حل تحلیلی مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در محیط استوانه‌ای (قسمت اول: حل تحلیلی)

محمد رحیمیان
استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
مرتضی اسکندری قادی
دانشجوی دوره دکتری گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
علیرضا حیدرپور
فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران
(تاریخ دریافت ۷۶/۱۲/۶، تاریخ تصویب ۷۷/۷/۲۵)

چکیده

معادلات حاکم بر اجسامی که تحت اثر ضربه های حرارتی و نیرویی قرار می گیرند از وابسته شدن معادلات ناویه و انرژی حاصل می شوند که معادلات ترموالاستیسیته وابسته نامیده می شوند. در این مقاله حل مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در یک لوله استوانه‌ای بلند در حالت متقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی خارجی به صورت یک جریان حرارتی محدود شده و بدون تنش است .
برای حل معادلات وابسته، ابتدا آنها را با استفاده از خصوصیات مقادیر ویژه به صورت غیروابسته تبدیل می‌کنیم. معادلات اخیر را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل کرده و جواب تحلیلی را در فضای لاپلاس بدست می‌آوریم. برآورد عددی نتایج در قسمت دوم مقاله انجام می شود.

کلیدواژه ها: ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی، متقارن محوری، مقادیر ویژه، تبدیل لاپلاس

مقدمه

مسائلی که در آنها اجسام به طور همزمان تحت اثر ضربه های حرارتی و نیرویی قرار می گیرند (مسائل ترموالاستیسیته وابسته)، بعد وسیعی از کاربردهای عملی مهندسی را شامل می شوند. اگر آهنگ تغییرات بارهای وارده نسبت به زمان زیاد باشد معادلات حاکم بر این نوع مسائل از وابسته شدن معادلات ناویه و انتقال حرارت حاصل می شوند. به این معادلات ، معادلات ترموالاستیسیته وابسته گفته می شود. با کم شدن آهنگ تغییرات فوق می توان از وابستگی معادلات صرفنظر کرده و مستقیماً از معادله انتقال حرارت، توزیع درجه حرارت را به دست آورده و نتیجه را در معادله ناویه قرار داد که این همان حالت نیمه وابسته می باشد.

مسائل ترموالاستیسیته دینامیکی در کاربردهای عملی مانند نیروگاههای اتمی، صنایع نظامی و مخازن تحت فشار و بسیاری کاربردهای صنعتی دیگر دارای اهمیت می‌باشند.

حل تحلیلی مسائل دینامیکی ترموالاستیسیته در حالت غیروابسته با مقادیر اولیه مرزی را اولین بار Danilovskaya در سال ۱۹۵۰ انجام داده است [۱]. این مسئله در نیم فضای الاستیک خطی در حالت متقارن محوری حل گردید و در آن ناحیه مرزی تحت اثر تغییرات درجه حرارت ناگهانی قرار گرفته است و فرض شده که ناحیه فوق بدون تنش است.

Sternberg و Chakravorty در سال ۱۹۵۹ حل تحلیلی برای تغییر مکانهای مسئله Danilovskaya را توسعه دادند و مسئله را برای ناحیه مرزی که تحت اثر شوک حرارت

ناگهانی واقع شده حل کردند. تمام مسائل حل شده توسط آنها بوسیله روش تبدیل لاپلاس به نتیجه رسیده است [۱]. اثرات مربوط به حالت ترموالاستیسیته وابسته و همچنین اثرات اینرسی توسط افرادی همچون Weiner, Boley, Hetnarski, Paria و Chadwick بررسی شده و مسئله Danilovskaya با در نظر گرفتن اثرات وابستگی توسط Boley و Tolins حل شده است [۱].

در سال ۱۹۶۸، Nickell و Sackman روشی موسوم به روش توسعه یافته ریتز برای حل مسئله ترموالاستیسیته وابسته پیشنهاد کردند [۱].

Ghoneim و Chen در سال ۱۹۸۳ با استفاده از روش المانهای محدود و استفاده از روش گالرکین معادلات ترموالاستیسیته وابسته برای یک لوله طویل را حل نمودند [۲]. در روش المانهای محدود برای حل مسئله باید محیط دوبعدی دایره‌ای با المانهای ریز شبکه بندی شود و با سرهم بندی آنها نتیجه نهایی بدست آید. این کار خطاهای عددی بسیاری را بوجود می آورد که خود وابسته به اندازه المانها و تعداد آنها می‌باشد. همچنین این روش قادر به تعیین جواب در اطراف بارهای متمرکز یا منبع حرارتی متمرکز نیست. به کارگیری این روش برای حل مسئله مستلزم صرف زمان زیادی است، در صورتیکه در روش استفاده شده در این مقاله، خطاهای ناشی از شبکه بندی محیط وجود نداشته، تعیین جواب برای هر نوع بارگذاری میسر بوده و هندسه مسئله فقط وابسته به شعاعهای داخلی و خارجی می‌باشد.

هدف این مقاله ارائه روشی برای حل تحلیلی معادلات وابسته ناویه و انتقال حرارت در یک لوله استوانه‌ای بلند در حالت متقارن محوری می‌باشد. برای حل معادلات وابسته، ابتدا آنها را با استفاده از خصوصیات مقادیر ویژه به صورت غیروابسته تبدیل می‌کنیم. معادلات اخیر با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل شده و جواب تحلیلی در فضای لاپلاس بدست می آید.

در قسمت دوم این مقاله برای تعیین جوابها در فضای واقعی، تبدیل معکوس لاپلاس بااستفاده از انتگرال‌گیری انجام شده و در انتها بارگذاریهای حرارتی و نیرویی به صورت توابع دیراک و پله‌ای به طور جداگانه‌ای اعمال شده و نتایج به صورت گرافیکی ارائه می‌شوند.

مسئله مقادیر مرزی ترموالاستیسیته وابسته

در این قسمت مسئله مقادیر مرزی ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در یک لوله استوانه‌ای طویل بدست می‌آید.

معادلات کلاسیک ترموالاستیسیته وابسته با چهار معادله دیفرانسیل جزیی بیان می‌شوند که همان معادلات ناویه و انرژی بوده و با روابط زیر بیان می‌شوند [۴]:

$$\mu \nabla u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla.u) + F - \lambda \nabla T = \rho \ddot{u} \qquad (۱)$$

$$\nabla^2 T - \frac{1}{a}\dot{T} - \eta \nabla.\dot{u} = -\frac{Q}{K} \qquad (۲)$$

که در آن u بردار تغییر مکان، T درجه حرارت، λ و μ ثابتهای لامه، ρ جرم مخصوص، Q حرارت تولید شده در واحد حجم، K ضریب هدایت حرارتی ویژه و a ضریب نفوذپذیری می‌باشند. γ، η و a به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\, \alpha_t,$$

$$\eta = \frac{\gamma T_0}{\rho\, c\, a\, g} = \frac{\gamma T_0}{kg} \qquad (۳)$$

$$a = \frac{k}{\rho\, c}$$

که در آن α_t ضریب انبساط حرارتی، c ظرفیت حرارتی ویژه و T_0 درجه حرارت محیط پیرامون و g شتاب ثقل است.

در غیاب نیروهای حجمی معادلات ناویه و انرژی (۱) و (۲) برای یک استوانه طویل در حالت متقارن محوری به صورت زیر در می‌آیند:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{u}{r^2} + \frac{\ddot{u}}{c_1^2} + m\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{a}\dot{T} + \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{u}) = 0 \qquad (۴)$$

باتوجه به وضعیت تقارن محوری جسم، تغییر مکان شعاعی u و تغییرات درجه حرارت فقط تابعی از شعاع

می‌باشند.

در معادلات (۴) مقادیر m و c_1 از روابط زیر بدست می‌آید:

$$m = \gamma\,(2\mu + \lambda)$$

$$c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad (۵)$$

شرایط اولیه برای u و T به صورت زیر می‌باشند:

$$u(r,0) = 0$$
$$\dot{u}(r,0) = 0$$
$$T(r,0) = 0 \quad (۶)$$

در مسئله فوق شرایط مرزی داخلی به صورت تنش و جریان حرارتی در سطح داخلی استوانه اعمال شده است، در حالیکه شرایط مرزی خارجی به یک جریان حرارتی محدود شده و بدون تنش فرض می‌شوند. شرایط مرزی به شکل زیر تعریف شده اند:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} - \gamma(T-T_\circ) - f^*(t) = 0 \qquad (r=r_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} - \beta^*_1\,[T-g^*(t)] = 0 \quad (۷)$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} - \gamma(T-T_\circ) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \beta^*_2\,T = 0 \quad (۸)$$

لازم به یادآوری است که:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\,\frac{u}{r} - \lambda\,(T-T_\circ)$$

در روابط فوق $\beta^*_1 = \frac{h_1}{k}$ و $\beta^*_2 = \frac{h_2}{k}$ و در آن h_1 و h_2 به ترتیب ضرایب انتقال حرارت در مرزهای داخلی و خارجی و σ_{rr} تنش شعاعی بوده و $f^*(t)$ و $g^*(t)$ به ترتیب بارگذاری نیرویی و جریان حرارتی اعمال شده در سطح داخلی می‌باشند [۱].

حال به منظور سادگی، متغیرهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{T} = \frac{T-T_\circ}{T_\circ}\ ,\quad \bar{r} = \frac{r}{r_1}\ ,\quad \bar{t} = \frac{c_1 t}{r_1}\ ,\quad \bar{u} = \frac{u}{r_1} \quad (۹)$$

با جایگذاری روابط (۹) در روابط (۴)، معادلات اساسی ترموالاستیسیته به صورت بدون بعد در می آیند (توجه شود که به منظور سادگی ، علامت (‾) از روی متغیرها برداشته شده است):

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{u}{r} + r\ddot{u} + \lambda_2\,r\,\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (۱۰)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) + cr\,\dot{T} + c\,\lambda_1\,\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{u}) = 0 \quad (۱۱)$$

مقادیر بی بعد c، λ_1 و λ_2 در روابط فوق عبارتند از:

$$\lambda_2 = mT_\circ\ ,\quad \lambda_1 = \frac{a\eta}{T_\circ}\ ,\quad c = \frac{c_1 r_1}{a}$$

به این ترتیب شرایط اولیه به صورت $T(r,0)=0$ و $u(r,0) = 0$ و شرایط مرزی به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha\,\frac{u}{r} - \lambda_2 T - f(t) = 0\ ,\ (r = \frac{r_1}{r_1} = 1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} - \beta_1[T - g(t)] = 0 \quad (۱۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha\,\frac{u}{r} - \lambda_2 T = 0\ ,\ (r = \frac{r_2}{r_1} = r_\circ)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \beta_2 T = 0 \quad (۱۳)$$

که در آن:

$$\beta_1 = \beta^*_1 r_1\ ,\qquad \beta_2 = \beta^*_2 r_1$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{(2\mu+\lambda)}\ ,\ g(t) = \frac{[g^*(t) - T_\circ]}{T_\circ}\ ,\ f(t) = \frac{f^*(t)}{\lambda + 2\mu}$$

تبدیل لاپلاس برای توابع u و T به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵]:

$$\tilde{u}(r,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,u(r,t)dt$$

$$\tilde{T}(r,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,u(r,t)dt$$

اگر از معادلات (۱۰) و (۱۱) تبدیل لاپلاس بگیریم، معادلات به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$-\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d}{dr}\,\tilde{u}(r,p)\right) + \frac{1}{r}\,\tilde{u}(r,p) + r\,[p^2\,\tilde{u}(r,p) - pu(r,0)$$
$$-\,\dot{u}(r,0)] + \lambda_2 r\,\frac{d}{dr}\,\tilde{T}(r,p) = 0 \quad (۱۴)$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\tilde{T}(r,p)\right) + cr\,[p\tilde{T}(r,p) - \tilde{T}(r,0) + c\lambda_1 \frac{d}{dr}$$

$$[r(p\tilde{u}(r,p) - u(r,p))] = 0 \qquad (۱۵)$$

روابط (۱۴) و (۱۵) باتوجه به روابط (۶) به صورت زیر ساده می شوند (توجه شود که به منظور سادگی، علامت (~) از روی متغیرها برداشته شده است):

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) + \frac{u}{r^2} + p^2u + \lambda_2\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (۱۶)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + cpT + cp\lambda_1\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru) = 0 \qquad (۱۷)$$

معادلات شرایط مرزی (روابط ۱۲ و ۱۳) در محیط لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شوند :

در (r=1)

$$\frac{du}{dr} + \alpha\frac{u}{r} - \lambda_2 T = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p)$$

$$\frac{dT}{dr} - \beta_1 T = -\int_0^\infty e^{-pt}\beta_1\, g(t)dt = G(p)$$

(۱۸)

در $(r=r_0)$ روابط (۱۳) برقرارند یعنی :

$$\frac{du}{dr} + \alpha\frac{u}{r} - \lambda_2 T = 0$$

$$\frac{dT}{dr} + \beta_2 T = 0 \qquad (۱۹)$$

روابط (۱۶) و (۱۷) را می توان بـه شکـل اپراتـوری زیـر نوشت :

$$\nabla^2 u - p^2u - \lambda_2\frac{dT}{dr}\vec{e}_r = 0 \qquad (۲۰)$$

$$\nabla^2 T - cpT - c\lambda_1 p\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru) = 0 \qquad (۲۱)$$

بـا اعـمال عـملگر گرادیـان بـر رابـطه (۲۱) و تـعریف $\vec{\psi} = \frac{dT}{dr}\vec{e}_r$، این رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla^2\vec{\psi} - cp\,\vec{\psi} - c\lambda_1 p\,\nabla^2\vec{u} = 0 \qquad (۲۲)$$

شکل ماتریسی روابط (۲۰) و (۲۲) به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c\lambda_1 p & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla^2\vec{u} \\ \nabla^2\vec{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^2 & \lambda_2 \\ 0 & cp\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{u} \\ \vec{\psi}\end{bmatrix}$$

(۲۳)

رابطه (۲۳) را می توان به صورت ساده زیر در آورد [۳]:

$$\begin{bmatrix}\nabla^2\vec{u} \\ \nabla^2\vec{\psi}\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\vec{u} \\ \vec{\psi}\end{bmatrix}$$

(۲۴)

که در آن :

$$A = \begin{bmatrix} p^2 & \lambda^2 \\ c\lambda_1 p^3 & cp(\lambda_1\lambda_2 + 1)\end{bmatrix}$$

(۲۵)

معادلات (۲۴)، کاملاً وابسته بوده و برای حل آن، ابتدا آن را با استفاده از خواص بردارهای ویژه ماتریس ضرایب A، به صورت مستقل در می‌آوریم، بدین منظور مقادیر ویژه بردارهای نظیر عبارتند از :

$$\mu_{1,2} = \frac{(k_{11}+k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11}+k_{22})^2 - 4(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})}}{2}$$

(۲۶)

که در آن :

$$k_{11} = p^2 \quad , \quad k_{12} = \lambda_2 \quad , \quad k_{21} = c\lambda_1 p^3 \quad ,$$

$$k_{22} = cp(\lambda_1\lambda_2+1) \qquad (۲۷)$$

در نتیجه ماتریس بردارهای ویژه $\hat{T}$ به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\mu_1 - k_{11}}{k_{12}} & \frac{\mu_2 - k_{11}}{k_{12}}\end{bmatrix}$$

(۲۸)

حال با تعریف توابع $\vec{\eta}_1$ و $\vec{\eta}_2$، از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می‌شود :

$$\begin{bmatrix}\vec{u} \\ \vec{\Phi}\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}\vec{\eta} \\ \vec{\eta}\end{bmatrix}$$

(۲۹)

باتوجه به روابط (۲۸) و (۲۹) می توان نوشت :

$$\begin{cases}\vec{u} = \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 \\ \vec{\psi} = \frac{\mu_1 - k_{11}}{k_{12}}\vec{\eta}_1 + \frac{\mu_2 - k_{11}}{k_{12}}\vec{\eta}_2\end{cases}$$

که در آن ،

$$\begin{cases}\vec{\eta}_1 = \eta_1 \vec{e}_r \\ \vec{\eta}_2 = \eta_2 \vec{e}_r\end{cases}$$

با جایگذاری رابطه (۲۹) در رابطه (۲۴) ، بدست می آید :

$$\hat{T}\,\nabla^2 \begin{bmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{bmatrix} = A\hat{T} \begin{bmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

با ضرب دو طرف رابطه (۳۰) در ماتریس وارون $\hat{T}$ می توان نوشت :

$$\nabla^2 \begin{bmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\eta_1 \\ \eta_2\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

باتوجه به رابطه (۳۱) می توان نوشت :

$$\nabla^2 \eta_i - \mu_i \eta_i = 0 \qquad i = 1, 2 \qquad (۳۲)$$

رابطه (۳۲) را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$r^2 \eta_i'' + r\eta_i' - (r^2 \mu_i + 1)\, \eta_i = 0 \qquad (۳۳)$$

رابطه (۳۳) معادله بسل اصلاح شده مرتبه یک می‌باشد که جوابهای کلی آن به صورت زیر است [۶]:

$$\begin{cases}\eta_1 = A_1 I_1(\sqrt{\mu_1}r) + B_1 K_1(\sqrt{\mu_1}r) \\ \eta_2 = A_2 I_1(\sqrt{\mu_2}r) + B_2 K_1(\sqrt{\mu_2}r)\end{cases} \qquad (۳۴)$$

که در آن A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 ضرایب ثابت بوده و از شرایط مرزی بدست می آیند. I_1 و K_1 توابع بسل اصلاح شده مرتبه اول می باشند. باتوجه به روابط (۲۹) و (۳۴) تغییر مکان u و تابع ψ به صورت زیر در می آیند :

$$\begin{cases}u = A_1I_1(\sqrt{\mu_1}r)+B_1K_1(\sqrt{\mu_1}r)+A_2I_1(\sqrt{\mu_2}r)+B_2K_1(\sqrt{\mu_2}r) \\ \psi = \left(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}}\right)(A_1I_1(\sqrt{\mu_1}r)+B_1K_1(\sqrt{\mu_1}r)+\left(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}}\right) \\ \quad +A_2I_1(\sqrt{\mu_2}r)+B_2K_1(\sqrt{\mu_2}r)\end{cases} \qquad (۳۵)$$

برای بدست آوردن T، از رابطه (۲۱) استفاده شده که در آن به جای ψ برحسب T گذاشته می شود:

$$\frac{1}{r}\psi + \frac{d\psi}{dr} - cpT - cp\lambda_1\frac{u}{r} - cp\lambda_1\frac{du}{dr} = 0 \qquad (۳۶)$$

در نتیجه مقدار T عبارت است از :

$$T = \frac{1}{cp}\left[\frac{\psi}{r} + \frac{d\psi}{dr} - cp\lambda_1\frac{du}{dr}\right] \qquad (۳۷)$$

این رابطه برحسب توابع بسل به صورت رابطه زیر در می آید:

$$T = \frac{1}{cp}\{A_1\sqrt{\mu_1}I_0(\sqrt{\mu_1}r)\left[\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p\right] - B_1\sqrt{\mu_1}K_0(\sqrt{\mu_1}r)\left[\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p\right] + A_2\sqrt{\mu_2}I_0(\sqrt{\mu_2}r)\left[\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p\right] B_2\sqrt{\mu_2}K_0(\sqrt{\mu_2}r)\left[\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p\right]\} \qquad (۳۸)$$

برای پیداکردن ضرائب A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 با جایگذاری u و T به ترتیب از روابط (۳۵) و (۳۸) در شرایط مرزی ، این معادلات به صورت زیر برحسب ضرایب A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 مرتب می شوند:

$$A_1\{I_0(\sqrt{\mu_1})[\sqrt{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_1}.(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)]+I_1(\sqrt{\mu_1})(-1+\alpha)\}$$

$$+B_1\{K_0(\sqrt{\mu_1})[-\sqrt{\mu_1}\frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_1}.(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)]+K_1(\sqrt{\mu_1})(-1+\alpha)\}$$

$$+A_2\{I_0(\sqrt{\mu_2})[\sqrt{\mu_2} - \frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_2}.(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)]+I_1(\sqrt{\mu_2})(-1+\alpha)\}$$

$$+B_2\{K_0(\sqrt{\mu_2})[-\sqrt{\mu_2} + \frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_2}.(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)] + K_1(\sqrt{\mu_2})(-1+\alpha)\} = F(p) \qquad (۳۹)$$

و

$$\frac{A_1}{cp}(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\{\mu_1 I_1(\sqrt{\mu_1}) - \beta_1\sqrt{\mu_1}I_0(\sqrt{\mu_1})\}$$

$$+\frac{B_1}{cp}(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\{\mu_1 K_1(\sqrt{\mu_1}) + \beta_1\sqrt{\mu_1}K_0(\sqrt{\mu_1})\}$$

$$+\frac{A_2}{cp}(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\{\mu_2 I_1(\sqrt{\mu_2}) - \beta_1\sqrt{\mu_2}I_0(\sqrt{\mu_2})\}$$

$$+\frac{B_2}{cp}(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\{\mu_2 K_1(\sqrt{\mu_2})+\beta_1\sqrt{\mu_2}K_0(\sqrt{\mu_2})\} = G(p) \qquad (۴۰)$$

و

$$A_1\{I_0(\sqrt{\mu_1}r_0)[\sqrt{\mu_1} - \frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_1}.(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}}-c\lambda_1 p)]+I_1(\sqrt{\mu_1}I_0)(-\frac{1}{r_0}+\frac{\alpha}{r_0})\}+$$

$$B_1\{K_0(\sqrt{\mu_1}r_0)[-\sqrt{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_1}.(\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}}-c\lambda_1 p)]+K_1(\sqrt{\mu_1}I_0)(-\frac{1}{r_0}+\frac{\alpha}{r_0})\}+$$

$$A_2\{I_0(\sqrt{\mu_2}r_0)[\sqrt{\mu_2} - \frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_2} .(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}}-c\lambda_1 p)]+I_1(\sqrt{\mu_2}r_0)$$
$$(-\frac{1}{r_0}+\frac{\alpha}{r_0})\}+$$
$$B_2\{K_0(\sqrt{\mu_2}r_0)[-\sqrt{\mu_2}+\frac{\lambda_2}{cp}\sqrt{\mu_2}.(\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}}-c\lambda_1 p)]+K_1(\sqrt{\mu_2}r_0)$$
$$(-\frac{1}{r_0}+\frac{\alpha}{r_0})\} = 0$$

(۴۱)

و

$$\frac{A_1}{cp}\ (\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\ \{\mu_1 I_1\ (\sqrt{\mu_1}r_0)+\beta_2\sqrt{\mu_1}I_0\ (\sqrt{\mu_1}r_0)\}\ +$$

$$\frac{B_1}{cp}\ (\frac{\mu_1-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\ \{\mu_1 K_1\ (\sqrt{\mu_1}r_0)-\beta_2\sqrt{\mu_1}K_0\ (\sqrt{\mu_1}r_0)\}\ +$$

$$\frac{A_2}{cp}\ (\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\ \{\mu_2 I_1\ (\sqrt{\mu_2}r_0)+\beta_2\sqrt{\mu_2}I_0\ (\sqrt{\mu_2}r_0)\}\ +$$

$$\frac{B_2}{cp}\ (\frac{\mu_2-k_{11}}{k_{12}} - c\lambda_1 p)\ \{\mu_2 K_1\ (\sqrt{\mu_2}r_0)-\beta_2\sqrt{\mu_2}K_0\ (\sqrt{\mu_2}r_0)\} = 0$$

(۴۲)

با بدست آوردن ضرائب مجهول A_1، A_2، B_1 و B_2 از روابط اخیر و قرار دادن آن در توابع u و T، تغییر مکان و تغییر درجه حرارت در محیط به صورت تحلیلی در فضای لاپلاس بدست می آید. برای رسم این توابع برحسب زمان و فاصله شعاعی، به تعیین تبدیل معکوس لاپلاس این توابع نیاز است. در قسمت دوم مقاله انتگرال گیری این توابع انجام شده و نتایج به صورت منحنی های تغییرات u و T برحسب t و r ارائه شده و با نتایج روش عددی (مرجع [۱]) مقایسه می‌شوند.

نتیجه گیری

در این مقاله حل مسائل ترموالاستیسیته وابسته دینامیکی در یک لوله استوانه‌ای بلند در حالت متقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی داخلی به صورت نیرو و جریان حرارتی موثر بر سطح داخلی استوانه بوده ، در حالیکه شرایط مرزی خارجی به یک جریان حرارتی محدود شده و بدون تنش است. مسائل مقادیر مرزی و اولیه وابسته به کمک خصوصیات مقادیر ویژه به صورت مقادیر غیروابسته درآمده ، به طوریکه بتوان از حل هر یک از آنها توزیع تغییر مکان و درجه حرارت را برحسب زمان و مکان در اختیار داشت.

مراجع

1 - Li, Y. Y., Ghoneim, H. and Chen, Y. A. (1983). "A numerical method in solving a coupled thermoelastisity equations and some results." *J. of Thermal Stresses,* 6, 253-280.

2 - Nickell, R. E. and Sackman, J. L. (1968). "Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity." *J. of Appl. Mech.,* 255-266.

3 - Noorzad, A. and Konagai, K. (1994). "Effect of degree of saturation of the impedance of a regid circular disk on a semi-infinite porous media." *Proceeding of the 9th Japan Earthquake Eng. Simposium,* Dec.

4 - Nowacki, W. (1987). *Thermoelasticity,* Addison-Wesley.

5 - Sneddon, I. N. (1955). "The use of integral transform." McGraw-Hill Book Co.

6 - Watson, G. N. (1944). "A treatise on the theory of bessel functions." 2nd ed. Cambridge, London.