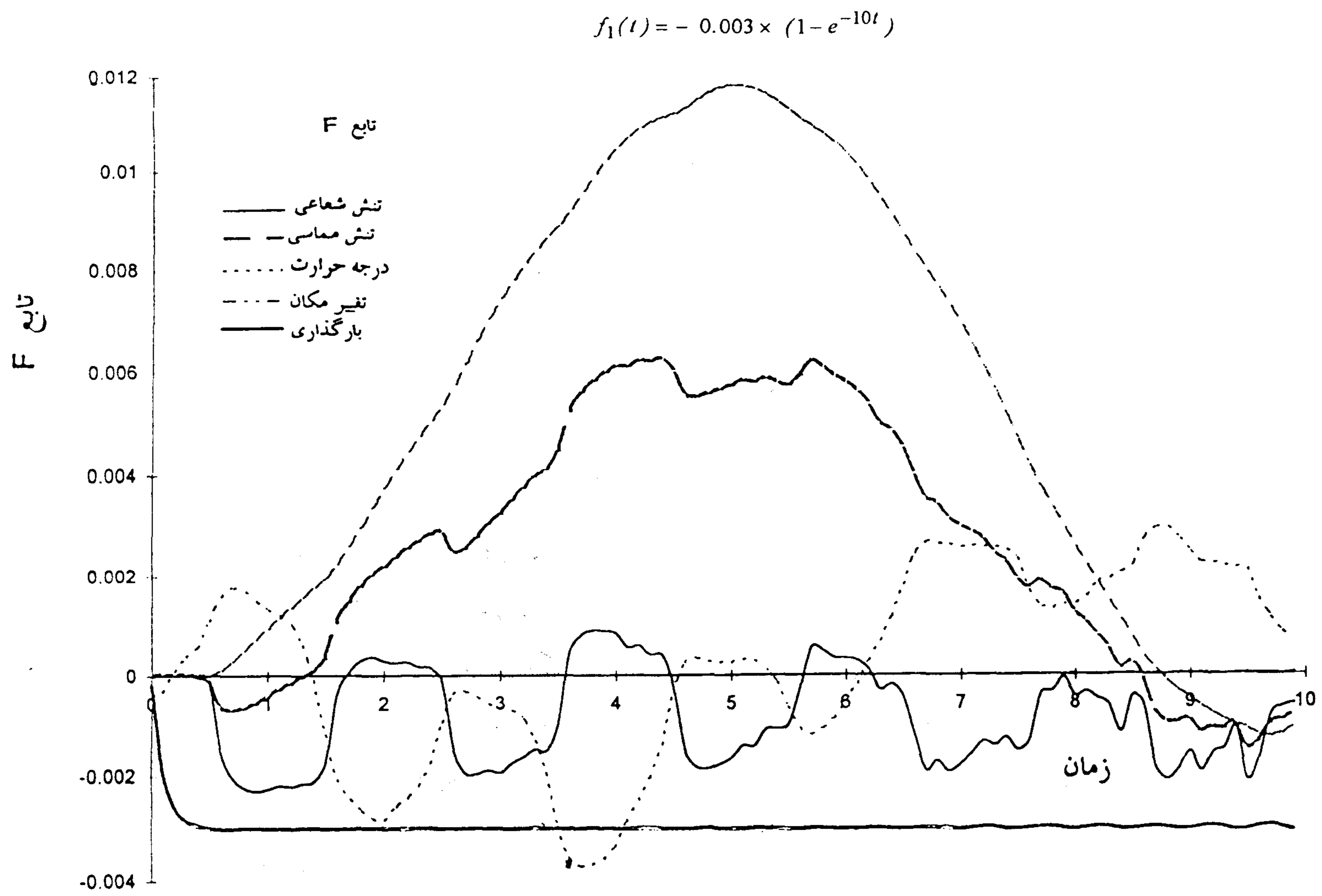
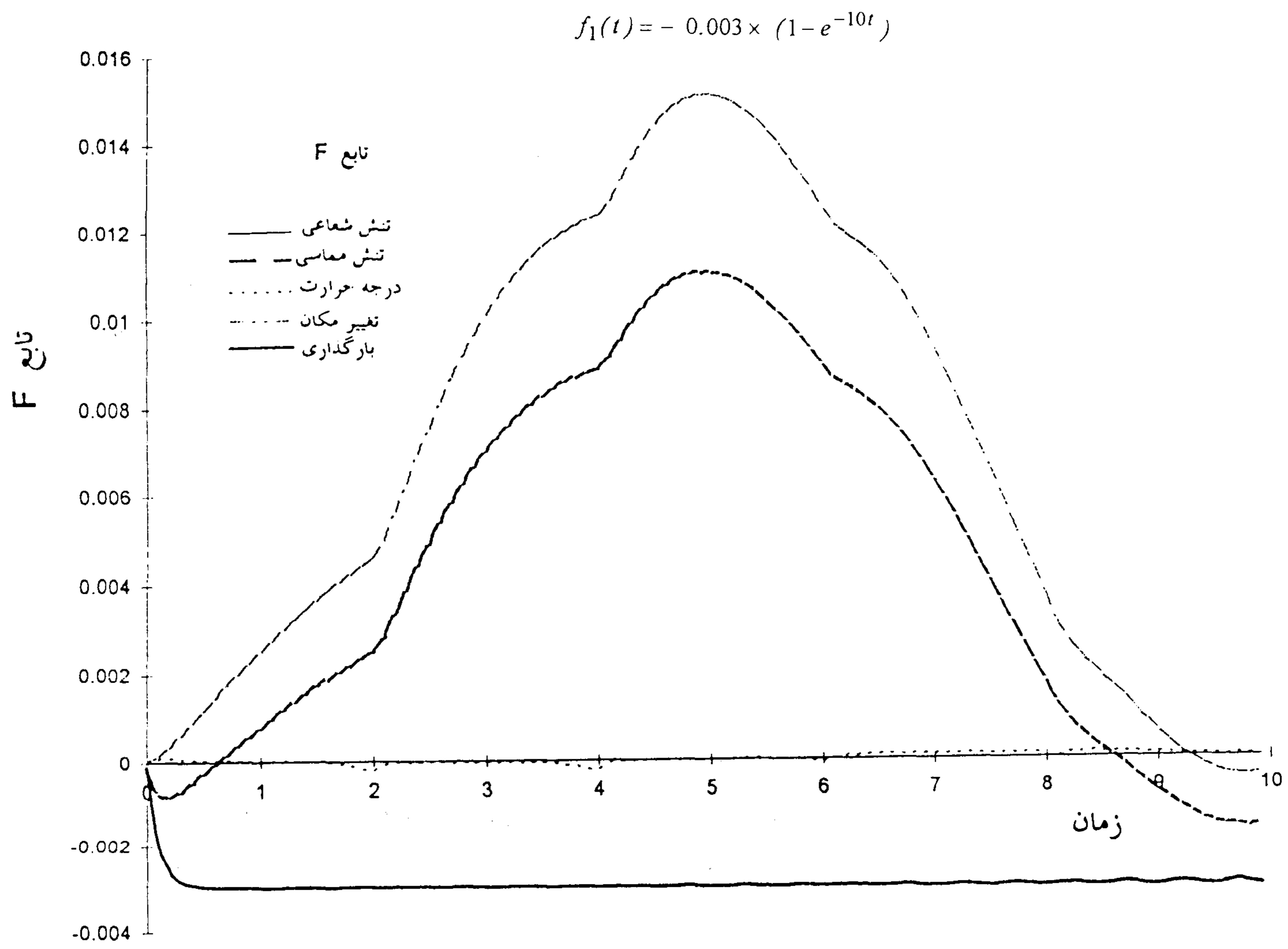
$$f_2(\tau) = -0.015 \tau e^{-2\tau} \quad (8)$$

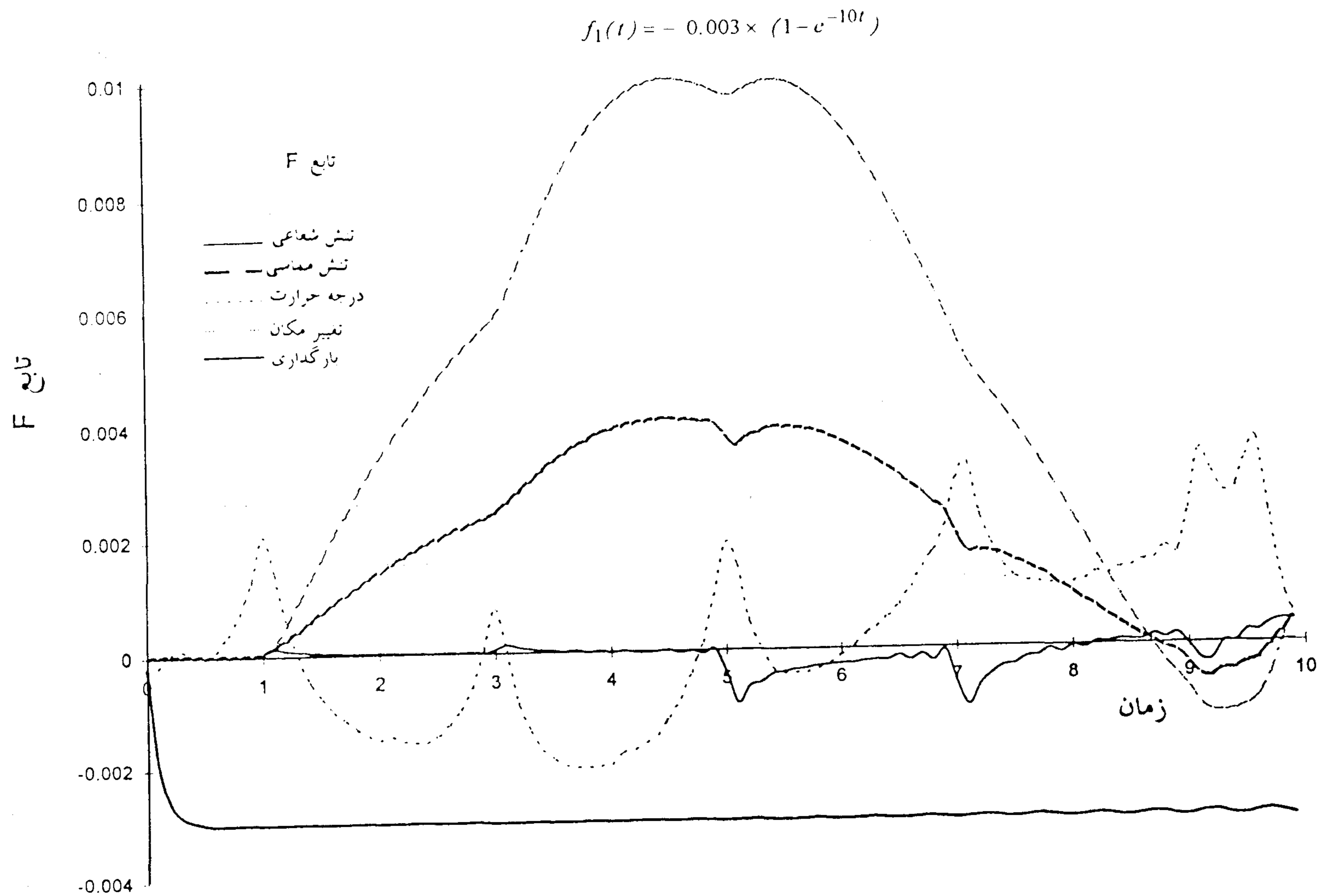
$$f_3(\tau) = \delta(\tau) \quad (9)$$

$$g_1(\tau) = \delta(\tau) \quad (10)$$

که در آن $f_1(t)$ تابع پله ای اصلاح شده بوده و با افزایش ضریب t در توان e به سمت تابع پله ای ایده آل میل می کند. $f_2(t)$ تابع ضربه ای، $f_3(t)$ تابع ضربه ای ایده آل یا تابع دیراک می باشد. $g_1(t)$ نیز تابع دیراک بوده که در بارگذاری حرارتی استفاده شده است. تبدیل لاپلاس روابط فوق به ترتیب عبارتند از:

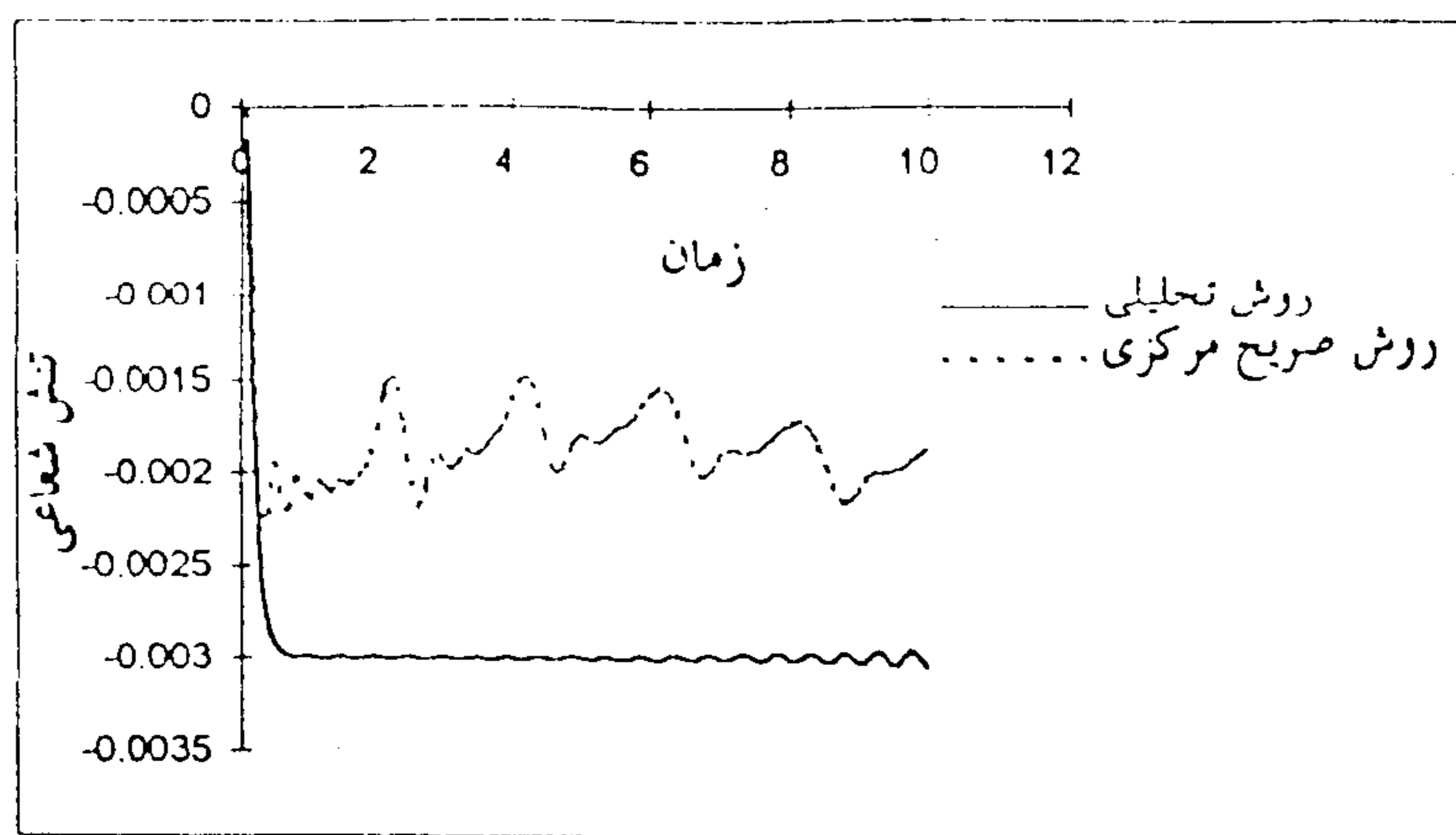
$$f_1(p) = \frac{-0.003}{p} + \frac{0.003}{p+10} \quad (11)$$





شکل ۳: توابع F نسبت به زمان در نقطه خارجی استوانه.

$$f_1(t) = -0.003 \times (1 - e^{-10t})$$

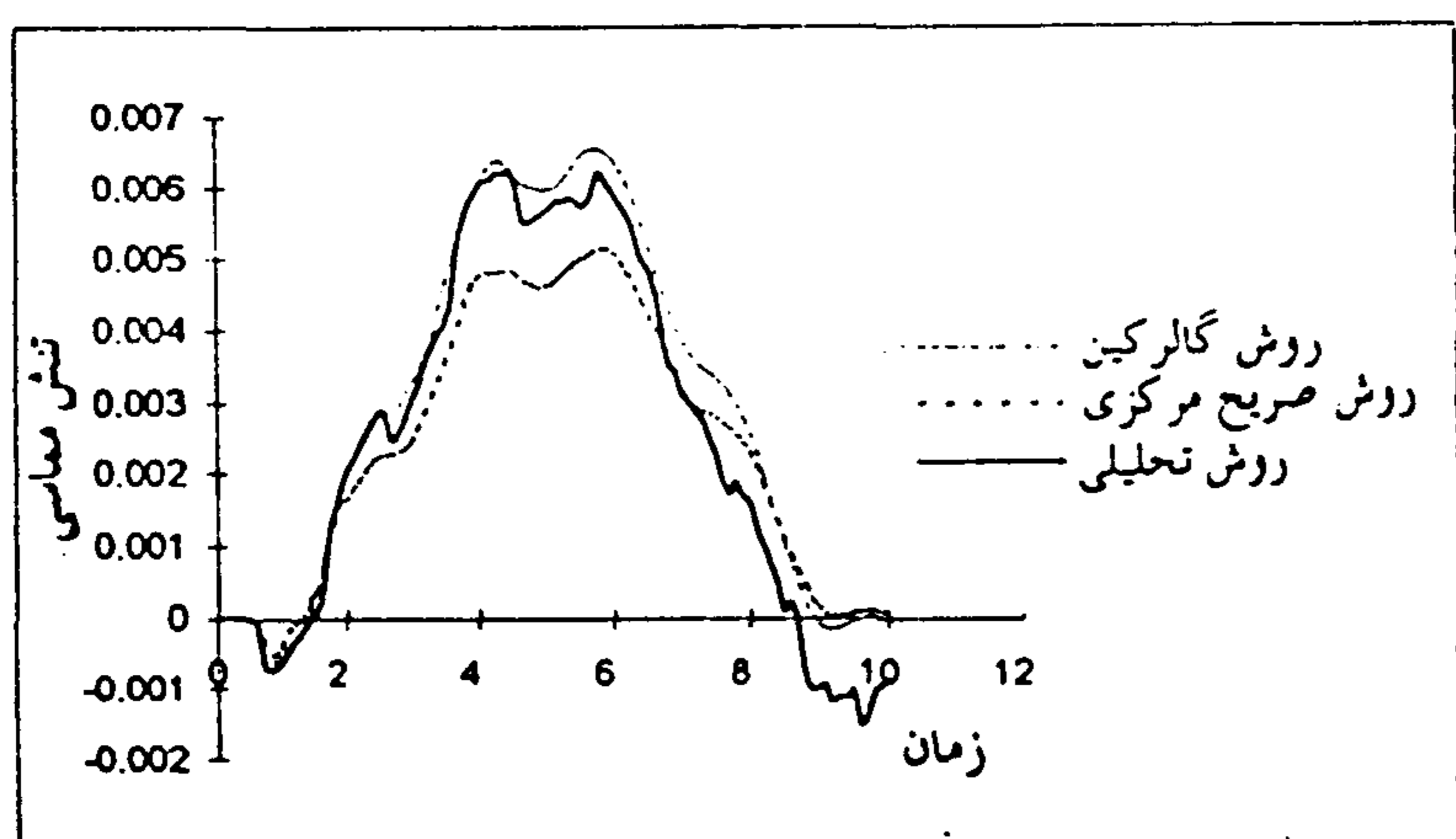


شکل ۴: مقایسه تنش شعاعی نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه حاصل از روش این مقاله و روش عددی.

تحلیلی (روش این مقاله) دقیقاً برابر تنش ورودی می باشد حال آنکه نتایج روش صریح مرکزی اختلاف فاحش با تنش ورودی دارد. لازم به ذکر است که به منظور حل مسئله به روش صریح مرکزی در اجزاء محدود نیاز به جزء بندی

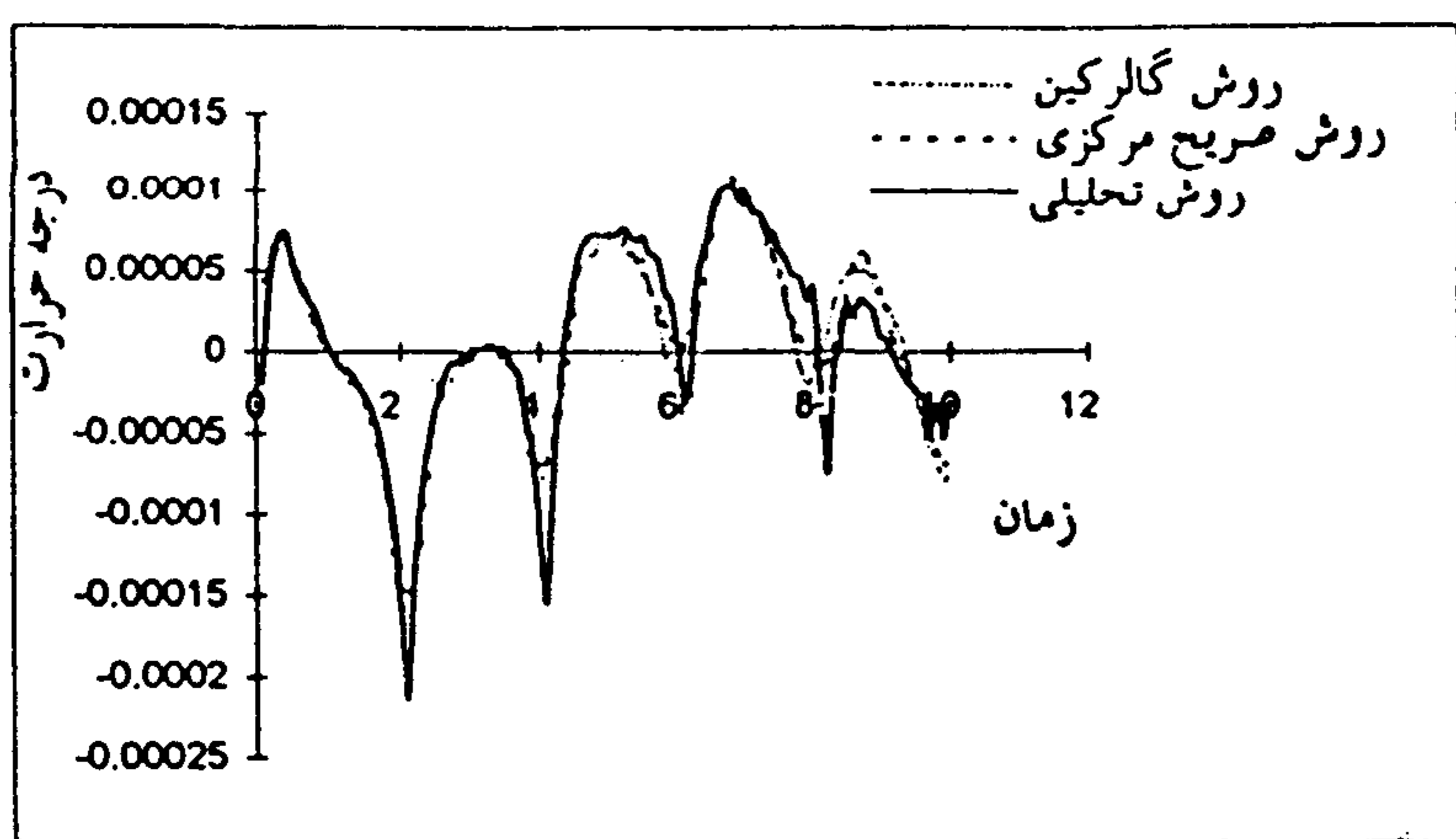
τ برابر $(c_1 t / r_1) = t / (r_1 / c_1) = t / t_1$ است، زمان بدون بعد لازم برابر $(c_1 / r_1)(r - r_1) / c_1 = r / r_1 - 1$ می شود. بنابراین زمان لازم برای رسیدن موج به نقطه میانی در هر نقطه به فاصله $r > r_1$ از مقدار ماکزیمم ورودی کمتر است و همچنین موج مماسی در مرز خارجی به صورت کششی است. همچنین درجه حرارت می تواند براساس افزایش یا کاهش نسبت به درجه حرارت محیط، مثبت یا منفی باشد که ناشی از انقباض و یا انبساط حجم است.

در شکل‌های (۴) تا (۹) تنش‌های شعاعی، مماسی و درجه حرارت در نقاط داخلی و میانی استوانه بدست آمده از روش این مقاله با روش عددی مقایسه شده‌اند. واضح است که تنش در نقطه داخلی استوانه ($r=r_1$) باید در هر لحظه برابر تنش ورودی باشد (شرط مرزی داخلی). با مشاهده شکل (۴) ملاحظه می شود که این تنش در روش

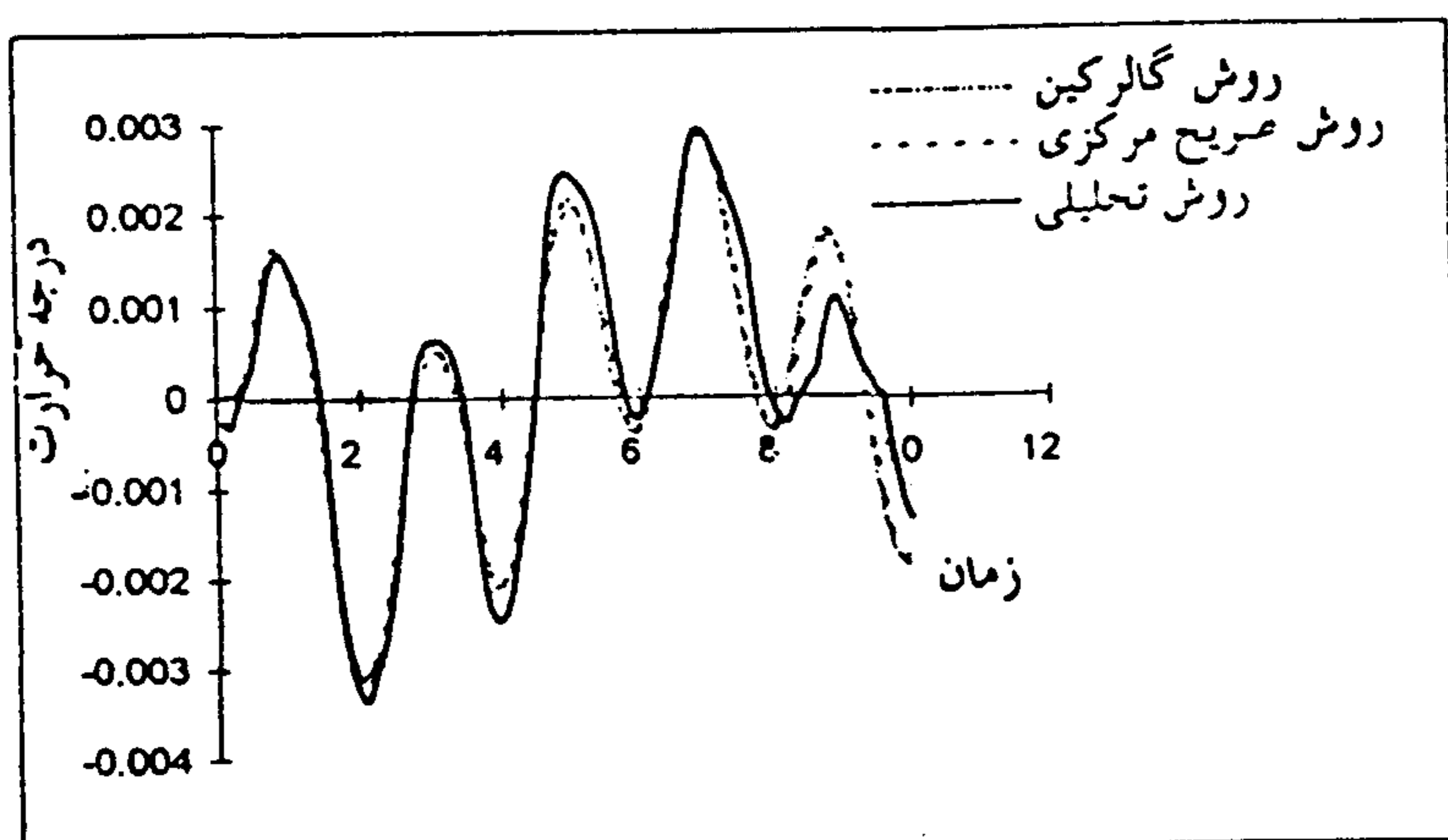


شکل ۷: مقایسه تنش مماسی نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه حاصل از روش این مقاله و روش عددی.

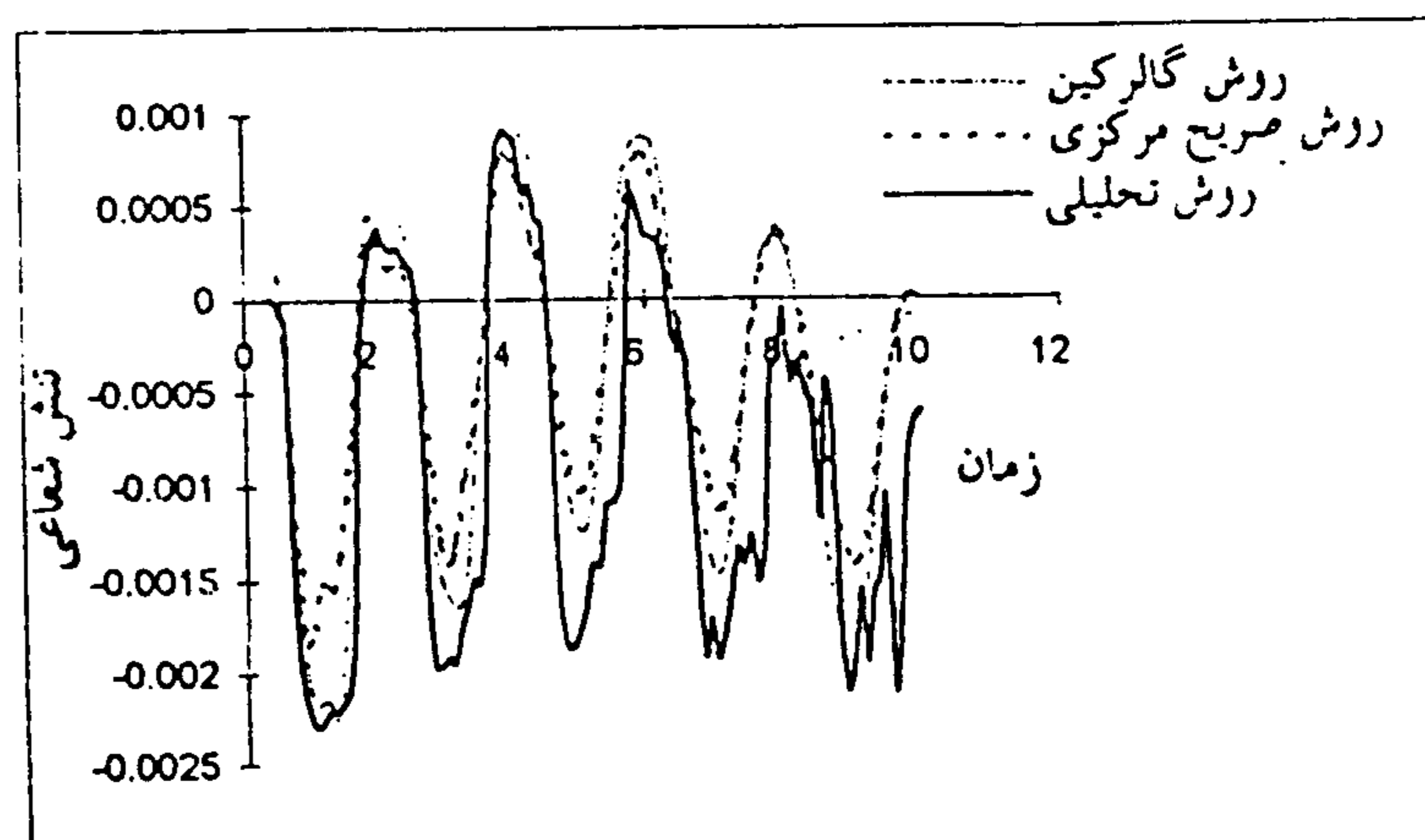
$$f_1(t) = -0.003 \times (1 - e^{-10t})$$



شکل ۸: مقایسه درجه حرارت نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه حاصل از روش این مقاله و روش عددی.

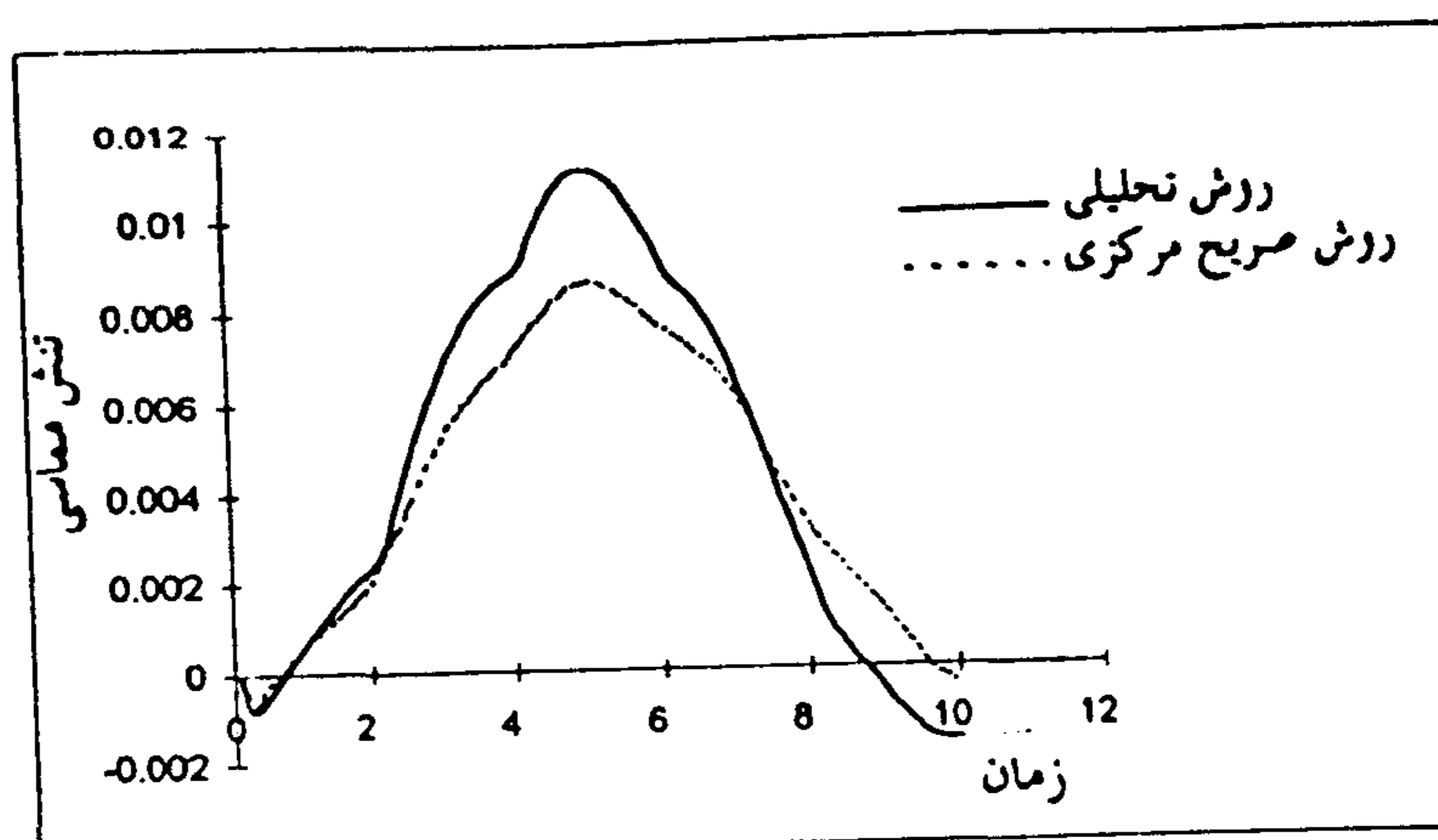


شکل ۹: مقایسه درجه حرارت نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه حاصل از روش این مقاله و روش عددی.



شکل ۵: مقایسه تنش شعاعی نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه حاصل از روش این مقاله و روش عددی.

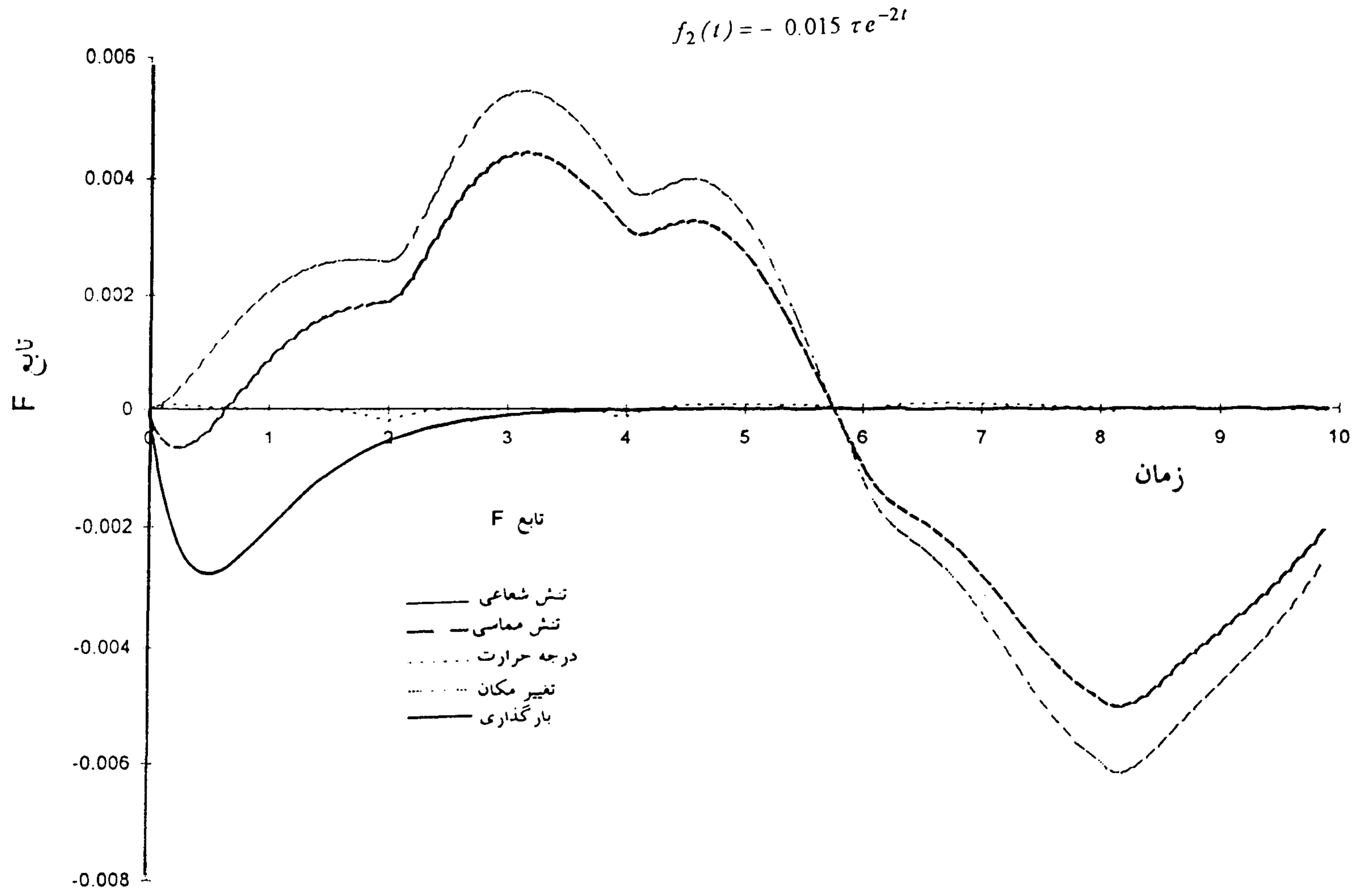
$$f_1(t) = -0.003 \times (1 - e^{-10t})$$



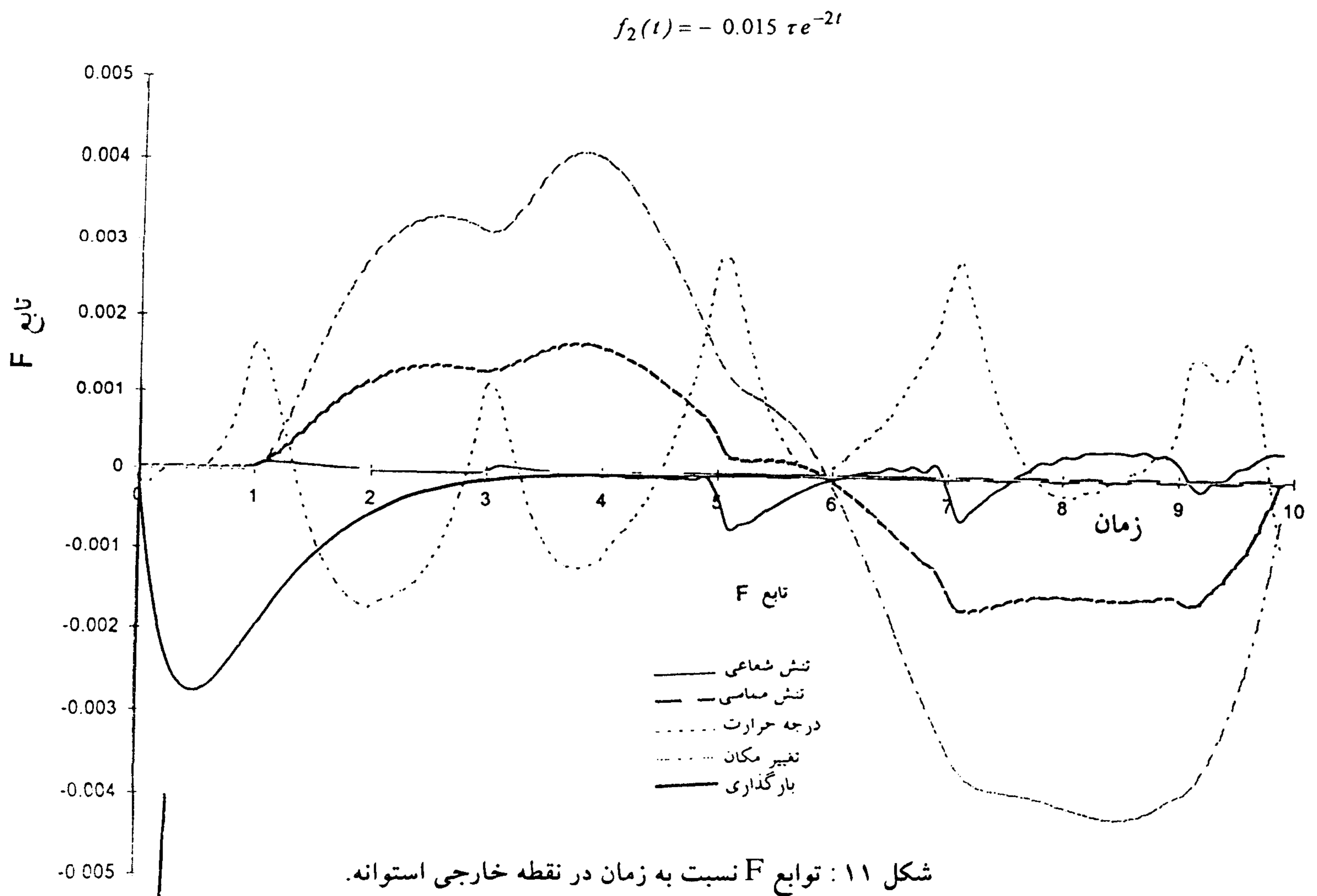
شکل ۶: مقایسه تنش مماسی نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه حاصل از روش این مقاله و روش عددی.

مقطع استوانه دارد که به منظور افزایش دقت باید تعداد این اجزاء را افزایش داد.

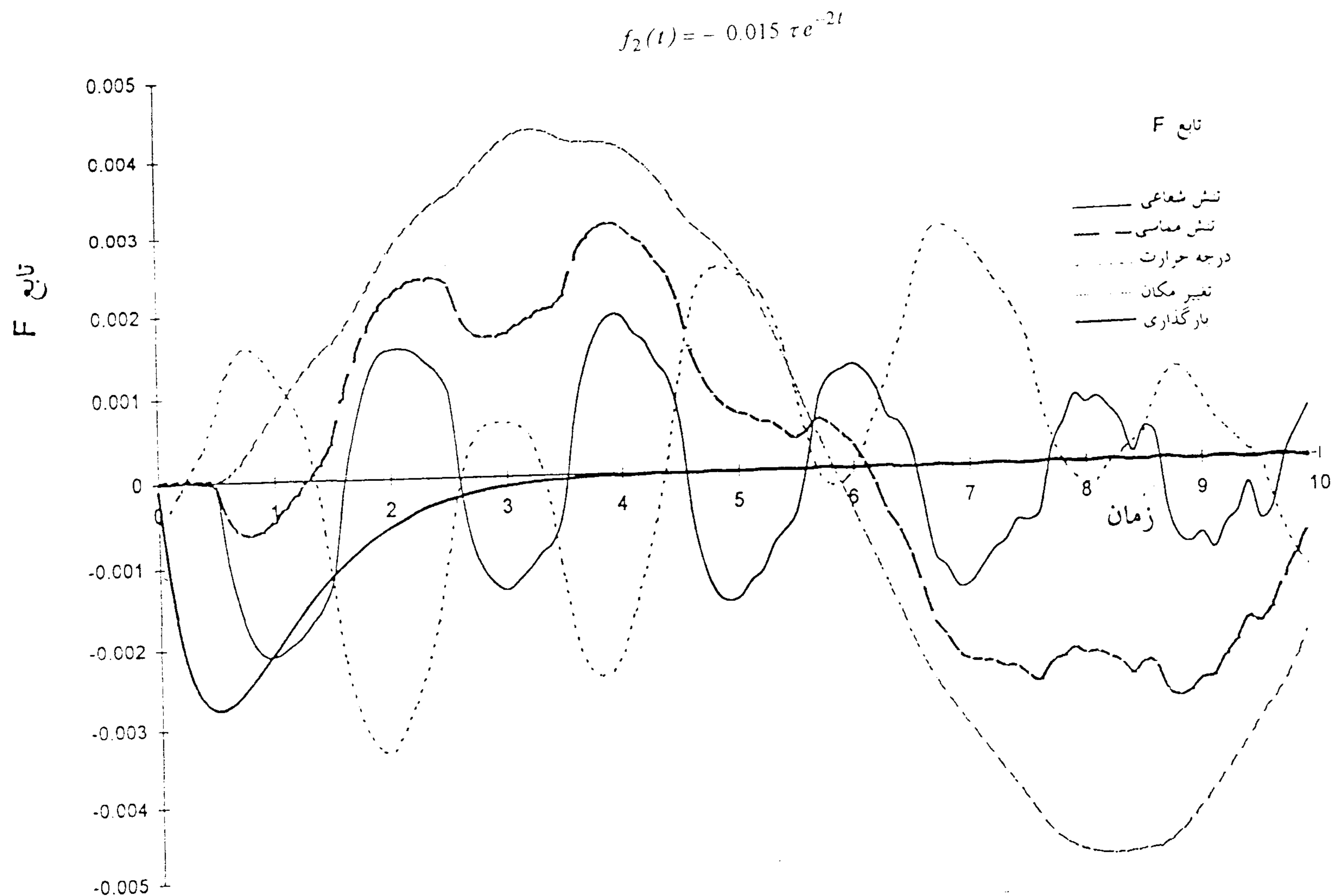
حال آنکه در روش ارائه شده در این مقاله فقط شعاعهای داخلی و خارجی برای معرفی شکل مسئله کافیهست. در طراحی یک مقطع استوانه‌ای همواره تنشهای مماسی نقش اساسی دارند. با مشاهده اشکال (۵) و (۶) در می‌یابیم که نتایج بدست آمده از روش تحلیلی حد بالایی نسبت به روش صریح مرکزی می‌باشد، یعنی مقایسه این نتایج نشان می‌دهد که روش تحلیلی باید معیار طراحی قرار گیرد. شکل‌های (۸) و (۹) مقایسه درجه حرارت‌های بدست آمده



شکل ۱۰: توابع F نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه.



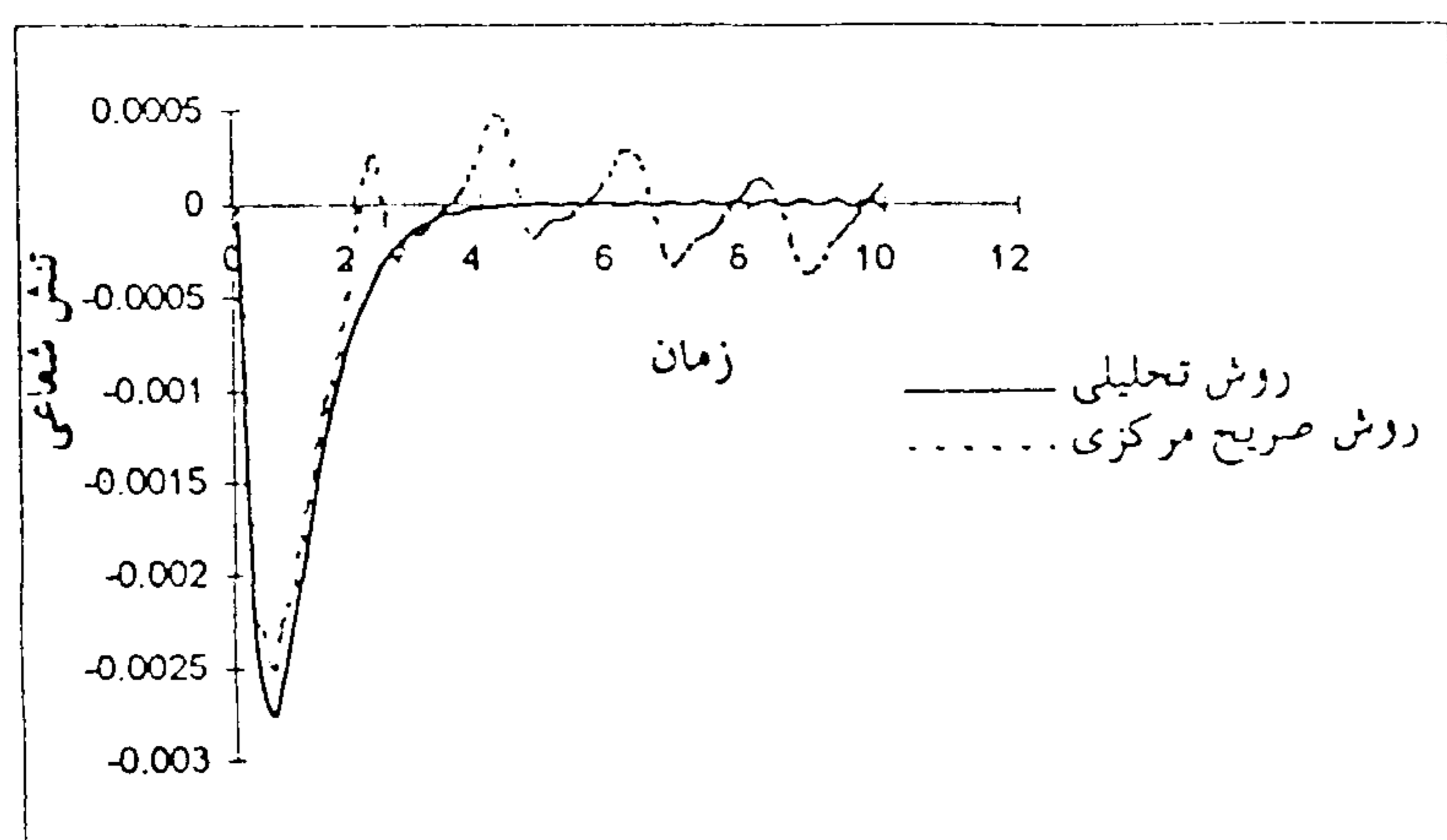
شکل ۱۱: توابع F نسبت به زمان در نقطه خارجی استوانه.



شکل ۱۲: توابع F نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه.

از روشهای تحلیلی و عددی را نشان می دهد و انطباق نتایج به معنی صحت نتایج این مقاله می باشد.

$$f_2(t) = -0.015 \tau e^{-2t}$$



شکل ۱۳: مقایسه تنش شعاعی نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه.

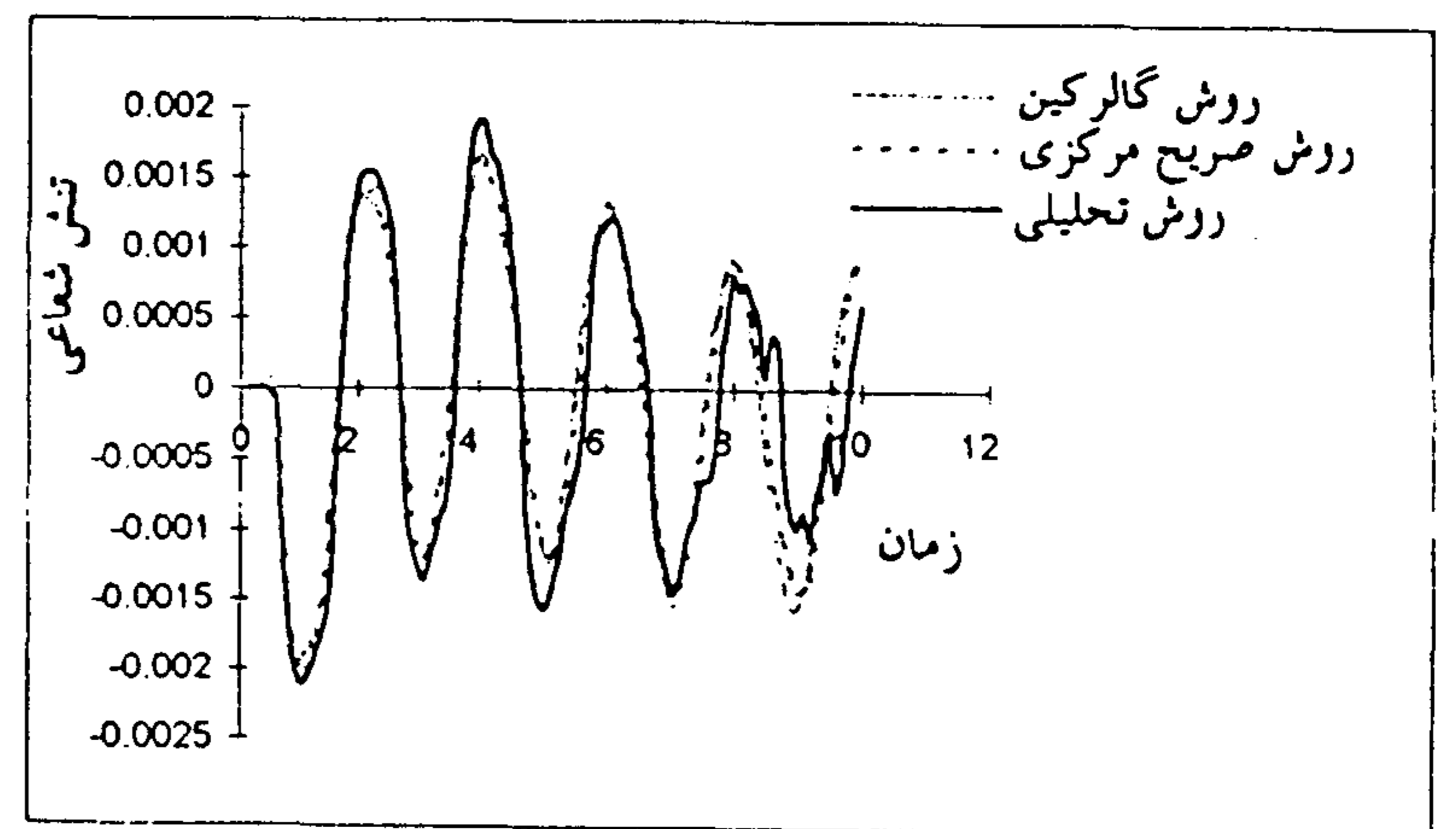
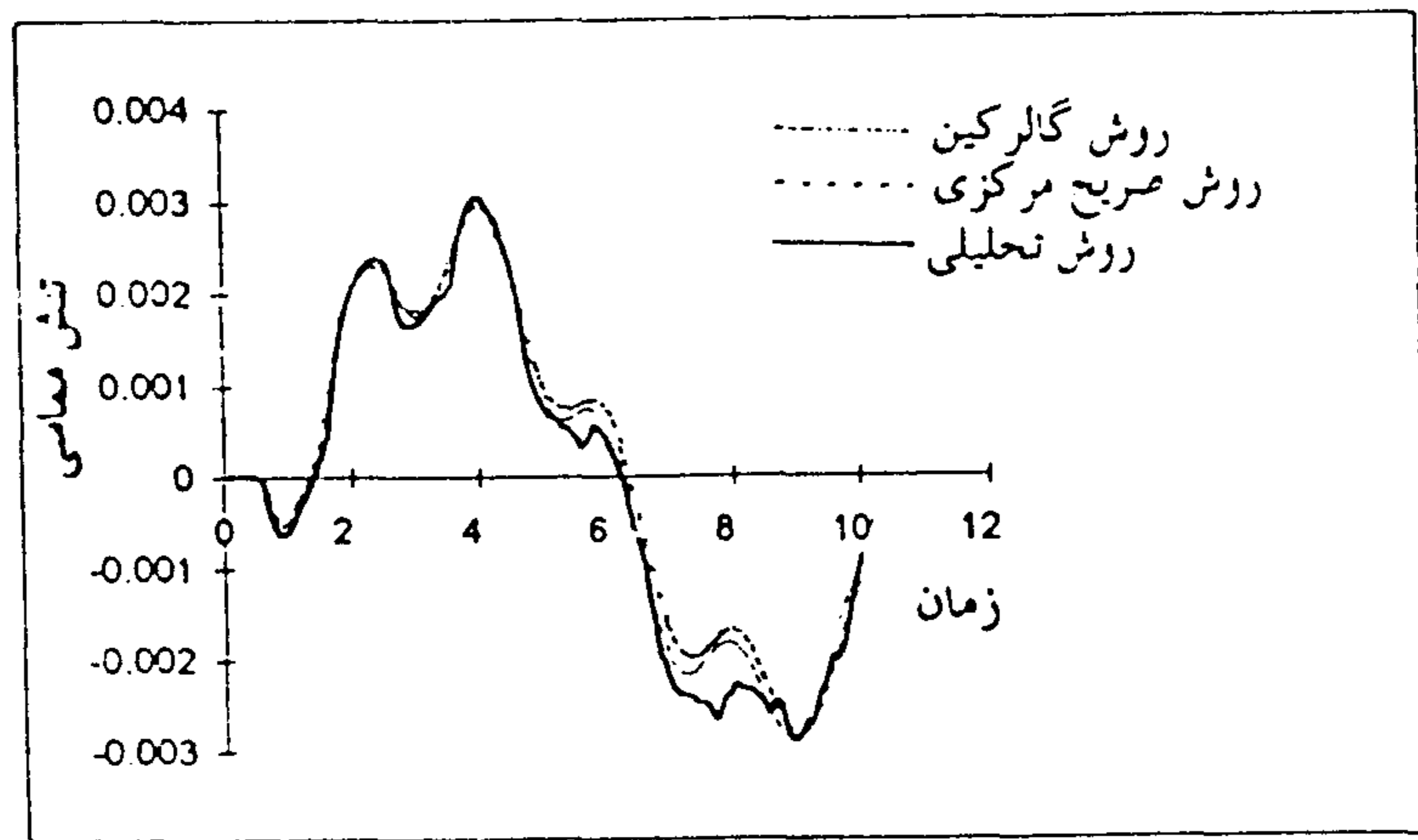
پاسخ به ضربه تنش منفرد

$$f(\tau) = -0.015 \tau e^{-2\tau}$$

نتایج روش ارائه شده در این مقاله برای توابع F شامل پاسخ تنشهای شعاعی، مماسی، تغییر مکان و درجه حرارت نسبت به زمان در نقاط داخلی، میانی و خارجی استوانه، هنگامی که تنش نیرویی (بارگذاری) به صورت $f(\tau)$ باشد در شکل‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده‌اند.

مرکزی رسم شده‌اند و مشاهده می شود که جواب حاصل از این روش منطبق بر بارگذاری بوده، حال آنکه نتایج روش صریح مرکزی در لحظات اول نسبتاً مناسب و با ازدیاد زمان با اختلاف زیاد ادامه می یابد. در شکل (۱۵) مشاهده می شود که نتایج روش صریح مرکزی برای تنش

در شکل‌های (۱۳) تا (۱۷) پاسخ تنشهای شعاعی، مماسی و درجه حرارت نسبت به زمان در نقاط داخلی و میانی استوانه بدست آمده از روشهای تحلیلی و عددی مقایسه شده‌اند. در شکل (۱۳) تنش شعاعی استوانه در نقطه داخلی حاصل از روش این مقاله و روش صریح

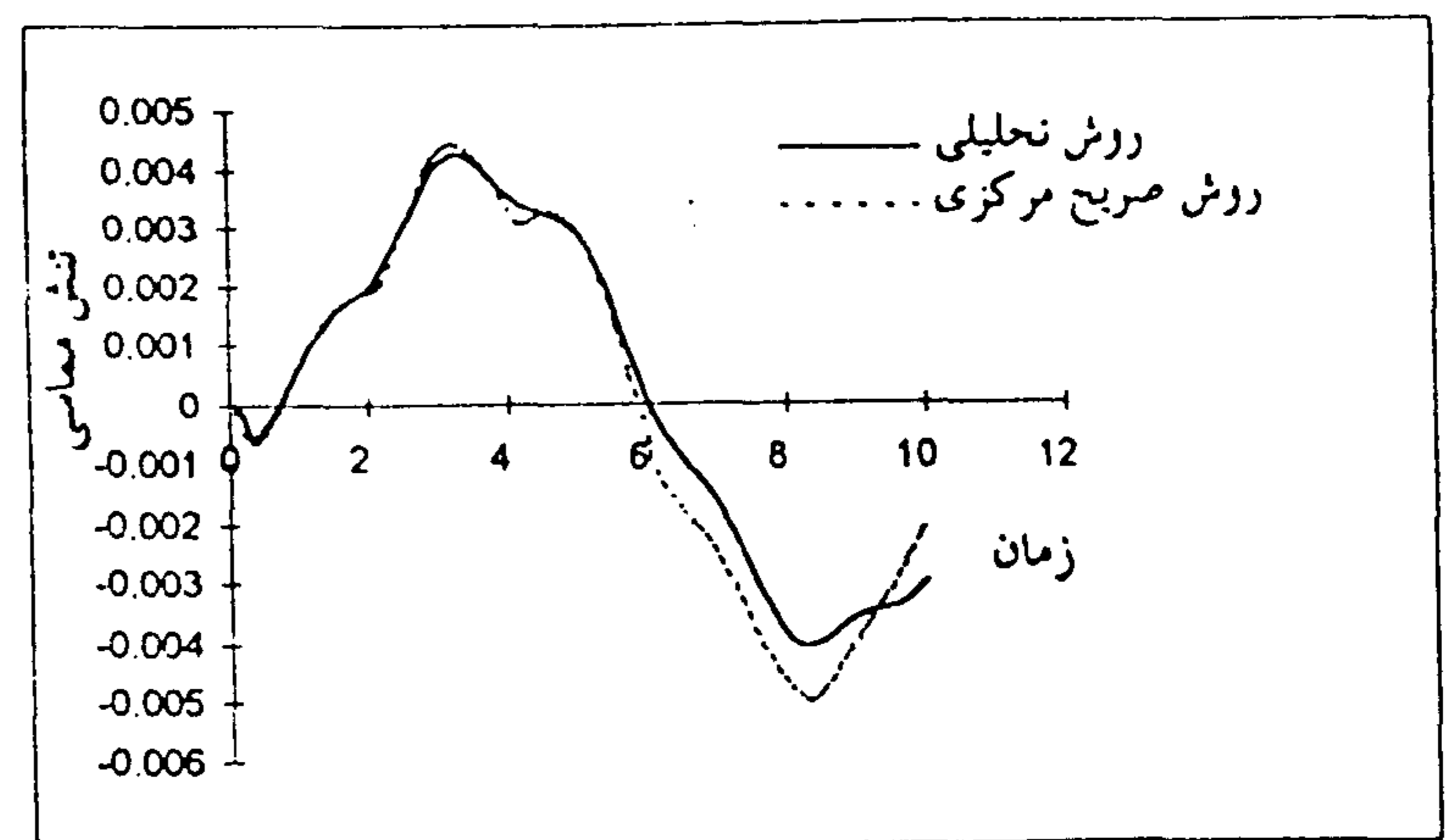
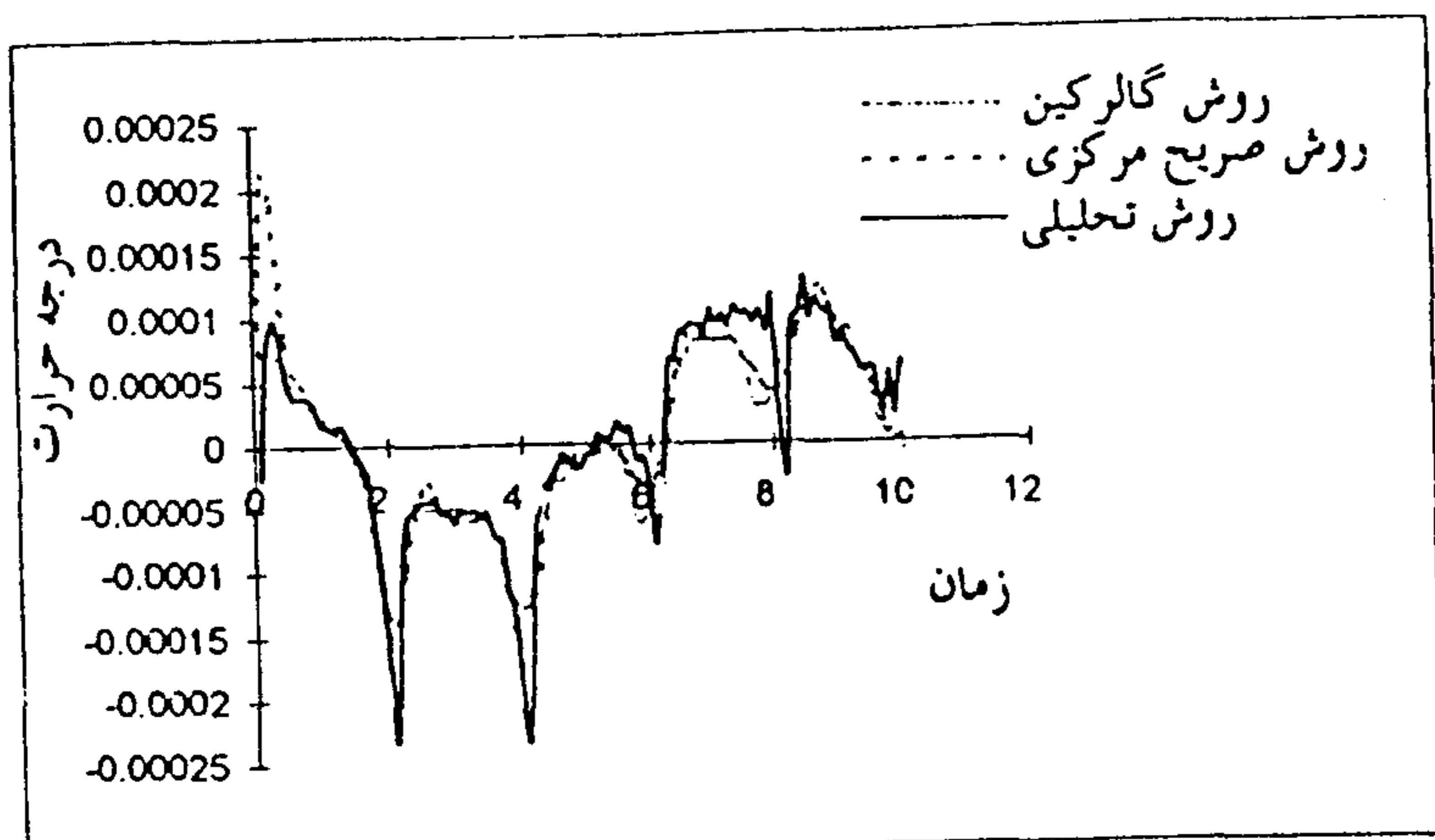


شکل ۱۶: مقایسه تنش مماسی نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه.

شکل ۱۴: مقایسه تنش شعاعی نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه.

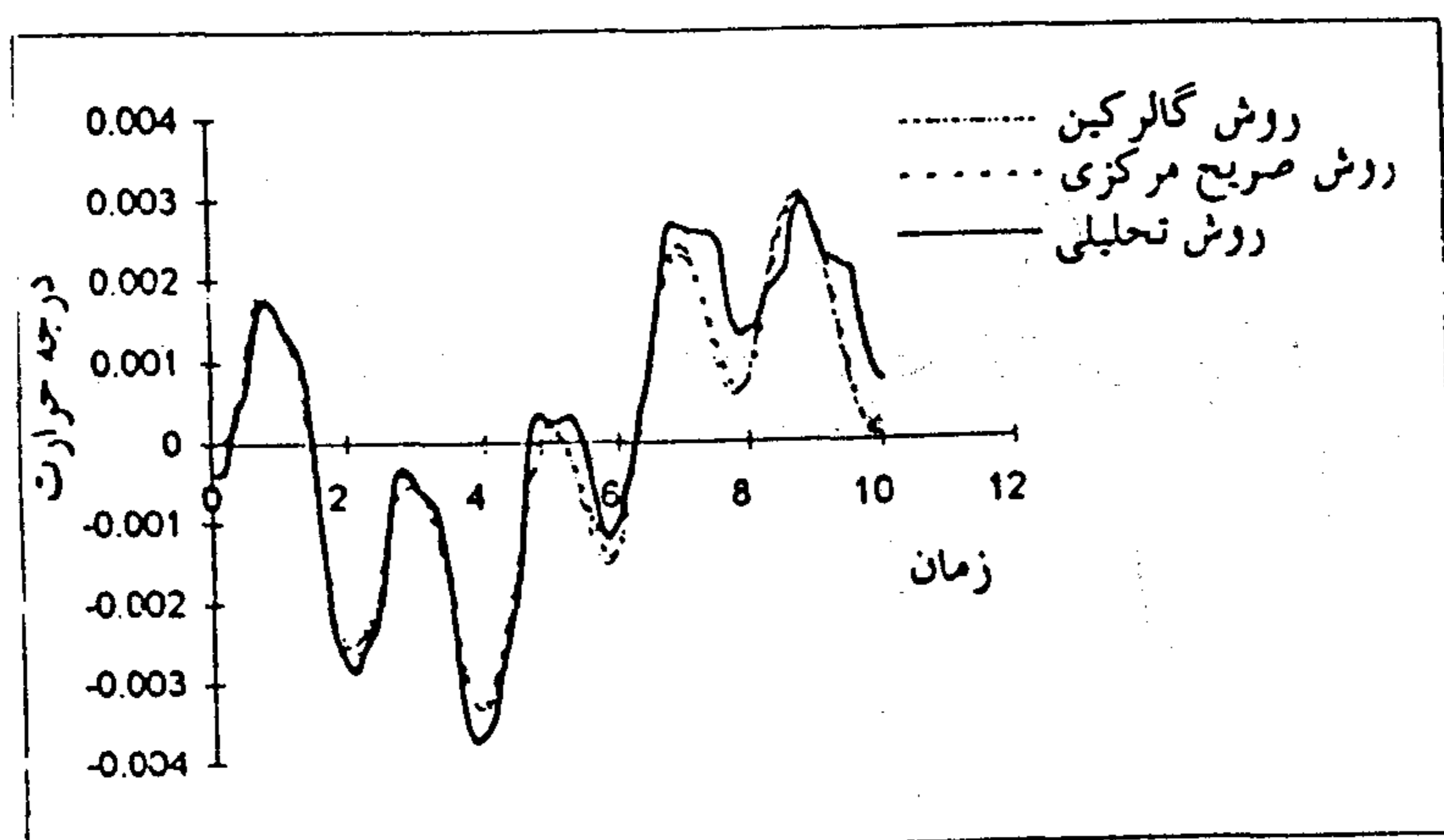
$$f_2(t) = -0.015 \tau e^{-2t}$$

$$f_2(t) = -0.015 \tau e^{-2t}$$



شکل ۱۷: مقایسه درجه حرارت نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه.

شکل ۱۵: مقایسه تنش مماسی نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه.

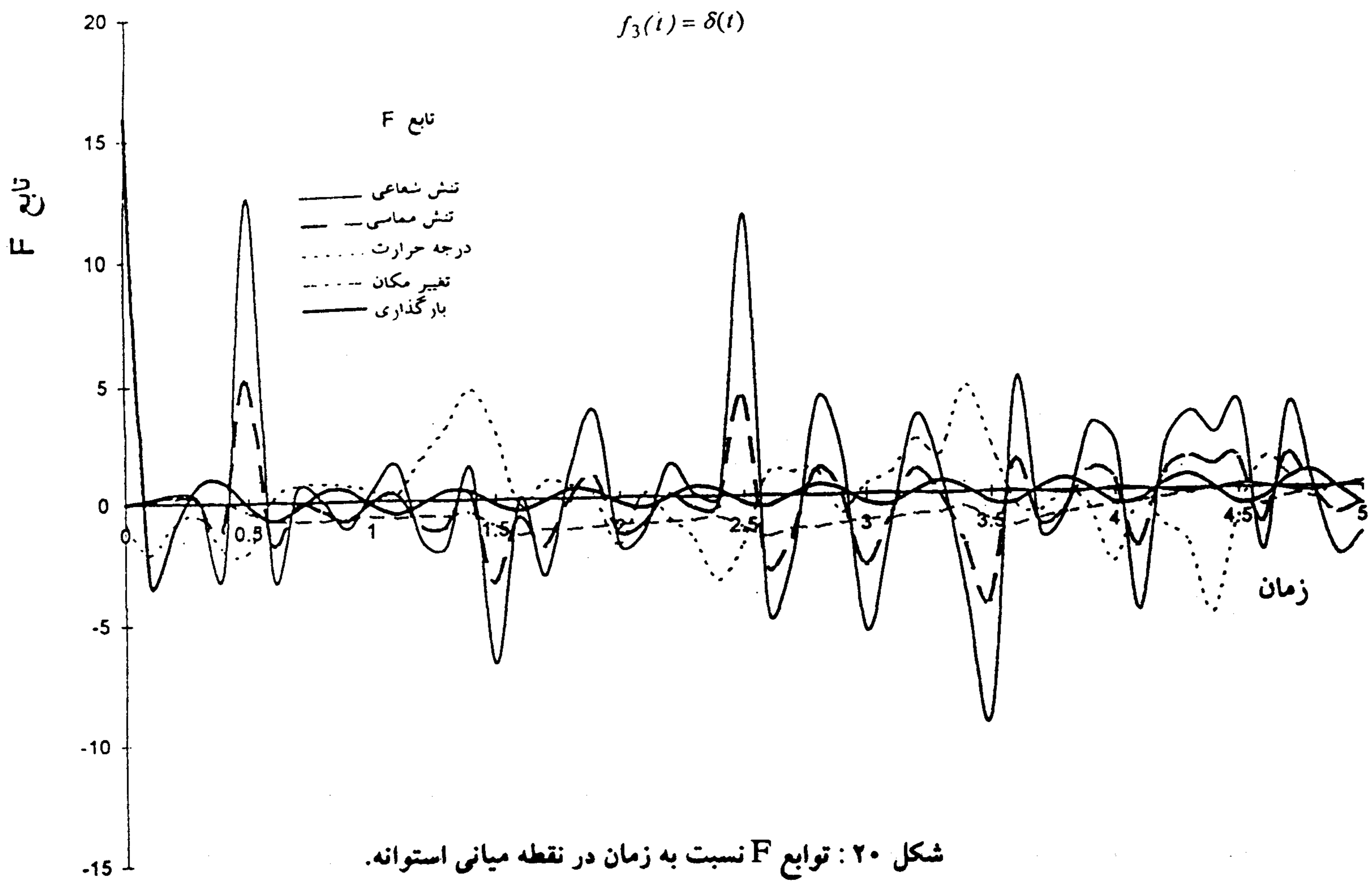
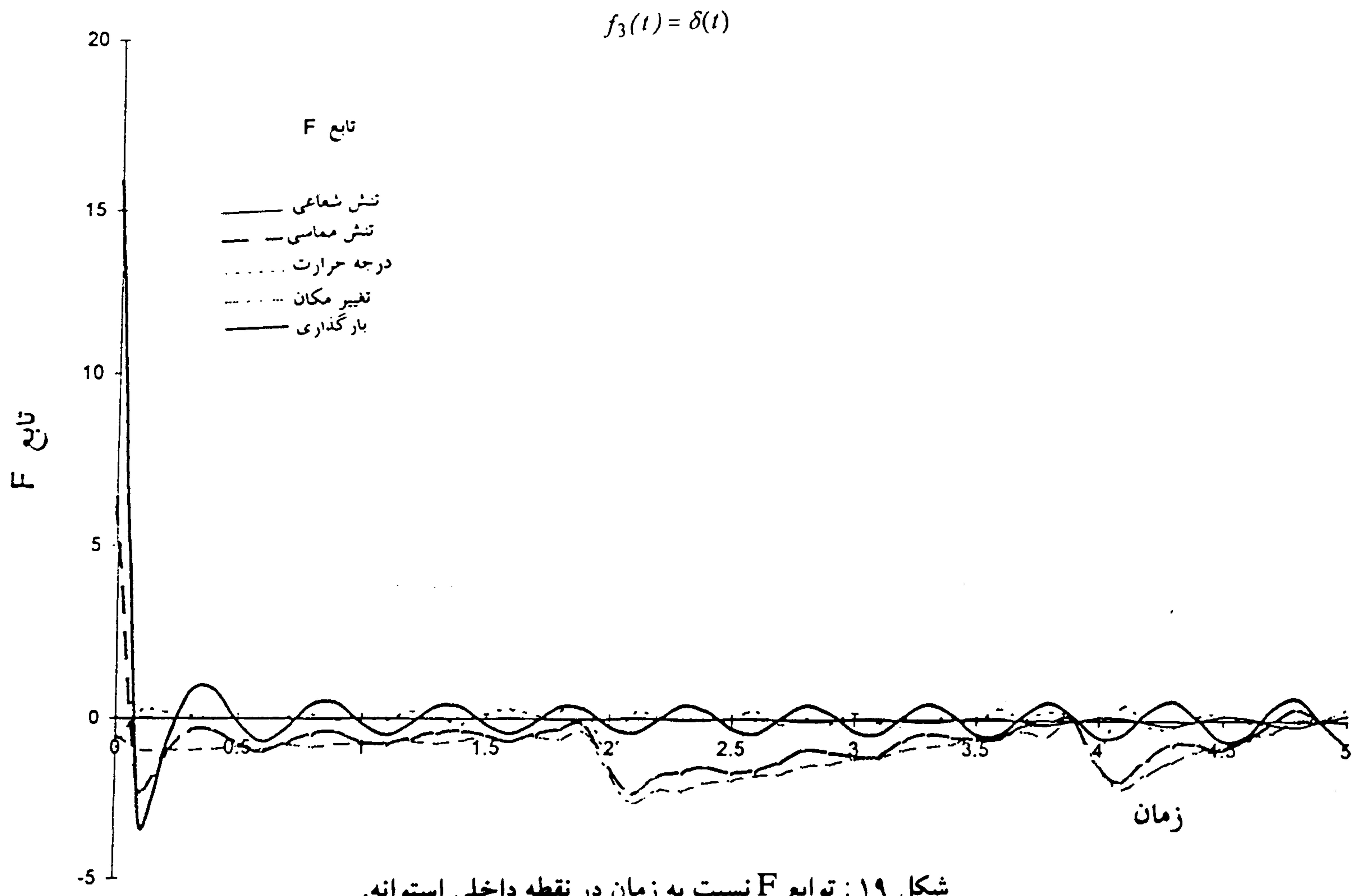


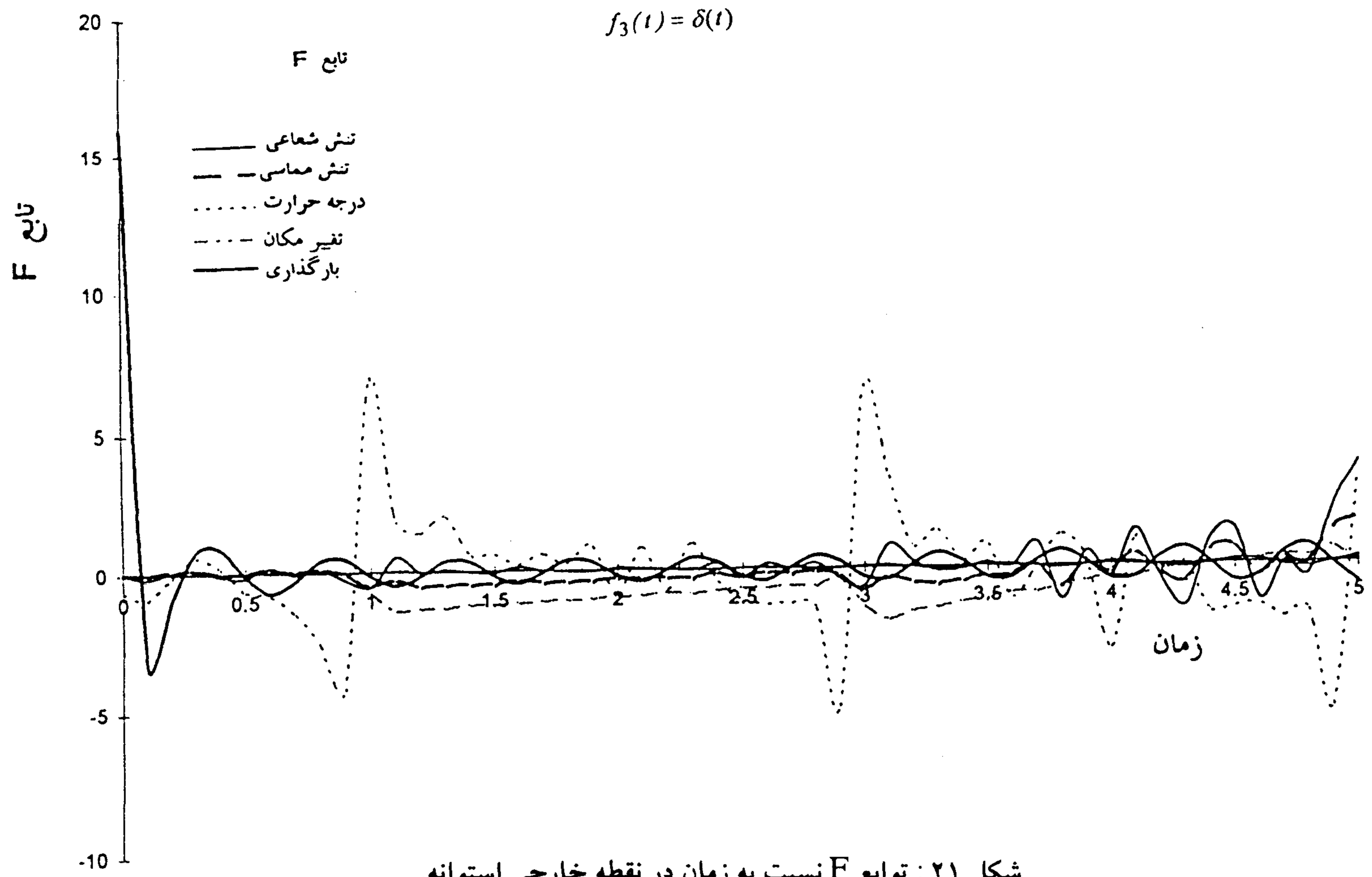
شکل ۱۸: مقایسه درجه حرارت نسبت به زمان در نقطه میانی استوانه.

مماسی در زمان $\tau > 8$ بزرگتر از نتایج ناشی از روش تحلیلی است. با دقت در اشکال (۱۰) و (۱۳) براساس طول زمان بارگذاری می توان دریافت که نتایج روش صریح مرکزی دقیق نمی باشند. همچنین شکل (۱۶) نشان مدهد که نتایج روش این مقاله برای تنش مماسی حد بالای نتایج بوده و باید معیار طراحی قرار گیرد.

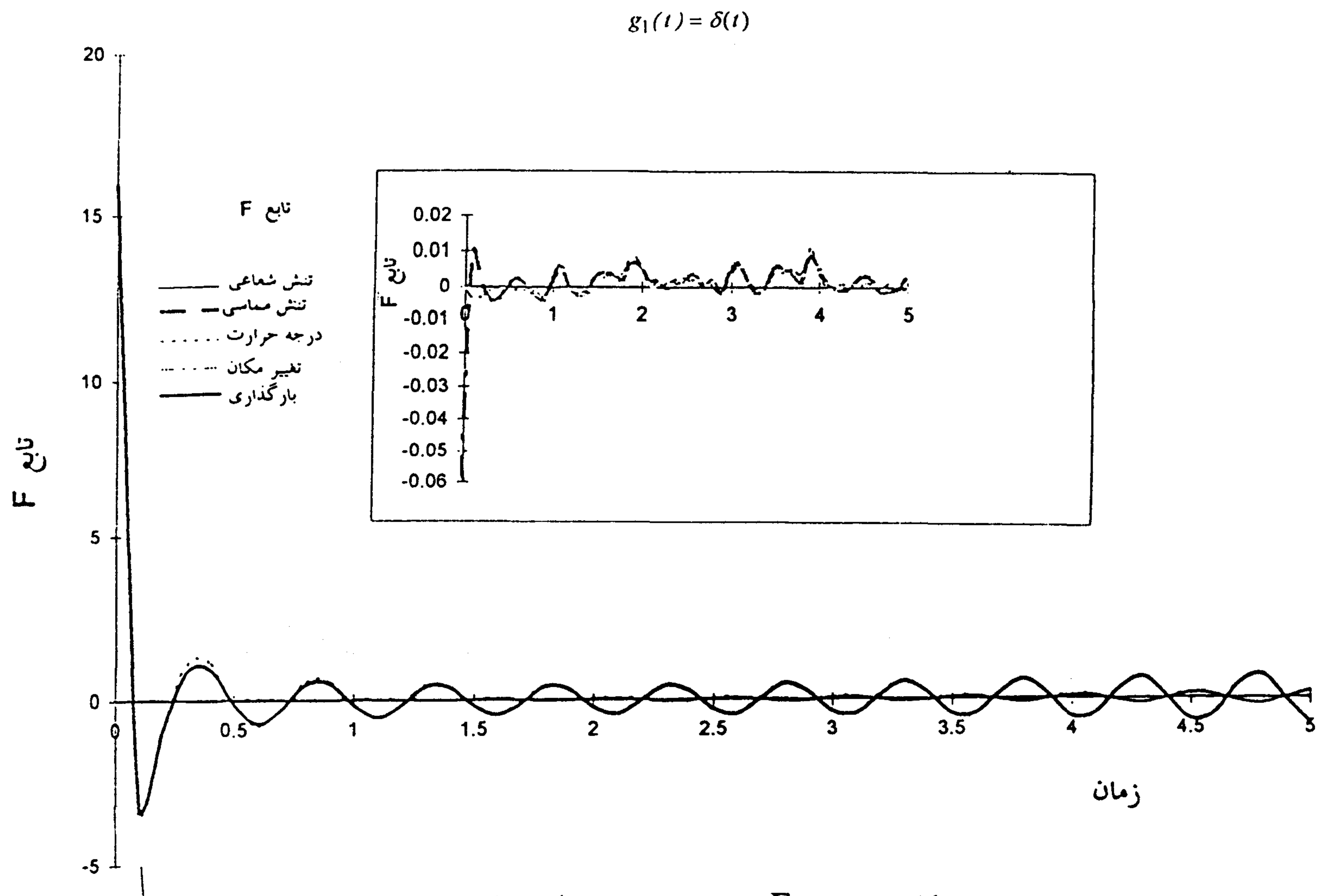
پاسخ به بار دیراک نیرویی

در این حالت $f(\tau) = \delta(\tau)$ است. بدست آوردن جواب برای این بارگذاری به روش المانهای محدود بسیار مشکل

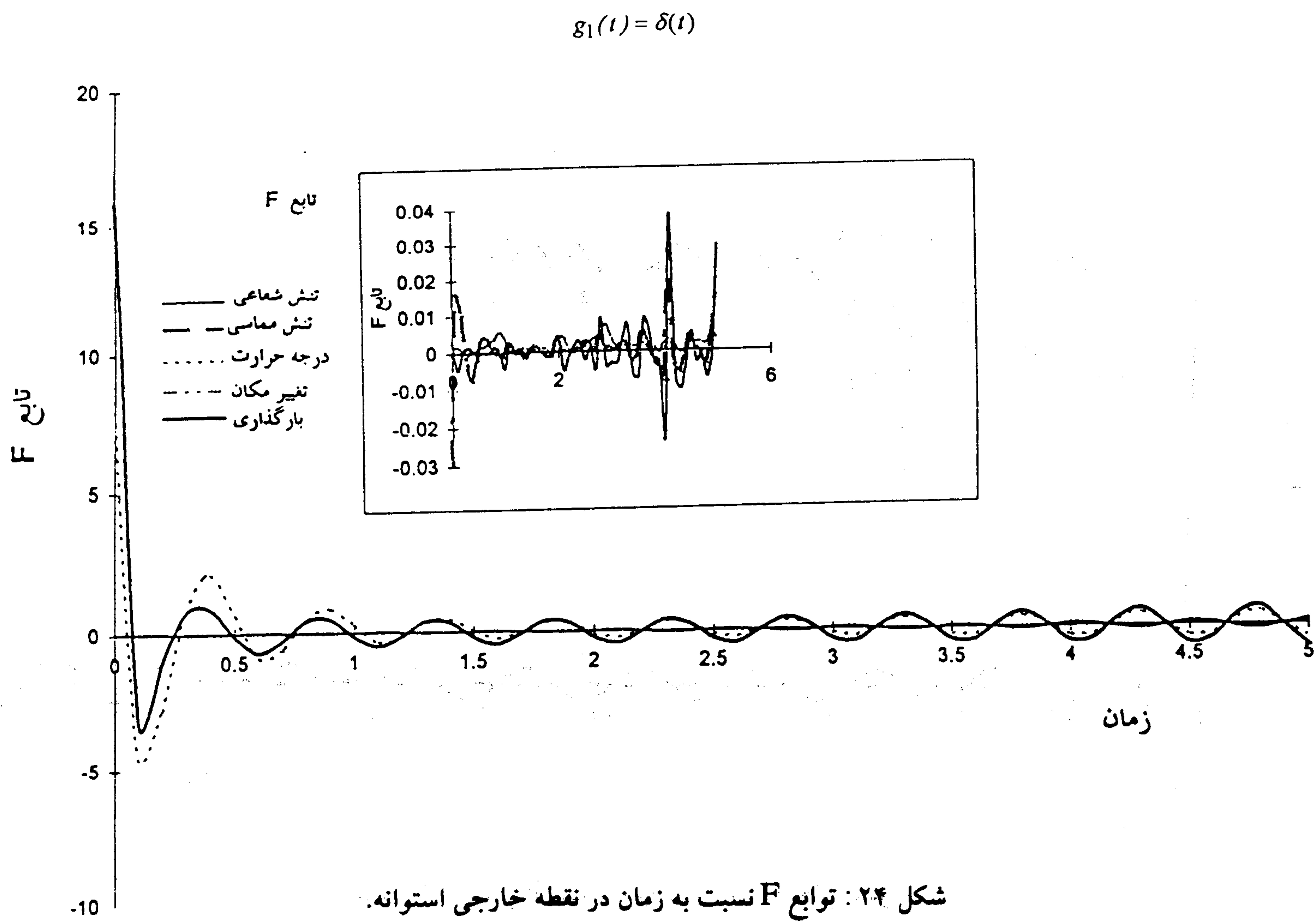
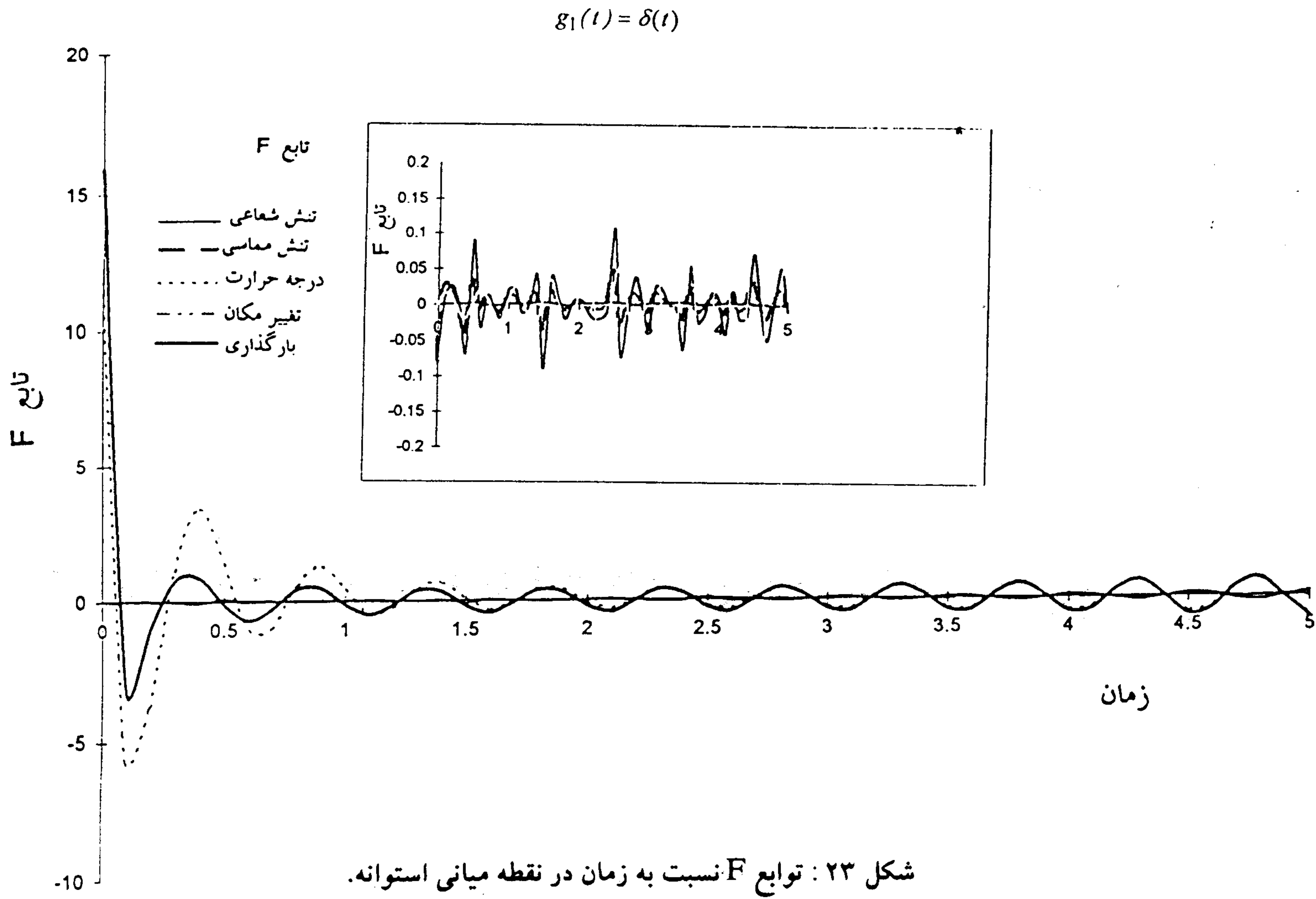




شکل ۲۱: توابع F نسبت به زمان در نقطه خارجی استوانه.



شکل ۲۲: توابع F نسبت به زمان در نقطه داخلی استوانه.



می‌باشد. به علت پیچیدگی توابع زیر علامت انتگرال، تعیین انتگرال معکوس به روش تحلیلی بسیار مشکل است، لذا در این مقاله تبدیل معکوس لاپلاس به صورت عددی انجام گرفته است که انجام آن نیاز به تمهیدات خاصی داشته است، از آن جمله می‌توان تعیین حدود بی‌نهایت برای محاسبات عددی، برآورد انتگرال باتوجه به نقاط تکین و تعیین عددی حقیقی مناسب (c) در حدود انتگرال گیری لاپلاس (رابطه ۶) را نام برد.

لازم به یادآوری است که حل یک مسئله از این نوع به کمک روشهای ارائه شده توسط محققان قبلی نیاز به المان بندی مقطع استوانه دارد و وابسته به دقت موردنیاز، شبکه المانها متفاوت است. در حالی که در این روش تنها شعاعهای داخلی و خارجی، مشخصات مصالح و تابع بارگذاری برای حل مسئله کفایت می‌کند و جواب به سرعت تعیین می‌شود.

نتایج حاصل از این مقاله نشان می‌دهد که اولاً در حالتی که ورودی تنش باشد، تنش شعاعی در شعاع داخلی مطابق انتظار کاملاً منطبق بر تنش ورودی می‌باشد. تنشهای مماسی بدست آمده نسبت به جوابهای حل عددی مسئله کمی بزرگتر بوده و در طراحی‌ها معیار طراحی خواهد بود. همچنین نشان داده شده است که به ازای نیروی دینامیکی اعمال شده، تغییرات درجه حرارت جسم چندان زیاد نیست در حالی که به ازای تغییرات درجه حرارت دینامیکی اندک، تنشهای بوجود آمده در استوانه نسبتاً زیاد است.

و شاید هم غیرممکن است. اما به روش تحلیلی این بارگذاری مانند بقیه توابع بارگذاری بوده و جواب آن به آسانی به دست می‌آید. شکل‌های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) توابع F شامل تنشهای شعاعی، مماسی، تغییرمکان و درجه حرارت نسبت به زمان را در نقاط داخلی، میانی و خارجی استوانه، هنگامی که تنش نیرویی (بارگذاری) به صورت $\delta(\tau)$ باشد، نشان می‌دهند.

پاسخ به بار دیراک حرارتی

در این حالت $g(\tau) = \delta(\tau)$ می‌باشد و مانند قسمت بالا بدست آوردن جواب مسئله برای این تغییر درجه حرارت به روش المانهای محدود بسیار مشکل است. شکل‌های (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) توابع F شامل تنشهای شعاعی، مماسی، تغییرمکان و درجه حرارت نسبت به زمان را در نقاط داخلی، میانی و خارجی استوانه، هنگامی که بارگذاری حرارتی به صورت $\delta(\tau)$ باشد، نشان می‌دهند.

نتیجه گیری

در این مقاله نتایج حل مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در یک لوله استوانه‌ای بلند در حالت متقارن محوری به صورت گرافیکی نمایش داده شده است.

نتایج حاصل از محاسبات روش تحلیلی به کمک برنامه‌ای که به زبان فرترن نوشته شد، بدست آمده‌اند [۶]. برای بدست آوردن نتایج در فضای زمانی، نیاز به تعیین انتگرال معکوس لاپلاس برای تغییر مکان و درجه حرارت

مراجع

- 1 - Kupradze, V. D. (1979). "Three - dimensional problem of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity." N. H. P. & C.
- 2 - Li, Y. Y., Ghoneim, H. and Chen, Y. (1983). "A numerical method in solving a coupled thermoelasticity equations and some results." *J. of Thermal Stresses*, 6, 253-280.
- 3 - Nowacki, W. (1987). *Thermoelasticity*, Addison - Wesley.

- 4 - Sneddon, I. N. (1955). "The use of integral transform." McGraw-Hill.
- 5 - Watson, G. N. (1944). "A treatise on the theory of bessel function." 2nd ed. Cambridge, London.
- 6 - Lahey fortran language system reference manual, Revision B, Nov. 1990.
- 7 - Martin, P. A. and Rizzo, F. J. (1996). "Hypersingular integrals : How smooth must the density be?." *Int. J. Numerical In Eng.*, 39, 687-706.
- 8 - Hui, C. Y. and Mukherjee, S. (1997). " Evaluation of hypersingular integrals in the boundary element method by complex variable techniques." *Int. J. Solids Structures*, 34(2), 203-221.
- 9 - Toh, K. C. and Mukherjee, S. (1994). "Hypersingular and finite part integrals in the boundary element method." *Int. J. Solids Structures*, 31(17), 22993-2312.
- 10 - Huang, Q. and Cruse, T. A. (1993). "Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis." *Int. J. Numerical In Eng.*, 36, 2643-2659.

۱۱ - رحیمیان، م، اسکندری قادی، م و حیدرپور، ع. "حل تحلیلی مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در محیط استوانه‌ای." (قسمت اول : حل تحلیلی)، نشریه دانشکده فنی، دانشگاه تهران، جلد ۳۲، شماره ۱، ص ۵۳-۵۸، (۱۳۷۸).

واژه نامه

نقاط تکین

تنش پله ای اصلاح شده

1 - Singular points

2 - Modified step stress